

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 71/72 (1918)  
**Heft:** 20

**Artikel:** Note sur la vitesse critique des arbres et la Formule de Dunkerley  
**Autor:** Hahn, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34848>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

speicherter Energie, die solche Lokomotiven im Verhältnis zu ihren Abmessungen und ihrem Gewicht aufzunehmen vermögen. Die Pendelfahrten im II. Simplon-Tunnel (Nordseite) betragen höchstens 2 km in jeder Richtung. Für den durchgehenden Betrieb der Südseite waren Luftfassungen alle 4 km vorgesehen.

Für Pendelfahrten mit Zügen von 200 t (brutto) wären auf den Maschinen, selbst bei Erhöhung des Ladedruckes auf 200 at, Luftbehälter für 18 m<sup>3</sup> notwendig (gegenüber 3,5 bzw. 5 m<sup>3</sup> am Simplon), was zu grossen Dimensionen und Gewichten der Lokomotiven führen und das tote Gewicht erhöhen würde. Für längere Fahrten wären Zwischenladestationen nötig, wodurch die ganze Anlage ebenso teuer würde, wie der Umbau für direkten elektrischen Betrieb.

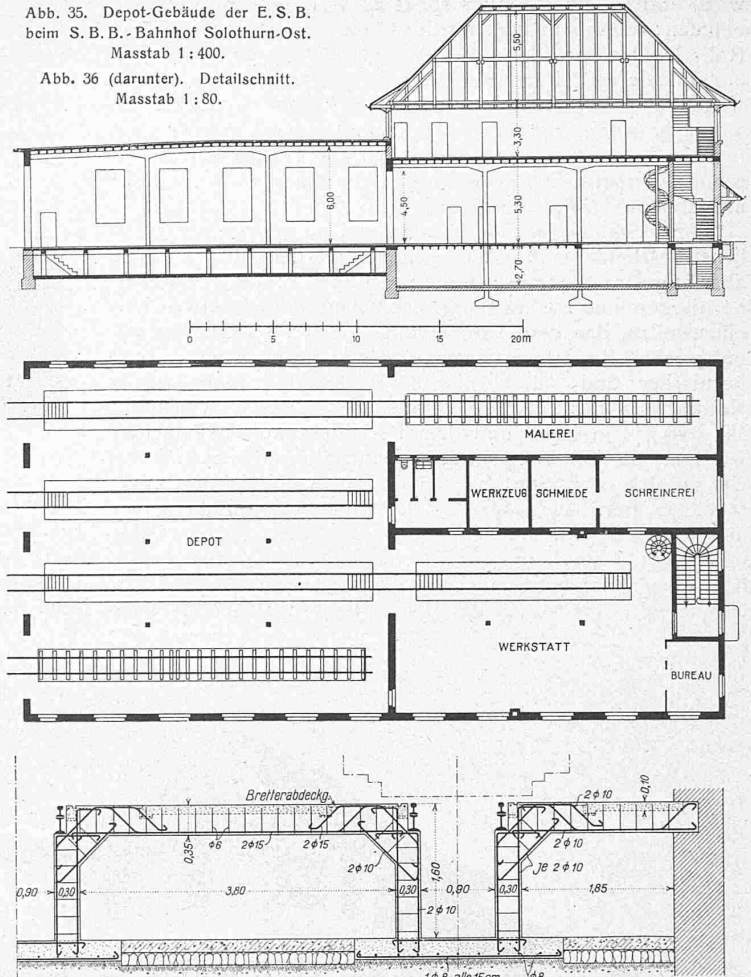
Ferner herrscht im Tunnel ständig eine höhere Temperatur. Im Freien könnte bei kalter Witterung nur durch kräftige, ebenfalls kohlenverzehrende Vorwärmung gegen Vereisung des Mechanismus angekämpft werden. Erfahrungen hierüber liegen bereits vor aus der Zeit der Druckluft-Strassenbahnen (z. B. seinerzeit in Bern).

Die Geschwindigkeit ist bei Druckluft-Förderung eine beschränkte und könnte nur durch erhöhten Luftverbrauch, somit noch weitergehender Vergrößerung der Behälter, auf Kosten der Wirtschaftlichkeit verbessert werden.

