Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 71/72 (1918)
Heft: 19

Artikel: Note sur la vitesse critique des arbres et la Formule de Dunkerley

Autor: Hahn, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34841

Band 72. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 19.**

Note sur la vitesse critique des arbres et la Formule de Dunkerley.

Par *E. Hahn*, Professeur à l'Université de Nancy.

1. Soit ω_c la vitesse critique d'un arbre reposant sur un nombre quelconque d'appuis de nature quelconque (appuis libres ou encastrements) et portant un certain nombre de roues de masses $m_1, m_2, \dots m_n$; soit m_a la masse propre de l'arbre; soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_n$ les vitesses critiques que prendrait l'arbre, supposé dépourvu de masse, s'il était sollicité successivement par chacune des masses agissant isolément, soit ω_a la vitesse critique due à la masse propre de l'arbre; on peut, d'après Dunkerley, formuler la proposition suivante: *L'inverse du carré de la vitesse critique du système est égale à la somme des inverses des carrés des vitesses critiques élémentaires*, et écrire par conséquent:

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_a^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} \qquad (1)$$

Dunkerley a indiqué cette relation à la fin d'un mémoire important [1]) où, après avoir tenté l'intégration de l'équation générale de la ligne élastique de l'arbre dans divers cas et reconnu l'impossibilité de tirer aucune conclusion pratique des résultats (sauf dans le cas de l'arbre considéré seul), il constate l'accord très satisfaisant qui existe entre les résultats expérimentaux qu'il communique et ceux calculés à l'aide de la formule (1). Il n'en donne d'ailleurs aucune démonstration et se borne à en justifier la forme et à la rendre plausible par des considérations basées sur la théorie des vibrations.

Je me propose de montrer comment on peut établir rigoureusement la formule de Dunkerley et calculer l'erreur qu'elle comporte, car, comme on le sait et comme s'en rendait compte son auteur, cette relation ne donne qu'une solution approchée du problème.

2. Négligeons pour commencer l'influence de l'obliquité des roues et des couples de redressement qui en résultent; supposons en outre que les roues sont rigoureusement centrées, enfin, faisons abstraction de la masse propre de l'arbre. Nous reprendrons plus loin l'étude de ces points spéciaux.

Désignons par $C_1, C_2, \dots, C_n$ les forces centrifuges développées par les masses $m_1 \dots, m_n$ en raison du fléchissement de l'arbre, soient $y_1, y_2, \dots y_n$ les inflexions mesurées au droit des disques. Nous pouvons écrire:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11} C_1 + a_{12} C_2 + \dots + a_{1n} C_n, \\ y_2 &= a_{21} C_1 + a_{22} C_2 + \dots + a_{2n} C_n, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1} C_1 + a_{n2} C_2 + \dots + a_{nn} C_n, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2)$$

où les coefficients a sont les coefficients d'influence tels qu'on les considère dans la théorie de la flexion des poutres droites.

Mais nous avons d'autre part:

$$C_1 = y_1 m_1 \omega^2, \; C_2 = y_2 m_2 \omega^2, \; \dots \; C_n = y_n m_n \omega^2$$

et, par suite, le système d'équations (2) devient:

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11} m_1 \omega^2 - 1) y_1 + a_{12} m_2 \omega^2 y_2 + \dots \\ &\qquad \dots + a_{1n} m_n \omega^2 y_n = 0, \\ &a_{21} m_1 \omega^2 y_1 + (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) y_2 + \dots \\ &\qquad \dots + a_{2n} m_n \omega^2 y_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots = 0, \\ &a_{n1} m_1 \omega^2 y_1 + a_{n2} m_2 \omega^2 y_2 + \dots \\ &\qquad \dots + (a_{nn} m_n \omega^2 - 1) y_n = 0. \end{aligned}\right\} \; . \; (2')$$

[1]) Philosophical Transactions London. Vol. 185, ann. 1894 p. 279.

