

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 71/72 (1918)  
**Heft:** 26

**Artikel:** Zur Berechnung von Tragfedern für Eisenbahn-Fahrzeuge  
**Autor:** Witzig, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34865>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Zur Berechnung von Tragfedern für Eisenbahn-Fahrzeuge. — Wettbewerb für Arbeiter-Wohnhäuser. — Das Arbeiter-Wohnhaus. — † Conradin Zschokke. — Le Congrès du génie civil de Paris 1918. — Konkurrenzen: Schulhausbauten und

öffentliche Anlage auf dem Milchbuck in Zürich. — Nekrologie: Hans Meyer. — Vereinsnachrichten: Gesellschaft ehemaliger Studierender. — Abonnements-Einladung. Tafel 17: † Conradin Zschokke.

Band 72.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 26.

### Zur Berechnung von Tragfedern für Eisenbahn-Fahrzeuge.

Von Dr. phil. K. Witaig, Ingenieur, Zürich.

Die grossen Anforderungen, welche an die modernen Fahrzeuge gestellt werden, bedingen eine gründliche Berechnung und sorgfältige Herstellung der einzelnen Teile. Es ist dies in besonderer Weise bei den verschiedensten Federtypen der Fall, die eine weitgehende Formänderung durch die Ausnützung ihrer Elastizität erfordern. Wir befassen uns insbesondere mit den Tragfedern, die die senkrechten Stosswirkungen, herrührend von Schienenstössen usw., aufzunehmen haben.

Die Elastizität dieser Federn darf wegen der Entgleisungsgefahr nicht zu klein gewählt werden. Aus diesem Grunde werden sie sehr lang ausgeführt. Die minimalen Masse betragen für Personenwagen mit Vereinslenkachsen 1500 mm, für Güterwagen 1000 mm, für Lokomotiven und Tender 900 mm. Ausnahmen gestatten die Blattfedern der Drehgestelle, wo ganze Federsysteme die äusseren Kräfte aufnehmen. Ferner verlangt die nötige Federung eine hohe Beanspruchung des Materials (näheres hierüber, sowie über die Wahl des Starrheitskoeffizienten folgt im Anschluss an die Berechnung). Es ist deshalb nötig, den Federn jene Form zu geben, die bei möglichst geringer Beanspruchung die grösste Durchbiegung ergibt. Als Federmaterial wird nur ausgezeichneter Stahl verwendet mit einer Festigkeit von 80 kg/mm<sup>2</sup> ungehärtet, und 110 kg/mm<sup>2</sup> in gehärtetem Zustand. Für gehärteten Spezialfederstahl wird eine Festigkeit von 145 kg/mm<sup>2</sup> bei 5% Dehnung (ungehärtet 12% Dehnung) vorgeschrieben.

Die Form der Federn ergibt sich, wie bekannt, aus einem nach Abbildung 1 dargestellten Körper gleicher Festigkeit mit konstanter Dicke und veränderlicher Breite, der am Ende mit der Kraft P belastet ist. Die Umgrenzungslinie ist eine Gerade nach der Gleichung

$$B = \frac{6P}{h^2 k_b} (l-x).$$

Man denkt sich die Platte Abbildung 1 b, nach beiden Seiten von der x-Axe aus, der Länge nach in N gleiche Teile zerschnitten und die gleich langen Abschnitte so zusammengesetzt, dass an den Enden Dreiecke entstehen (Abbildung 1 c). Die so gebildeten Einzelblätter werden aufeinander geschichtet (Abb. 1 d). Diese Ausführung mit konstanter Dicke der einzelnen Blätter ist die billigste und kommt gegenwärtig fast ausschliesslich zur Anwendung. In England wurden s. Z. Lokomotiv-Tragfedern hergestellt, bei denen die einzelnen Blätter eine konstante Breite, dagegen eine variable Dicke aufweisen nach der Gleichung  $\frac{6P}{N \cdot b \cdot k_b} (l-x) = h^2$  (Parabel). Solche Federn finden sich heute noch an englischen und deutschen Lokomotiven.

Ein Mittelweg zwischen beiden Ausführungen würde sich dadurch ergeben, dass man nur die Blattenden mit veränderlicher Dicke und mit konstanter Breite ausführt. Auf diese Weise würde dem darüber liegenden Blatt eine gute Unterlage gesichert, ohne die Einsenkung zu beeinflussen. Doch auch diese Herstellungsart stellt sich teurer als jene mit konstanter Dicke und zugespitzten Blattenden.

Aus praktischen Gründen kann die Form des Körpers gleicher Festigkeit mit konstanter Blattdicke nicht genau eingehalten werden; so z. B. erhält das oberste Blatt eine durchwegs konstante Breite ohne zugespitzte Enden. Die Aufhängung der Tragfeder verlangt bei Fahrzeugen mit

Vereinslenkachsen ein Federauge zur Aufnahme der pendelnden Aufhängelaschen, die die Rückstellung der Achsen in ihre Mittellage bewerkstelligen. (Der vorgeschriebene Aufhängewinkel beträgt 30°).