Beim Tunnelbau wiegt der Vorteil, dass die Lokomotiven keine für die Arbeiter lästigen oder gar schädlichen Gase entwickeln, solange keine für den gleichen Dienst brauchbare elektrische Lokomotiven bestehen, alle erwähnten Nachteile auf. Aber selbst hier wurde auf der Nordseite des Simplontunnel II in der fertigen Strecke, wo normaler Bahnbetrieb Platz greift, elektrischen Lokomotiven der Vorzug gegeben, wie im obenerwähnten Aufsatz näher ausgeführt. Einer Verwendung von Druckluft für gewöhnlichen Bahnbetrieb stehen wir jedoch skeptisch gegenüber. C. A.

Abb. 35. Depot-Gebäude der E. S. B. beim S. B. B.-Bahnhof Solothurn-Ost. Masstab 1:400.

Abb. 36 (darunter). Detailschnitt. Masstab 1:80.



### Note sur la vitesse critique des arbres et la Formule de Dunkerley.

Par E. Hahn, Professeur à l'Université de Nancy.

(Fin de la page 194.)

10. Applications. Nous allons appliquer rapidement les résultats qui précèdent à quelques cas particuliers. Nous supposerons que l'arbre considéré est de section constante et qu'il repose librement sur deux appuis. Soit (voir la fig. 2 ci-contre):

$l$ , la distance des appuis

$I$ , le moment d'inertie de la section transversale

$E$ , le coefficient d'élasticité.

$$x = \xi l, \quad s = \zeta l.$$

On trouve facilement à l'aide de l'équation différentielle de la ligne élastique les valeurs des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Il y a lieu naturellement de considérer séparément les deux branches de la ligne élastique de part et d'autre de  $Y$ . Nous avons groupé ces coefficients dans le tableau ci-dessous. (Il est bien entendu que, comme plus haut, le premier indice des coefficients indique le lieu où

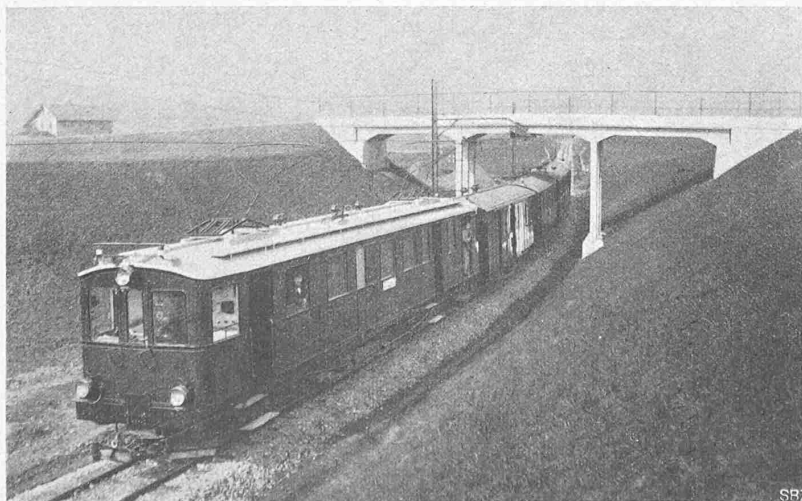


Abb. 29. Schwere Zugkomposition der Elektrischen Solothurn-Bern-Bahn.

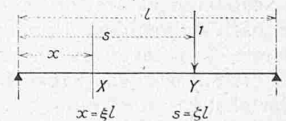


Fig. 2

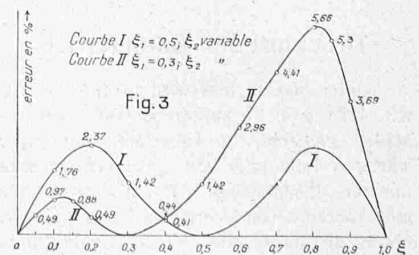


Fig. 3

se mesure l'effet considéré, tandis que le second indice désigne le point d'application de la force ou du couple qui le produit.)