Les valeurs critiques de la vitesse sont celles qui rendent nul le déterminant des coefficients des quantités y, on arrive donc à l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} a_{11} m_1 \omega^2 - 1, & a_{12} m_2 \omega^2 & , \dots & a_{1n} m_n \omega^2 \\ a_{21} m_1 \omega^2 & , a_{22} m_2 \omega^2 - 1, & \dots & a_{2n} m_n \omega^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} m_1 \omega^2 & , a_{n2} m_2 \omega^2 & , \dots & a_{nn} m_n \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

3. Ce déterminant est de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} + z, & a_{12} & , \dots & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} + z, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \dots & a_{nn} + z \end{vmatrix}$$

qui, ainsi qu'on en trouvera la démonstration dans les traités d'algèbre peut s'écrire:

$$A_n + A_{n-1} z + A_{n-2} z^2 + \dots + A_2 z^{n-2} + A_1 z^{n-1} + z^n$$

où

$$A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

$$A_2 = \left[\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{1n} \\ a_{n1}, & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{2n} \\ a_{n2}, & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1}, & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & , a_{nn} \end{vmatrix} \right]$$

$A_3 = \Sigma$ de tous les déterminants du 3e ordre que l'on peut former avec les termes de la diagonale principale et les autres coefficients des lignes et colonnes correspondantes, $A_4 = \Sigma$ de tous les déterminants de 4e ordre, etc. ...

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Appliquons cette propriété au déterminant qui forme le membre de gauche de l'équation (3); nous avons ici $z = -1$; en remarquant de plus que tous les termes d'un même coefficient A contiennent le facteur ω à la même puissance, (3) s'écrira:

$$A'_n \omega^{2n} - A'_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots$$
$$\dots + A'_2 (-1)^{n-2} \omega^4 + A'_1 (-1)^{n-1} \omega^2 + (-1)^n = 0 \quad (3')$$

où, entre autres:

$$A'_1 = a_{11} m_1 + a_{22} m_2 + \dots + a_{nn} m_n.$$

Mais on a évidemment[1]):

$$a_{11} m_1 = \frac{1}{\omega_1^2}, \; a_{22} m_2 = \frac{1}{\omega_2^2}, \; \dots \; a_{nn} m_n = \frac{1}{\omega_n^2} \quad (4)$$

donc:

$$A'_1 = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots \frac{1}{\omega_n^2},$$

et (3) s'écrit par conséquent aussi

$$A'_n \omega^{2n} - A'_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + A'_2 (-1)^{n-2} \omega^4 +$$
$$+ (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} \right] + (-1)^n = 0 \quad (3'')$$

Si dans cette équation on néglige les termes contenant les puissances de ω supérieures à la seconde, on obtient la relation

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots \frac{1}{\omega_n^2} \quad . \; . \quad (5)$$

c. a. d. la formule de Dunkerley. Nous pouvons donc dire:

La formule de Dunkerley est le résultat approché que l'on obtient quand dans l'équation générale qui donnerait les valeurs de la vitesse critique, on néglige les termes contenant les puissances de ω supérieures à la seconde.

[1]) Il suffit pour l'établir d'appliquer les équations (2) au cas où l'arbre n'est chargé que par une roue seulement.

En toute rigueur cette proposition ne se trouve établie encore que sous les conditions restrictives énoncées en tête du paragraphe 2; je lui donne néanmoins d'emblée cette forme générale, car on verra plus loin qu'elle subsiste encore quand on s'affranchit de ces restrictions.

5. Examinons d'abord la question de l'excentricité des roues, cette excentricité pouvant varier en direction dans le sens radial d'une roue à l'autre. On décomposera dans ce cas les forces centrifuges suivant deux directions arbitrairement choisies; pour chaque système de composantes on obtiendra un groupe d'équations analogues aux équations (2); les seconds membres ne seront, il est vrai, plus nuls, mais la condition nécessaire et suffisante pour la vitesse critique sera encore exprimée par l'équation (3) et, par suite, toutes les conditions tirées de celle-ci subsistent sans changement.

6. Considérons maintenant l'influence de l'obliquité des roues et des couples de redressement corrélatifs. On démontre facilement (voir par ex. *Stodola*, Turbines à vapeur) que si τ désigne l'inclinaison de la ligne élastique de l'arbre et Θ le moment d'inertie de la roue par rapport à un diamètre, le moment du couple de redressement est donné par la relation:

$$M = -\tau\,\Theta\,\omega^2 \qquad (6)$$

à condition que l'inclinaison soit assez faible pour que l'on puisse poser $\cos\tau = 1$, $\sin\tau = \tau$. Le signe — indique que ce moment tend toujours à faire disparaître l'inclinaison τ.