Bei Lokomotiv- und Tenderfedern erfordern die gegenwärtigen Konstruktionen zwei bis drei gleich lange obere Blätter; dadurch ergibt sich die von Abb. 1 abweichende Form Abb. 2. Wie die Kurve für die Beanspruchung (Abb. 2 c) zeigt, weichen solche Federn ziemlich stark von einem Körper gleicher Festigkeit ab und zwar so, dass im Querschnitt mit dem grössten Biegemoment auch die grösste Beanspruchung auftritt.

Die klassische Formel zur Berechnung der Durchbiegung einer Feder,  $f = \frac{l^2 \cdot k_b}{h \cdot E}$ , liefert durch die abweichende Form der praktischen Ausführung Abbildung 2 b, gegenüber der theoretischen Linie Abbildung 1 b, keine genauen Ergebnisse mehr. Folgende, in aller Kürze durchgeführte Berechnung ergibt einen Korrektionsfaktor, der die äussere Form der Feder berücksichtigt. Für l kann man bei neuen Federn mit starken, gut aufgezogenen Bündeln  $L - \frac{1}{6}d$  setzen (d = Bundbreite).

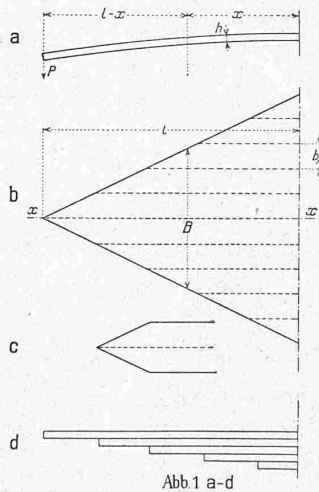


Abb. 1 a-d

- Es bezeichne:  
 b = Blattbreite  
 h = Blattdicke  
 N = Blattzahl in der Federmitte  
 n' = Blattzahl am Federende

- a = Nb = abgewinkelte Breite in der Federmitte  
 c = n'b = abgewinkelte Breite am Federende  
 l = L - 1/6 d = in die Berechnung einzusetzende Länge  
 y = Einsenkung im Abstand x  
 ρ = Krümmungshalbmesser der gebogenen Achse  
 2 P = Federbelastung in kg  
 k<sub>b</sub> = Biegebbeanspruchung kg/cm<sup>2</sup>  
 J<sub>x</sub> = Trägheitsmoment im Abstand x (cm<sup>4</sup>)  
 M<sub>x</sub> = Biegemoment im Abstand x (cmkg)  
 E = Elastizitätsmodul  
 α = Dehnungskoeffizient;  $\frac{1}{\alpha} = E$

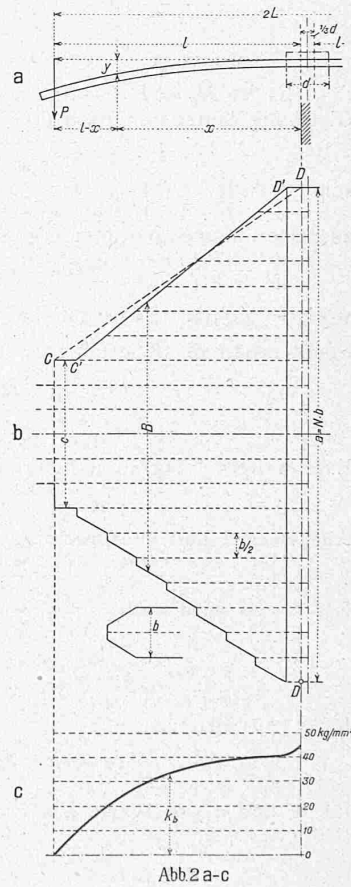


Abb. 2 a-c

Wir gehen aus von der bekannten Formel  $M = \frac{1}{a} \frac{dq}{ds} J$ , wo  $ds$  den Abstand zweier unendlich nahen Querschnitte senkrecht zur  $x$ -Axe,  $dq$  den durch  $M$  hervorgerufenen Drehungswinkel dieser beiden Querschnitte bedeutet.

Es ist nun  $q \, dq = ds$  somit

$$M = \frac{1}{a} \frac{1}{q} J = \frac{E \cdot J}{q}$$

Wenn man die Quadrate von  $\frac{dy}{dx}$  als sehr klein vernachlässigt, kann gesetzt werden  $\frac{1}{q} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ; somit folgt

$$M_x = E J_x \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

Es ist zu beachten, dass  $J_x = \frac{B \cdot h^3}{12}$  auch eine Funktion von  $x$  ist. Nach Abbildung 2 b folgt

$$B = f(x) = a - \frac{a-c}{l} x \quad (2)$$

Streng genommen wäre für  $B$  die Gleichung der gebrochenen Linie  $CC' D' D$  einzusetzen, da jedoch die Abstände  $CC'$  und  $D' D$  klein sind und vom Konstrukteur vermieden werden können, genügt für praktische Zwecke die Gleichung (2) vollständig.