I. Branche gauche

II. Branche droite

$x < s$

$x > s$

$a_{xy} =$

$a_{xy} =$

$\frac{l^3}{6IE} \xi(1-\zeta)(\xi^2 - 2\zeta + \zeta^2)$

$\frac{l^3}{6IE} \zeta(1-\xi)(\zeta^2 - 2\xi + \xi^2)$

$a_{xx} = -\frac{l^3}{3IE} \xi^2(1-\xi)^2$

$\beta_{xy} =$

$\beta_{xy} =$

$\frac{l^2}{6IE}(1-\zeta)[(1-\zeta)^2 - 1 + 3\xi^2]$

$\frac{l^2}{6IE} \zeta[1 - \zeta^2 - 3(1-\xi)^2]$

$\beta_{xx} = -\frac{l^2}{3IE} \xi[1-\xi][1-2\xi]$

$\gamma_{xy} =$

$\gamma_{xy} =$

$\frac{l^2}{6IE} \xi[3(1-\zeta)^2 - 1 + \xi^2]$

$\frac{l^2}{6IE}(1-\xi)[(1-\xi)^2 - 1 + 3\zeta^2]$

$\gamma_{xx} = -\frac{l^2}{3IE} \xi[1-\xi][1-2\xi]$

$\delta_{xy} =$

$\delta_{xy} =$

$\frac{l}{6IE}[1-3\xi^2-3(1-\zeta)^2]$

$\frac{l}{6IE}[1-3\zeta^2-3(1-\xi)^2]$

$\delta_{xx} = \frac{l}{6IE}[1-3\xi^2-3(1-\xi)^2]$

On voit que l'on a bien

$a_{xy} = a_{yx}, \beta_{xy} = -\beta_{yx}, \gamma_{xx} = \beta_{xx}$

comme l'exigent les propriétés générales des coefficients d'influence.

a. Cas d'une masse continue; par exemple: arbre de diamètre constant d.

Nous avons ici, d'après (18) et le tableau précédent,

$B_1 = \frac{ma}{l} \int_0^l a_{xx} dx - \frac{ma \lambda^2}{l} \int_0^l \delta_{xx} dx = \frac{ma}{l} \left[ \frac{l^4}{90IE} - \frac{l^2 \lambda^2}{6IE} \right]$

mais  $\lambda^2 = d^2 : 16$ , aussi le terme en  $\lambda$  est-il négligeable; il vient donc d'après Dunkerley

$\omega_c = \sqrt{\frac{90IE}{ma l^3}} = 9,45 \sqrt{\frac{IE}{ma l^3}}$

tandis que l'intégration de l'équation de la ligne élastique de l'arbre donne (voir par ex. Stodola, Turbines à vapeur) pour valeur exacte

$\omega_0 = 9,86 \sqrt{\frac{IE}{ma l^3}}$

l'erreur est de 4,15%. Servons-nous pour la déterminer de la théorie établie à l'article (10); il nous faut calculer  $B_2$  qui, si nous négligeons l'effet de l'obliquité des tranches, prend la forme:

$B_2 = \frac{ma^2}{l^2} \left[ \int_0^l a_{xx} dx \int_x^l a_{yy} dx - \int_0^l dx \int_x^l a_{xy}^2 dx \right]$

On trouve, tous calculs faits:

$B_2 = \frac{ma^2 l^6}{14 \cdot 8100 l^2 E^2} = \frac{l}{14 \omega_c^4}$

et, par suite, (23):

$\varepsilon = \frac{l}{14} \cdot \frac{l}{1-\frac{l}{7}} = \frac{l}{12} = 8,35\%$

d'où

$\omega_{corr.} = 1,04 \omega_c = 9,83 \sqrt{\frac{IE}{ma l^3}}$

c'est, à 0,003 près, la solution exacte.

Cette application peu connue de la formule de Dunkerley au cas de masses continues présente un certain intérêt, tant en raison de l'approximation déjà très satisfaisante donnée par la formule approchée, que par la possibilité d'obtenir le résultat exact grâce au calcul de la correction.

b. Influence de l'obliquité du disque dans le cas d'un arbre chargé d'une roue seulement.

Soit  $m$  la masse du disque,  $\Theta = m\lambda^2$  son moment d'inertie. ( $\lambda^2 = D^2 : 16$  dans les cas d'un disque de dia-

mètre  $D$  et d'épaisseur constante). A la fin de l'article 6, nous avons mis l'équation complète pour le calcul de la vitesse critique sous la forme

$\frac{\omega_1^4}{\omega_1^2 \Omega_1^2} \left[ 1 - \frac{\beta_{11}^2}{\alpha_{11} \delta_{11}} \right] + \left[ \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_1^2} \right] \omega_1'^2 - 1 = 0$

où

$\omega_1^2 = \frac{1}{\alpha_{11} m_1}; \quad \Omega_1^2 = -\frac{1}{\delta_{11} \Theta_1}$

On peut écrire aussi:

$\Omega_1^2 = -\frac{\alpha_{11}}{\delta_{11} \alpha_{11} m_1 \lambda^2} = -\frac{\alpha_{11}}{\delta_{11} \lambda^2} \omega_1'^2$

et par suite

$\frac{\omega_1^4}{\omega_1^4} \lambda^2 \left( \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) + \frac{\omega_1'^2}{\omega_1^2} \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \lambda^2 \right) - 1 = 0$

ou encore en posant  $\omega_1' : \omega_1 = x$ :

$\frac{1}{\xi(1-\xi)} \frac{\lambda^2}{l^2} x^4 + \left[ 1 - \frac{1-3\xi+3\xi^2}{\xi^2(1-\xi)^2} \frac{\lambda^2}{l^2} \right] x^2 - 1 = 0$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs exactes et les valeurs approchées (formule de Dunkerley) de  $x$  dans les deux alternatives:

$\lambda^2 = l^2 : 16, \quad l = D \quad \text{et} \quad \lambda^2 = l^2 : 144, \quad l = 3D$

et pour diverses positions de la roue sur l'arbre.

$\xi$	= 0,1	= 0,2	= 0,223	= 0,3	= 0,4	= 0,5
$l = D$	$x$ exact: 3,13	1,41	1,29	1,096	1,018	1,0
$\lambda^2 = l^2 : 16$	$x$ appr.: imag.	imag.	$\infty$	1,45	1,20	1,155
$l = 3D$	$x$ exact: 1,155	1,05		1,01	1,002	1,0
$\lambda^2 = l^2 : 144$	$x$ appr.: 1,243	1,08		1,031	1,019	1,015

Il confirme le résultat indiqué à l'article 10, relativement au sens de l'erreur. Il montre de plus que dans les cas où la portée est faible, la formule de Dunkerley donne des résultats d'une précision tout à fait insuffisante. On voit même qu'elle conduit à cette conclusion fautive qu'il y aurait une certaine position du disque pour laquelle le couple de redressement neutraliserait complètement l'effet de la force centrifuge et pour laquelle  $\omega_c$  deviendrait par suite  $\infty$ .

Dès que, par contre, la portée est relativement grande par rapport à  $\lambda$ , l'erreur reste dans des limites très acceptables, exception faite des positions voisines des appuis.

c. Influence de la position des roues sur l'erreur. Cas de deux roues. On fait abstraction de l'obliquité des roues. On reconnaît immédiatement en examinant la formule (23) que la grandeur de l'erreur dépend de la position des roues, car  $B_2$  varie avec celle-ci. Voici par exemple les résultats que l'on obtient quand on fait les calculs dans le cas de deux roues de même masse en supposant l'une des roues fixe, tandis que l'autre vient occuper successivement toutes les positions possibles le long de l'arbre. On a envisagé deux alternatives: 1° la roue fixe est calée au milieu de l'arbre,  $\xi_1 = 0,5$ ; 2° la roue fixe est calée au point  $\xi_1 = 0,3$  (Courbes I et II, fig. 3 à la page 206).

La variation de l'erreur avec la position des roues est, comme on le voit, très notable; c'est là d'ailleurs un fait que l'expérience a mis depuis longtemps en évidence.

d. Pour terminer, établissons l'équation complète donnant la vitesse critique dans le cas d'un arbre chargé de deux disques d'épaisseur constante et de diamètre  $D$ .

Prenons  $l = 3D \quad \xi_1 = 0,3 \quad \xi_2 = 0,7$

On trouve tous calculs faits:

$0,0009 \frac{\omega^8}{\omega_1^8} - 0,0135 \frac{\omega^6}{\omega_1^6} - 0,186 \frac{\omega^4}{\omega_1^4} + 1,884 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 = 0$

Si l'on faisait abstraction de l'obliquité des roues, on aurait:

$-0,3 \frac{\omega^4}{\omega_1^4} + 2 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 = 0.$

[ $\omega_1 =$  vitesse critique due à une roue (sans effet de l'obliquité)].

La formule de Dunkerley donne:

(sans effet de l'obliquité)	$\omega_c = 0,707 \omega_1$	erreur = 5,48%
(avec effet de l'obliquité)	= 0,729 $\omega_1$	= 2,54%
l'éq. complète (sans effet de l'obliquité)	= 0,737 $\omega_1$	= 1,47%

l'éq. avec effet de l'obliquité,  
arrêtée au terme en  $\omega^4$  (for-  
mule 23)  
l'éq. complète

$$= 0,748 \omega_1 \quad = 0,0 \%$$

$$= 0,748 \omega_1 \quad = \quad -$$

On voit qu'effectivement les termes contenant les puissances supérieures de  $\omega$  ne jouent aucun rôle et que la relation 23 suffit amplement pour calculer l'erreur. Il en est naturellement autrement si l'on se propose de calculer les vitesses critiques supérieures. La considération de l'équation complète devient alors indispensable.