Nous avons donc affaire à deux causes de déformation de l'arbre: un ensemble de forces centrifuges et un ensemble de couples. Comme les déformations considérées sont élastiques, il est permis d'appliquer le principe de superposition et d'additionner par conséquent les déformations partielles produites par chacune des causes pour obtenir la déformation totale.

Nous devons tenir compte ici non seulement des flèches, mais aussi des inclinaisons sur l'axe longitudinal. Les flèches dues aux forces se calculent comme plus haut à l'aide des coefficients d'influence α. Pour obtenir les inclinaisons, il suffit de remarquer que le coefficient d'influence α_{xy} n'est autre chose que la flèche produite en X par l'application en Y d'une force égale à l'unité et que par conséquent l'inclinaison de la ligne d'influence en X, β_{xy}, est donnée par la relation

$$\beta_{xy} = \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} \qquad (7)$$

où x désigne le paramètre servant à définir la position du point X. Une force P appliquée en Y produit donc en X une inclinaison de la ligne élastique

$$\tau = \beta_{xy}\,P$$

Quant aux déformations dues aux couples, nous appliquerons pour les déterminer la proposition suivante:

L'effet d'un couple de moment égal à l'unité en un point d'une pièce élastique est égal à la dérivée partielle de l'effet similaire produit au même endroit par une force égale à l'unité dont le point d'application est identique à celui du couple. La dérivée partielle est à prendre par rapport au paramètre qui définit la position de la force ou du couple.

Par effet, on peut entendre soit un déplacement linéaire, soit une rotation, soit même d'autres grandeurs géométriques ou mécaniques.

Dans le cas qui nous occupe nous aurons donc pour la flèche produite en X par un couple unité appliqué en Y, c'est à dire pour le coefficient d'influence cherché:

$$\gamma_{xy} = \left[\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial s}\right]_{s = s_y} \qquad (8)$$

et de même pour l'inclinaison

$$\delta_{xy} = \left[\frac{\partial \beta_{xy}}{\partial s}\right]_{s = s_y}, \qquad (9)$$

mais en raison de (7) nous pouvons écrire aussi:

$$\delta_{xy} = \left[\frac{\partial^2 \alpha_{xy}}{\partial x\,\partial s}\right]_{s = s_y} \qquad (9')$$

Remarquons d'ailleurs que d'après (7):

$$\beta_{xx} = \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial x}$$

et d'après (8)

$$\gamma_{xx} = \left[\frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial s}\right]_{s = s_y = x}$$

ces deux grandeurs sont évidemment identiques, on a donc

$$\beta_{xx} = \gamma_{xx}.$$

Les liaisons qui existent entre les coefficients α, β, γ, δ étant ainsi établies, nous pouvons former maintenant les équations qui remplacent les relations (2). Il vient:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \alpha_{1n} C_n + \gamma_{11} M_1 + \gamma_{12} M_2 + \ldots + \gamma_{1n} M_n, \\
y_2 &= \alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \alpha_{2n} C_n + \gamma_{21} M_1 + \gamma_{22} M_2 + \ldots + \gamma_{2n} M_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_n &= \alpha_{n1} C_1 + \alpha_{n2} C_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \alpha_{nn} C_n + \gamma_{n1} M_1 + \gamma_{n2} M_2 + \ldots + \gamma_{nn} M_n,
\end{aligned}$$

et de plus, si nous considérons les déformations angulaires:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \beta_{11} C_1 + \beta_{12} C_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \beta_{1n} C_n + \delta_{11} M_1 + \delta_{12} M_2 + \ldots + \delta_{1n} M_n, \\
\tau_2 &= \beta_{21} C_1 + \beta_{22} C_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \beta_{2n} C_n + \delta_{21} M_1 + \delta_{22} M_2 + \ldots + \delta_{2n} M_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\tau_n &= \beta_{n1} C_1 + \beta_{n2} C_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \beta_{nn} C_n + \delta_{n1} M_1 + \delta_{n2} M_2 + \ldots + \delta_{nn} M_n.
\end{aligned}$$