Den Koordinaten-Anfangspunkt denken wir uns in der Tragfedermitte bzw. auf die Linie  $DD$  verlegt.

Da nun  $B = a - qx$ , wo  $q = \frac{a-c}{l}$ , wird

$$J_x = \frac{ah^3}{12} - \frac{qh^3}{12} x = m - nx \quad (3)$$

wo  $m = \frac{ah^3}{12}$  und  $n = \frac{q \cdot h^3}{12} = \frac{a-c}{12l} h^3$

Es ist  $M_x = P(l-x)$ . Die aufzulösende Differentialgleichung lautet nun nach (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(l-x)}{E(m-nx)} \quad (4)$$

somit:  $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E} \left\{ l \int \frac{dx}{m-nx} - \int \frac{x dx}{m-nx} + K_1 \right\}$

ausgewertet und geordnet ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E} \left\{ \frac{m-nl}{n^2} \lg(m-nx) - \frac{m-nx}{n^2} + K_1 \right\}$$

wo  $\lg = \log \text{ nat.}$  Es ist nun für  $x = 0$  auch  $\frac{dy}{dx} = \text{tg} \beta = 0$ .

Somit erhält die Konstante  $K_1$  den Wert:

$$K_1 = \frac{P}{E} \left( -\frac{m-nl}{n^2} \lg m + \frac{m}{n^2} \right) \text{ und} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{P}{E} \left( \frac{m-nl}{n^2} \lg \frac{m-nx}{m} + \frac{nx}{n^2} \right) \quad (5)$$

Eine weitere Integration liefert den gewählten Wert für  $y$

$$y = \frac{P}{E} \left[ \frac{m-nl}{n^2} \int \lg \frac{m-nx}{m} dx + \frac{1}{n} \int x dx \right] + K_2$$

Ausgewertet und geordnet

$$y = \frac{P}{E} \left[ \frac{x^2}{2n} + \frac{m-nl}{n^2} \frac{m-nx}{n} - \frac{m-nl}{n^2} \frac{m-nx}{n} \lg \frac{m-nx}{m} + K_2 \right]$$

Für  $x = 0$  wird auch  $y = 0$ , somit folgt für  $K_2$

$$K_2 = -\frac{P}{E} \frac{m-nl}{n^2} \frac{m}{n} \text{ also wird}$$

$$y = \frac{P}{E} \left[ \frac{x^2}{2n} + \frac{m-nl}{n^2} \left( -x - \frac{m-nx}{n} \lg \frac{m-nx}{m} \right) \right] \quad (6)$$

für  $x = l$  wird  $y_{\max} = f$

$$f = \frac{P}{E} \left[ \frac{l^2}{2n} + \frac{m-nl}{n^2} \frac{-nl - (m-nl) \lg \frac{m-nl}{m}}{n} \right]$$

für  $m$  und  $n$  die Werte aus Gleichung (3) eingesetzt

$$f = \frac{12 Pl^3}{E h^3} \left[ \frac{1}{2(a-c)} - \frac{c(a-c) + c^2 \lg \frac{c}{a}}{(a-c)^3} \right] \text{ oder} \\ f = \frac{6 Pl^3}{E h^3 a} \left[ a \cdot \frac{(a-c)^2 - 2c(a-c + c \lg \frac{c}{a})}{(a-c)^3} \right] \quad (7)$$

für  $c < a$

Der Klammer-Ausdruck stellt den Korrektionsfaktor dar, mit dem die klassische Formel  $f = \frac{6 Pl^3}{E h^3 a} = \frac{k_b l^2}{E h}$  zu multiplizieren ist, um den der praktischen Ausführung entsprechenden Wert der Durchbiegung zu erhalten.

Entwickelt man den  $\log \text{ nat.}$  in eine Reihe, bestimmt einen Näherungswert unter Vernachlässigung Glieder höherer Potenzen, so erhält man als genügend genaue Formel:

$$f = \frac{6 Pl^3}{E h^3 \left( a + \frac{c}{2} \right)} \quad (8)$$

für  $a$  und  $c$  die Werte  $a = Nb$  und  $c = nb$  eingesetzt, folgt,

$$f = \frac{6 Pl^3}{E h^3 b \left( N + \frac{n'}{2} \right)} = \frac{k_b \cdot l^2}{E h} \frac{N}{\left( N + \frac{n'}{2} \right)} \quad (9)$$

für  $n' = 0$  folgt  $f = \frac{k_b \cdot l^2}{E h}$  und für  $n' = N$  ergibt sich

$$f = \frac{2}{3} \frac{k_b \cdot l^2}{E h}, \text{ die bekannten Formeln.}$$

Der Korrektionsfaktor der Gleichung (9)  $\frac{2N}{2N+n'} = \lambda$

und jener der genauen Gleichung (7)  $= \lambda'$  ergeben sehr nahe liegende Werte; so folgt z. B. für  $N = 10, n = 3, b = 10 \text{ cm}$ , also  $a = 100$  und  $c = 30$  nach Gleichung (7)  $\lambda' = 0,835$  (genau) und nach Gleichung (9)  $\lambda = 0,87$ .