*Résumé:* Le présent travail contient une démonstration de la formule de Dunkerley et un calcul de l'erreur que comporte cette formule. La loi de formation des coefficients de l'équation générale de la vitesse critique y est exposée, ce qui élucide une question que M. Stodola a qualifiée lui-même d'obscure (voir „Dampfturbinen“ IV<sup>e</sup> édition, page 293).

### Konkurrenzen.

**Verwaltungsgebäude der Aargauischen Kreditanstalt in Aarau** (Band LXXI, Seite 161; Band LXXII, Seite 152 und 176). Das Preisgericht hat am 9. November seine Arbeit beendet und folgende Entwürfe prämiert:

- I. Preis (3500 Fr.) Entwurf Motto „Soll und Haben“. Verfasser: *F. und R. Saager* in Firma Saager & Frey, Architekten in Biel.
- II. Preis (2000 Fr.) Entwurf Motto „Arovium“. Verfasser *Gebr. Pfister*, Architekten B. S. A. in Zürich.
- III. Preis (1800 Fr.) Entwurf Motto „Grosstadtgedanken“. Verfasser *Heinrich Villiger*, Architekt in Zürich.
- IV. Preis (1500 Fr.) Entwurf Motto „Augustin Keller“. Verfasser *Schäfer & Risch*, Architekten B. S. A. in Zürich.
- V. Preis (1200 Fr.) Entwurf Motto „Goldhafen“. Verfasser *Otto Dorer jun.*, Architekt in Baden.

Die Ausstellung sämtlicher Entwürfe in der Turnhalle bei der Kavallerie-Kaserne in Aarau findet vom 16. bis 18. November statt.

**Formschöne und billige Möbel.** Der *Verband schweiz. Konsumvereine* (V. S. K.) in Basel eröffnet unter Schweizern und seit einem Jahr (5. November) in der Schweiz Niedergelassenen einen Wettbewerb zur Erlangung von Entwürfen für Möbel, wie sie den heutigen Bedürfnissen einfach lebender Volkskreise entsprechen. Die hier angestrebten Verbesserungen müssen sich auf die Herstellungsart, wie auf die Vollendung der Zweckform erstrecken; auf einfache Formen, die bei grösstmöglicher Billigkeit (Maschinenarbeit) von untadeligem Geschmack sein müssen. Das Preisrichteramt haben übernommen Prof. *J. de Praetere* (Genf), Prof. Dr. *K. Moser* (Zürich) und Gewerbemuseums-Direktor Dr. *H. KiENZLE* (Basel); es stehen dem Preisgericht zur Prämierung 10 000 Fr. zur Verfügung (für fünf Preise von 3000 bis 750 Fr. + 5 × 350 Fr.).

Zu bearbeiten ist das Mobiliar einer Dreizimmer-Wohnung in zwei Typen: A zu 1250 Fr. und B zu 2500 Fr. Herstellungspreis, jede Wohnung bestehend aus Wohnzimmer, Schlafzimmer und Küche. Verlangt werden die Entwürfe 1:10 für alle im einzelnen bezeichneten Möbelstücke, sowie Detailpläne für fünf Einzelmöbel. Einlieferungsfrist ist der 1. März 1919. Das Programm ist zu beziehen bei der Verwaltungs-Kommission des V. S. K., Thiersteiner-Allee 14 in Basel.

**Eisenbahnbrücke über die Arsta-Inseln in Stockholm** (vergl. Seite 152). Auf unser Ersuchen hat uns die ausschreibende Behörde der schwedischen Staatsbahnen die vollständigen Wettbewerb-Unterlagen (samt Planbeilagen) zugestellt; sie können auf unserer Redaktion an Wochentagen zwischen 8 Uhr und 4<sup>1/2</sup> Uhr (an Samstagen bis 12 Uhr mittags) von Interessenten eingesehen werden. Es handelt sich um eine rund 700 m lange, viergleisige Eisenbahnbrücke aus Eisen, Beton oder Eisenbeton, mit einer beweglichen Oeffnung von 24 m Weite, Fahrbahn 28 bis 24 m über M. W., fester Baugrund in max. Tiefe von 24 m, bzw. 18 m unter M. W. Wir werden die bedeutende Aufgabe sobald wie möglich anhand von Zeichnungen näher erläutern. Um indessen schon jetzt den Interessenten, die sich nach Kenntnisnahme der Programm-Bestimmungen die notwendigen Unterlagen aus Stockholm kommen lassen wollen, die ungesäumte Inangriffnahme der *Vorstudien* zu ermöglichen, haben wir vom geologischen Längsprofil der Brückenstelle (1:400) Pausen angefertigt, von denen wir auf Wunsch Heliographien herstellen und liefern können.