Mais comme plus haut:

$$C_1 = y_1\,m_1\,\omega^2, \quad C_2 = y_2\,m_2\,\omega^2, \ldots$$

et, d'après (4):

$$M_1 = -\tau_1\,\Theta_1\,\omega^2, \quad M_2 = -\tau_2\,\Theta_2\,\omega^2, \ldots$$

nous arrivons donc au système d'équations suivant:

$$\left.\begin{aligned}
&(\alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1) y_1 + \alpha_{12} m_2 \omega^2 y_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \alpha_{1n} m_n \omega^2 y_n - \gamma_{11} \Theta_1 \omega^2 \tau_1 - \ldots \\
&\quad \ldots - \gamma_{1n} \Theta_n \omega^2 \tau_n = 0, \\
&\alpha_{21} m_1 \omega^2 y_1 + (\alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1) y_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \alpha_{2n} m_n \omega^2 y_n - \gamma_{21} \Theta_1 \omega^2 \tau_1 - \ldots \\
&\quad \ldots - \gamma_{2n} \Theta_n \omega^2 \tau_n = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\
&\alpha_{n1} m_1 \omega^2 y_1 + \alpha_{n2} m_2 \omega^2 y_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + (\alpha_{nn} m_n \omega^2 - 1) y_n - \gamma_{n1} \Theta_1 \omega^2 \tau_1 - \ldots \\
&\quad \ldots - \gamma_{nn} \Theta_n \omega^2 \tau_n = 0, \\
&\beta_{11} m_1 \omega^2 y_1 + \beta_{12} m_2 \omega^2 y_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \beta_{1n} m_n \omega^2 y_n - [\delta_{11} \Theta_n \omega^2 + 1] \tau_1 - \ldots \\
&\quad \ldots - \delta_{1n} \Theta_n \omega^2 \tau_n = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\beta_{n1} m_1 \omega^2 y_1 + \beta_{n2} m_2 \omega^2 y_2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \beta_{nn} m_n \omega^2 y_n - \delta_{n1} \Theta_1 \omega^2 \tau_1 - \ldots \\
&\quad \ldots - [\delta_{nn} \Theta_n \omega^2 + 1] \tau_n = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Ce système est de forme analogue aux équations (2'), mais comporte $2\,n$ inconnues, c. a. d. n inconnues y et n inconnues τ.

Ici encore les valeurs critiques de la vitesse sont celles qui annulent le déterminant d'ordre $2\,n$ formé par les coefficients des inconnues.

Ce déterminant présente les mêmes particularités que celui étudié plus haut (éq. 3'); l'équation de condition à laquelle satisfait la vitesse critique est donc de la forme

$$B'_{2n}\,\omega^{4n} - B'_{2n-1}\,\omega^{4n-2} + \ldots + B'_2\,\omega^4 - B'_1\,\omega^2 + 1 = 0 \qquad (11)$$

où les coefficients B' sont à former comme on l'a indiqué au paragraphe 3.

En particulier on a:

$$B'_1 = \alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \ldots + \alpha_{nn} m_n - \delta_{11} \Theta_1 - \ldots \ldots - \delta_{nn} \Theta_n. \qquad (12)$$

Pour nous rendre compte de la signification physique des termes négatifs qui entrent dans cette grandeur, supposons que l'arbre ne porte qu'une roue, par exemple la roue I, et admettons que cette roue soit de masse négligeable ainsi que la force centrifuge qu'elle développe, tandis, qu'au contraire, son moment d'inertie Θ_1 soit appréciable ainsi que ses effets. Ces conditions ne se trouvent jamais réalisées pratiquement mais sont néanmoins utiles à introduire dans le calcul comme la suite le montre.

Les équations (10) se réduisent dans ce cas à l'unique relation

$$\delta_{11}\,\Theta_1\,\omega^2 + 1 = 0$$

d'où l'on tire la valeur particulière de ω

$$\Omega_1{}^2 = -\frac{1}{\delta_{11}\,\Theta_1}\,, \quad \Omega_1 = i\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}\,\Theta_1}}\,, \quad i = \sqrt{-1}\,. \qquad (13)$$

Ω_1 n'est autre chose que la vitesse critique — *imaginaire d'ailleurs* — due à l'inclinaison de la roue sur l'axe.