Die Schlussformeln (7) bzw. (9) zeigen, dass die Blattzahl am Federende einen wesentlichen Einfluss auf die Durchbiegung einer Feder ausübt. Je mehr Blätter die Enden aufweisen, umso starrer wird die Feder. Wird die Einsenkung einer nach Abbildung 2 b hergestellten Feder nach der bisherigen Formel  $f = \frac{l^2 k_b}{h \cdot E}$  berechnet und hier-

nach der Starrheitskoeffizient vorgeschrieben, so könnte diese Bedingung nur auf Kosten der Qualität des Materials oder durch unrichtige thermische Behandlung des Stahles erfüllt werden. Dann aber liegt die Gefahr nahe, dass bei auftretenden Stößen die Streckgrenze dieses Materials erreicht wird. Die Streckgrenze des Federstahles liegt im ungehärteten Zustand bei etwa  $55 \text{ kg/mm}^2$  und erreicht je nach der thermischen Behandlung  $110 \text{ kg/mm}^2$  für gewöhnlichen Stahl und rund  $140 \text{ kg/mm}^2$  für Spezialstahl.

In vorstehender Berechnung wurde die Reibung zwischen den einzelnen Blättern nicht berücksichtigt. Nach einer Abhandlung „Les dénivellations de la voie et les oscillations du matériel des chemins de fer“ von Marié\*) (siehe auch Lehrbuch des Lokomotivbaues von Leitzmann und v. Borries, Seite 477) ergibt das Verhältnis der Reibungsarbeit zur Arbeit der Federdurchbiegung, die Aenderung des Starrheitsgrades  $= \zeta$ . Mit unsern Bezeichnungen ist:

$$\zeta = \frac{\mu (N-1) k_b \cdot l}{E \cdot y}$$

Für  $y_{\max}$  den Wert Gleichung 9 eingesetzt

$$\zeta = \frac{\mu (N-1) \left( N + \frac{n'}{2} \right) \cdot h}{N \cdot l} \quad (10)$$

Für die erwähnte Feder mit  $h = 1 \text{ cm}$  und  $l = 50 \text{ cm}$  wird z. B., wenn wir  $\mu = 0,3$  setzen,  $\zeta = 0,062$  oder  $6,2\%$  der Federwirkung.

Zum Schluss mögen hier noch einige Angaben über die Beanspruchung und den Starrheitskoeffizienten folgen. Für gewöhnlichen, gehärteten Federstahl mit  $110 \text{ kg/mm}^2$  Festigkeit sollte die Beanspruchung unter ruhender Belastung 45 bis  $50 \text{ kg/mm}^2$  nicht übersteigen. Für gehärteten Spezialfederstahl mit einer Festigkeit von  $145 \text{ kg/mm}^2$  werden noch 60 bis  $65 \text{ kg/mm}^2$  als zulässig erachtet. Grundlegend für die Berechnung einer Feder ist der vorgeschriebene Starrheitskoeffizient, als Mass für die Federung. Unter dem Starrheitskoeffizienten  $= k$  einer Feder verstehen wir diejenige Belastung  $2P$ , die nötig ist, um die Feder  $1 \text{ mm}$  durchzubiegen. Zulässige Starrheitskoeffizienten für Tragfedern der Eisenbahn-Fahrzeuge sind für:

Lokomotiven und Tender	$k = 100$ bis $150 \text{ kg/mm}^2$
Güterwagen	$k = 75$ „ $110$ „ „
Gepäckwagen	$k = 25$ „ $35$ „ „
Personenwagen	$k = 10$ „ $17$ „ „

Bei einer gegebenen Federbelastung  $2P$  ergibt sich aus obigen Werten für  $k$  die maximale Druckbiegung  $f = \frac{2P}{k}$

unter ruhender Belastung. Nach getroffener Wahl von  $k_b$  und den entsprechenden Abmessungen kann je nach Bedürfnis aus Gleichung (9) die Länge  $l$  oder die Blattzahl  $N$  berechnet werden.

\*) Annales des Mines. 10. Série, T. VII—IX, 1905/6. H. Dunod & E. Pinat, Paris.