Redaktion: A. JEGHER, CARL JEGHER.  
Dianastrasse 5, Zürich 2.

### Vereinsnachrichten.

**Gesellschaft ehemaliger Studierender**  
der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

#### Stellenvermittlung.

*Gesucht* nach Ungarn (deutschsprechender Teil) tüchtiger, zuverlässiger *Maschinen-Ingenieur* mit Werkstättenpraxis, der die technische Leitung einer Unternehmung der Metallbranche zu übernehmen hätte. Gute und reichliche Verpflegung zugesichert. (2152)

*On cherche* pour un technicum suisse un *ingénieur* diplômé comme professeur de constructions mécaniques. (2153)

*On cherche* pour la France deux jeunes *ingénieur-dessinateurs* bien au courant de la construction d'usines métallurgiques, pour la reconstruction d'usines actuellement détruites. (2154)

*On cherche* pour la France un *ingénieur* susceptible de diriger le service technique, comprenant l'étude complète de travaux d'entreprises (force et traction, éclairage, transports d'énergie, etc.), ainsi que de réparation et montage de machines et appareils électriques et électro-mécaniques. (2155)

*On cherche* pour la France un *ingénieur* spécialiste en appareils de levage, pour diriger le bureau de construction d'ateliers importants. (2156)

Auskunft erteilt kostenlos

Das Bureau der G. e. P.  
Dianastrasse 5, Zürich.

## An unsere Abonnenten!

Die verspätete Ausgabe dieser Nummer ist auf den Arbeiterausstand zurückzuführen, der vom 9. bis 16. d. M. die Druckerei auch unserer Zeitschrift stillgelegt hat. Es ist unvermeidlich, dass infolgedessen auch Nr. 21 einige Tage Verspätung erleiden wird; bei Nr. 22 hoffen wir wieder die gewohnte Ordnung einhalten zu können. Unsere Leser wollen diese Unregelmässigkeit freundlich entschuldigen.

Wir teilen unsern Abonnenten ferner mit, dass wir infolge der durch die Kriegsverhältnisse bedingten, ganz unverhältnismässig gestiegenen Papierpreise und Erhöhungen der Arbeitslöhne sowie aller übrigen Spesen, welche Verhältnisse sich wohl noch lange nicht bessern werden, genötigt sind, zur Deckung eines kleinen Teiles unserer Mehrkosten für die Herstellung der Zeitschrift vom 1. Januar 1919 an den *Abonnementspreis etwas zu erhöhen*, wie folgt:

Für direkte Abonnenten im Inland und für solche im Postabonnement auf 30 Fr. jährlich, für direkte Abonnenten im Ausland (Weltpostverein) 36 Fr. jährlich. Die Mitglieder des S. I. A. und der G. E. P., deren Organ die „Schweiz. Bauzeitung“ ist, erhalten sie vom 1. Januar 1919 zum Preise von 24 Fr. in der Schweiz und 29 Fr. im Ausland (Weltpostverein), wenn sie ihre Bestellung direkt an die Unterzeichneten richten.

Wie üblich werden wir uns erlauben, den Abonnementsbetrag, wo nicht Anderes vereinbart ist, in der ersten Woche 1919 mit Nachnahmekarte auf Grund obengenannter Preise einzuziehen. Jene Abonnenten, die vorziehen sollten, um Nachnahmespesen zu sparen, die Zahlung durch Mandate (auf Postcheckkonto Nr. VIII 6110) oder in baar zu entrichten, bitten wir, solches noch im Laufe des Monats Dezember zu besorgen.

Ungeachtet der Ungunst der Zeiten werden wir Alles aufbieten, um die uns von unsern werten Lesern bisher gezollte Anerkennung auch weiterhin in vollem Masse zu rechtfertigen. Wir halten uns ihnen sowie unsern geehrten Mitarbeitern bestens empfohlen.

SCHWEIZERISCHE BAUZEITUNG

A. & C. Jegher.