On voit dès lors que si l'on traite (11) comme (3') en négligeant les puissances de ω supérieures à la seconde, la vitesse critique de l'arbre, ω'_c, dans le cas où l'on tient compte de l'obliquité des roues, est donnée par la relation

$$\frac{1}{\omega'_c{}^2} = B'_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

ou encore, eu égard à (4) et (13)

$$\frac{1}{\omega'_c{}^2} = \frac{1}{\omega_1{}^2} + \frac{1}{\omega_2{}^2} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{\omega_n{}^2} + \frac{1}{\Omega_1{}^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n{}^2} \qquad (15)$$

A condition de faire intervenir les vitesses imaginaires Ω, la formule de Dunkerley se trouve donc bien vérifiée.

Si, reprenant le cas de l'arbre portant une roue seulement, nous laissons tomber l'hypothèse faite plus haut relativement à la masse, les équations (10) deviennent

$$(\alpha_{11}\,m_1\,\omega^2 - 1)\,y_1 - \gamma_{11}\,\Theta_1\,\omega^2\,\tau_1 = 0$$
$$\beta_{11}\,m_1\,\omega^2\,y_1 \qquad - \delta_{11}\,\Theta_1\,\omega^2\,\tau_1 = 0$$

qui nous donnent comme équation de condition pour les valeurs de la vitesse critique de l'arbre avec influence de l'obliquité du disque

$$\alpha_{11}\,m_1\,\delta_{11}\,\Theta_1\left[1 - \frac{\beta_{11}\,\gamma_{11}}{\alpha_{11}\,\delta_{11}}\right]\omega'_1{}^4 +$$
$$+ \left[\alpha_{11}\,m_1 - \delta_{11}\,\Theta_1\right]\omega'_1{}^2 - 1 = 0\,.$$

Avec les notations introduites plus haut et la relation $\beta_{xx} = \gamma_{xx}$ nous pouvons écrire aussi

$$-\frac{\omega'^4}{\omega_1{}^2\Omega_1{}^2}\left[1 - \frac{\beta_{11}{}^2}{\alpha_{11}\,\delta_{11}}\right] + \left[\frac{1}{\omega_1{}^2} + \frac{1}{\Omega_1{}^2}\right]\omega'_1{}^2 - 1 = 0\,.$$

le facteur entre [ ] qui multiplie le terme $\omega'_1{}^4$ n'est généralement pas nul, de sorte que l'on n'a pas le droit, à moins d'admettre une erreur dont l'importance est examinée plus loin, de poser

$$\frac{1}{\omega'_1{}^2} = \frac{1}{\omega_1{}^2} + \frac{1}{\Omega_1{}^2}\,.$$

Si l'on passe outre et que l'on écrive par suite la formule de Dunkerley sous la forme:

$$\frac{1}{\omega'_c} = \frac{1}{\omega'_1{}^2} + \frac{1}{\omega'_2{}^2} + \dots + \frac{1}{\omega'_n{}^2}\,,$$

on fait au fond deux applications successives de la formule de Dunkerley: une première application pour calculer les vitesses critiques dues à chaque roue, une seconde pour trouver la vitesse critique de l'ensemble. On commet donc deux erreurs successives, dont il n'est pas possible de dire *à priori* si elles se compensent ou si, au contraire, elles s'ajoutent. Ce point est discuté plus bas.

7. *Cas de masses continues* constituées soit par des roues infiniment rapprochées, soit par ex. par la masse propre de l'arbre. Soit dm la masse d'une de ces roues ou d'une tranche d'épaisseur infiniment petite dx dans le sens de l'axe, soit $d\Theta$ le moment d'inertie correspondant. Nous pouvons encore écrire en principe un système d'équations analogue à (10) mais avec une infinité d'équations. La condition à remplir pour qu'il y ait vitesse critique n'en demeure pas moins la même et les termes de cette équation de condition sont toujours formés d'après la même loi. Par conséquent, si on néglige de nouveau tous les termes contenant les puissances de ω supérieures à la seconde, on retrouve la relation (14)

$$\frac{1}{\omega'_c{}^2} = B'_1\,,$$

où toutefois B'_1 contient en raison de sa forme (12) la différence de deux infinités de termes et s'écrit par conséquent:

$$B'_1 = \int_0^l \alpha_{xx}\,dm - \int_0^l \delta_{xx}\,d\Theta\,.$$

Si les masses sont variables en fonction de x, les intégrales pourront être déterminées au besoin graphiquement [1]). Dans le cas d'un arbre de section constante, nous pouvons poser en désignant par m_a sa masse totale, par l sa longueur totale et par λ le rayon de giration:

$$B'_1 = \frac{m_a}{l}\int_0^l \alpha_{xx}\,dx - \frac{m_a\,\lambda^2}{l}\int_0^l \delta_{xx}\,dx$$

$$\frac{1}{\omega_a{}^2} = B'_1\,.$$

8. Si l'on avait affaire à la fois à un arbre et à plusieurs roues, le terme B'_1 contiendrait les deux intégrales que nous venons de calculer et les termes calculés à l'article 6. On trouverait donc pour la vitesse critique du système

$$\frac{1}{\omega'_c{}^2} = \frac{1}{\omega_a{}^2} + \frac{1}{\omega_1{}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n{}^2} + \frac{1}{\Omega_1{}^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n{}^2}$$

A la vérité, la vitesse critique ω_a de l'arbre qui figure dans cette relation n'est pas la valeur rigoureuse, mais celle qui résulte de l'application de la formule de Dunkerley à la détermination de la vitesse critique d'un solide de section constante. L'erreur est dans tous les cas insignifiante.

Les conditions sur lesquelles repose la formule de Dunkerley se trouvent ainsi établies pour les divers cas qu'il y avait lieu de considérer.

9. *Etude de l'erreur de la formule de Dunkerley.* Reprenons l'équation (12), ou éventuellement l'équation (3'), la solution de Dunkerley nous donne comme valeur approchée $\omega_c{}^2$ du carré de la vitesse critique la relation

$$\omega_c{}^2 = \frac{1}{B'_1}$$

tandis que la valeur exacte, $\omega_o{}^2$, est racine de l'équation complète

$$\omega^2 = \frac{1 + B'_2\,\omega^4 - B'_3\,\omega^6 + \dots}{B'_1} = \omega_c{}^2 + y\,,$$

où

$$y = \frac{B'_2\,\omega^4 - B'_3\,\omega^6 + \dots}{B'_1} = f(\omega^2)\,.$$

Considérons un système d'axes rectangulaires y, ω^2 et construisons (Fig. 1) la droite

$$y = \omega^2 - \omega_c{}^2 \qquad (20)$$

et la courbe

$$y = f(\omega^2)\,. \qquad (21)$$

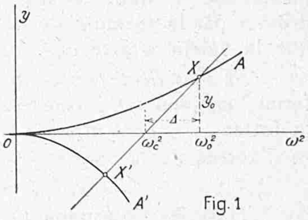

Fig. 1

On vérifie facilement que celle-ci est tangente à l'axe des ω^2 à l'origine et qu'en raison de la nature de la fonction $f(\omega^2)$ qui n'a pas de racines comprises entre O et ω_c, elle se présente soit sous la forme OA, soit sous la forme OA'. L'abscisse de l'intersection X ou X' de la droite (20) et de la courbe (21) est évidemment égale à la valeur exacte $\omega_o{}^2$ cherchée, par suite *l'erreur $\varDelta = \omega_o{}^2 - \omega_c{}^2$ que comporte la solution de Dunkerley est égale à l'ordonnée y_o du point d'intersection X.* On voit de plus *que la correction à apporter à ω_c pour obtenir ω_o est toujours du même signe que la fonction $y = f(\omega^2)$.*

[1]) Il y a là, en principe, une nouvelle méthode de détermination graphique de la vitesse critique d'un arbre. Au point de vue pratique, tout revient à expérimenter si la recherche des quelques valeurs de α_{xx} nécessaires au tracé de la courbe de la fonction figurant sous la première intégrale (la seconde est généralement négligeable) est plus longue que les constructions nécessitées par la méthode de Stodola.

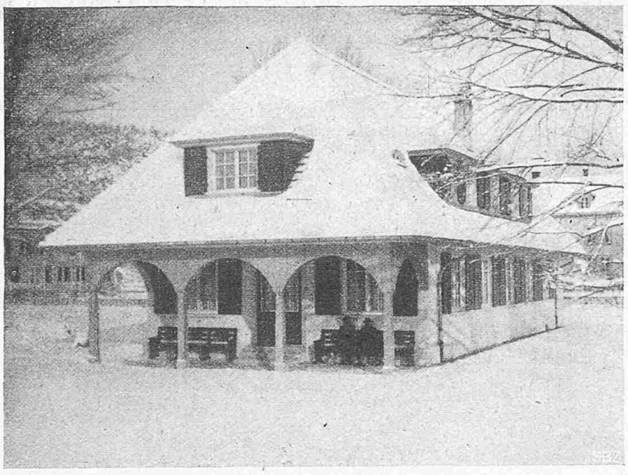

Abb. 39. Arbeiter-Kosthaus der Spinnerei Hermann Bühler & Cie. in Winterthur. Architekten *Rittmeyer & Furrer* in Winterthur.

Posons pour plus de commodité

$$\Delta = \varepsilon\, \omega_c^2\,, \quad \omega_0^2 = (1+\varepsilon)\, \omega_c^2\,,$$

la condition trouvée pour l'erreur, $\Delta = y_o$, nous donne

$$\varepsilon\, \omega_c^2 = \omega_c^2 \left[B'_2\, \omega_c^4 (1+\varepsilon)^2 - B'_3\, \omega_c^6 (1+\varepsilon)^3 + \ldots\right] \quad (22)$$

d'où l'on peut tirer ε.

Dans le cas où ε est assez petit pour qu'on en puisse négliger les puissances supérieures à la première, on peut écrire plus simplement:

$$\varepsilon = \left[B'_2 (1+2\,\varepsilon) - B'_3 (1+3\,\varepsilon)\, \omega_c^2 + \ldots\right] \omega_c^4\,.$$

Le plus souvent dans les applications les coefficients B'_3 et suivants sont pratiquement négligeables devant B'_2; on obtient alors la relation très simple:

$$\varepsilon = \frac{B'_2\, \omega_c^4}{1 - 2\, B'_2\, \omega_c^4}\,. \quad (23)$$

L'erreur rapportée à ω et non plus à ω^2 est sensiblement la moitié de ε.

On peut faire au sujet du signe de l'erreur quelques remarques générales. Le terme B'_2 dont dépendent avant tout l'erreur et le signe de la fonction y est formé par une somme de déterminants du second ordre. *Si l'on fait abstraction de l'obliquité des roues,* B'_2 est de la forme

$$\Sigma\, (\alpha_{xx}\, \alpha_{yy} - \alpha_{xy}^2)\, m_x\, m_y\,. \quad (24)$$

On peut s'assurer sans difficulté que chacun de ces déterminants est toujours positif, B'_2 l'est donc aussi, de même que y; dans ce cas, par conséquent, la valeur ω_c^2 donnée par la formule de Dunkerley *est toujours plus petite* que la valeur exacte ω_o^2.

Si l'on tient compte de l'obliquité des roues, B'_2 renferme, en plus des termes (24), d'autres termes, les uns de la forme $\quad -\Sigma\, (\alpha_{xx}\, \delta_{yy} - \gamma_{xy}\, \beta_{yx})\, m_x\, \Theta_y \quad$ (25)

et d'autres de la forme

$$\Sigma\, (\delta_{xx}\, \delta_{yy} - \delta_{xy}^2)\, \Theta_x\, \Theta_y\,. \quad (26)$$

Tous les déterminants qui y figurent sont généralement positifs. D'autre part, le rayon de giration des roues étant presque toujours petit, comparé à la portée, les termes (25) et (26) sont généralement secondaires et, par suite, le signe — des termes (25) ne suffit pas à changer le signe de B'_2. La fonction y demeure positive et la conclusion à laquelle nous arrivions plus haut subsiste encore dans ce cas. On voit de plus que B'_2 sera plus petit et par conséquent l'approximation meilleure que dans le cas précédent.

On ne peut toutefois formuler ici une conclusion absolument catégorique, car, dans certains cas particuliers, par exemple lorsque la portée est relativement faible, B'_2 peut changer de signe du fait des termes (25) et ω_o peut être plus petit que ω_c. C'est ce qui se produit si l'on envisage le cas d'une roue seulement; B'_2 se réduit à un seul terme de la forme (25) et devient donc négatif. On a par conséquent $\omega_o < \omega_c$. (à suivre)

Schweiz. Werkbund-Ausstellung in Zürich.

Die Arbeiterwohnung.

(Fortsetzung von Seite 111.)

Die auf den Seiten 194 und 195 vorgeführten Bauten der Architekten *Rittmeyer & Furrer* in Winterthur wurden kürzlich erstellt für die Spinnerei Hermann Bühler & Cie. im Sennhof bei Winterthur. Es handelt sich um einen Arbeiterhaus-Typus für Reihenbau (Abb. 33 bis 36) und um ein Speisehaus (Abb. 37 bis 39), deren Pläne an der Ausstellung zu sehen waren.

Das Reihenhaus, versuchsweise als Dreihäusergruppe erbaut mit zwei Dreizimmer- und einer Vierzimmerwohnung, zeichnet sich aus durch grosse, durchlüftbare Wohnstuben im Erdgeschoss. Die als Essküchen dimensionierten Küchen liegen gegen Süden, gegen die Gartenseite, die Haustüren gegen Norden (Strassenseite). Die Waschküchen der Dreizimmerhäuser befinden sich im Untergeschoss. Eine Besonderheit bilden die ausserhalb des Hauses verlegten, von einem verbreiterten Tritt der innern Treppe aus zugänglichen Aborte. Wie der Rückansicht der Häusergruppe und den Grundrissen zu entnehmen, ist mit dieser Abort-Anlage eine geräumige Laube im Obergeschoss verbunden, die, an den Enden jeweils verglast, nicht nur im Gebrauch sehr zweckmässig, sondern auch als Wind- und Wetterschutz wertvoll ist. Solche Lauben sind übrigens als ortsübliches Bauelement längst erprobt und bewährt; ihre Wiederaufnahme, in architektonisch so wohlgeordneter Form wie hier, ist daher sehr zu begrüssen. Die Geschosshöhe beträgt 2,50 *m* im Lichten; der Dachraum ist unausgebaut, was zu der guten Haltung in der äussern Erscheinung vorteilhaft beiträgt.

Ebenfalls in einfacher, bestimmter Form erscheint das Kosthaus (Abb. 37 bis 39). Die Zimmer im Dachgeschoss sind für das Dienstpersonal bestimmt; sie lassen sich aber auch, teilweise oder ganz, zu einer Wohnung zusammenfassen.

*

Das Beamten-Doppelhaus in Rorbas (Abb. 1 bis 6, Seite 196 und 197), das Rittmeyer & Furrer für die Firma Blumer & Biedermann A.-G. erbaut haben, war an der Ausstellung zwar nicht zu sehen, bringt aber den Werkbundgedanken gleichermassen zum Ausdruck: zweckmässige Einteilung in klarer architektonischer Form, unter Verzicht auf blos schmückendes Beiwerk. Situation und Raumverteilung sind den Bildern und Grundrissen zu entnehmen, denen wir nichts beizufügen brauchen. (Forts. folgt.)

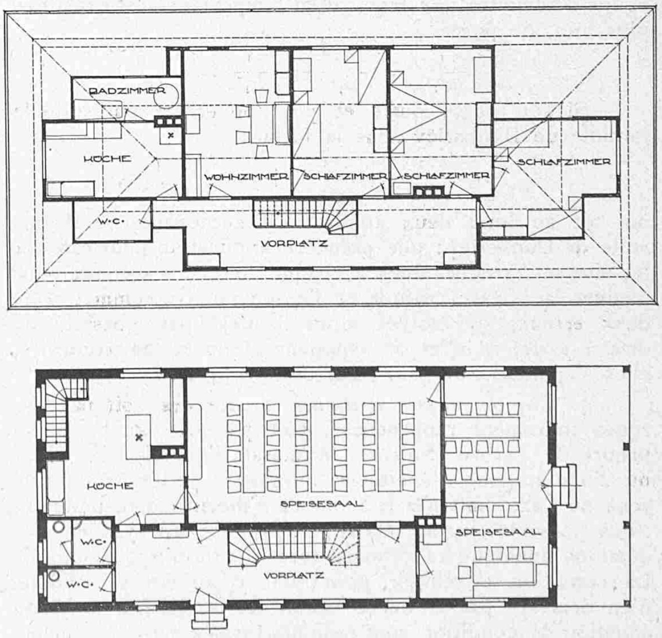

Abb. 37 und 38. Grundrisse des Kosthauses. — Masstab 1 : 250.