Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 71/72 (1918)

Heft: 12

Artikel: Die Berechnung des durchlaufenden Brückengewölbes auf elastischen Pfeilern

Autor: Strassner, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34814

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Die Berechnung des durchlaufenden Brückengewölbes auf elastischen Pfeilern. — Schweizerische Werkbund-Ausstellung in Zürich. — Friedhofkapelle in Herisau. — Von der 45. Jahresversammlung des Schweizerischen Vereins von Gas- und Wasserfachmännern. — Schiffahrt auf dem Oberrhein. — Nekrologie: Th. Schlatter. — Miscellanea: Simplon-Tunnel II. Die Kautschukgewinnung der Welt. Neuer Hafen bei Trollhättan. Verein deutscher Ingenieure. — Konkurrenzen: Schulhausbauten und öffentliche Anlagen auf dem Milchbuck in Zürich. Ueberbauung des Obmannamt-Areals in Zürich. Alkoholfreie Gemeindestuben und Gemeindehäuser. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Gesellschaft ehemaliger Studierender: Stellenvermittlung.

Band 72. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 12.

Die Berechnung des durchlaufenden Brückengewölbes auf elastischen Pfeilern.

Von Ingenieur *A. Strassner*, Frankfurt a. Main.

Die Berechnung des durchlaufenden Brückengewölbes in Eisenbeton auf elastischen massiven Pfeilern ist, seitdem der Eisenbetonbau das Gebiet des Brückenbaues sich errang und namentlich zum Bau von Talbrücken Eingang fand, eine Aufgabe, die für den Praktiker aus wirtschaftlichen Gründen und wegen der Frage der Standsicherheit Bedeutung erlangt hat. Vom rein theoretischen Standpunkt aus, ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten. Die Durchführung der genauen Berechnung in der Praxis ist jedoch, schon bei wenigen Pfeilern, derart umständlich und zeitraubend, dass sie meist nicht in Betracht kommt: in der Regel fasst man näherungsweise die Pfeiler als starr auf, und begnügt sich mit der Anwendung des bekannten Berechnungsverfahrens für das fest eingespannte einfache Brückengewölbe.

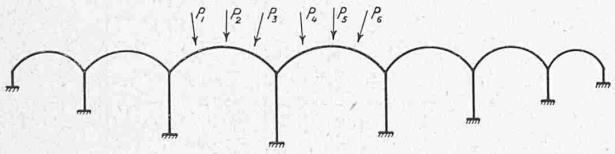


Abb. 1

In folgendem erläutern wir ein *Verfahren, um den Einfluss der Pfeilerelastizität für sich festzustellen und zusätzlich zu berücksichtigen.* Dabei gehen wir von den allgemeinen Elastizitätsgleichungen für das durchlaufende Brückengewölbe aus — die in der angeschriebenen Form auch zur scharfen Berechnung angewandt werden können — und lösen diese unter einer vereinfachenden Annahme auf. Es wird in dieser Weise eine überaus einfache und übersichtliche Lösung erzielt, die umso wichtiger ist, da die Genauigkeit, der vereinfachenden Annahme zufolge — wie noch nachgewiesen wird — nur äusserst wenig leidet und das Verfahren daher in jedem Falle als zulässig angesehen werden kann.

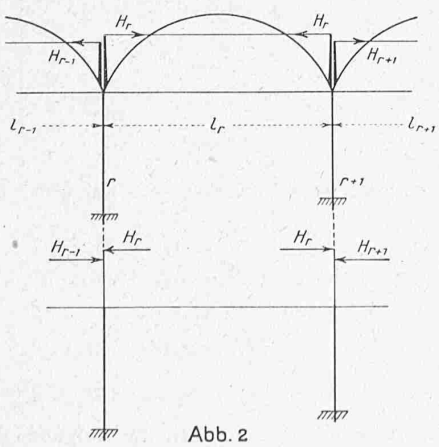


Abb. 2

1. *Entwicklung der Elastizitätsgleichungen.*

Die Elastizitätsgleichungen werden unter Bezug auf die Bewegungen (Verschiebungen und Verdrehungen) der Gewölbekämpfer und Pfeilerköpfe erhalten. Wir ziehen ausschliesslich elastische Bewegungen in Betracht, d. h. solche, die zu ihrer Erzeugungskraft in einem festen Verhältnis stehen. Ausserdem fassen wir nur wagrechte Verschiebungen und Verdrehungen ins Auge — lotrechte Verschiebungen (elastische Senkungen) schliessen wir wegen dem verschwindend geringen Einfluss auf die Schnittkräfte aus.

Es bedeute (s. Abb. 2) für die Oeffnung l_r:

H_r die Bogenkraft infolge der Belastung
s_r ihr Abstand von der Kämpferwagrechten[1])
$M_{a,r}$ das Kämpfermoment links infolge der Belastung
$M_{b,r}$ „ „ rechts „ „ „
$\alpha_{a,r}$ die Kämpferverdrehung links infolge $M_{a,r} = 1$
$\alpha_{b,r}$ „ „ rechts „ $M_{b,r} = 1$
β_r „ „ $\begin{cases} \text{links „} & M_{b,r} = 1 \\ \text{rechts „} & M_{a,r} = 1 \end{cases}$
δ_r' die Verschiebung der Angriffspunkte von $H_r = 1$
$\delta_{h,r}$ die Einsenkung der Gewölbepunkte infolge $H_r = 1$
$\delta_{a,r}$ „ „ „ „ „ $M_{a,r} = 1$
$\delta_{b,r}$ „ „ „ „ „ $M_{b,r} = 1$

für den Pfeiler r

$\Delta_{l,r}$ die wagrechte Verschiebung infolge der Belastung
α_r die Verdrehung infolge der Belastung
λ_r die wagrechte Verschiebung infolge $H_r = 1$
λ_r' die $\begin{cases} \text{wagrechte Verschiebung infolge } M = 1 \\ \text{Verdrehung infolge } H = 1 \end{cases}$
ε die Verdrehung infolge $M = 1$.

Für die Oeffnung l_{r-1} ist r durch den Index $r-1$ zu ersetzen
„ „ „ l_{r+1} „ r „ „ „ $r+1$ „ „
„ den Pfeiler $r+1$ „ r „ „ „ $r+1$ „ „ usw.
Sonst gelten die gleichen Bezeichnungen wie vor.

Bewegung der Bogenkämpfer.

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{l,r} + \Delta_{l,r+1} + (\alpha_r + \alpha_{r+1}) \cdot s_r &= \Sigma P \delta_{h,r} + H \cdot \delta_r' \\ \alpha_r &= \Sigma P \delta_{a,r} + M_{a,r} \cdot \alpha_{a,r} + M_{b,r} \cdot \beta_r \\ \alpha_{r+1} &= \Sigma P \delta_{b,r} + M_{b,r} \cdot \alpha_{b,r} + M_{a,r} \cdot \beta_r \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die erste Gleichung entsteht durch Gleichsetzen der Verschiebung der mit den Kämpfern bezw. den Pfeilern starr verbunden gedachten Angriffspunkten von H_r dar. Die Verschiebung rechnen wir positiv, wenn die Spannweite des betreffenden Gewölbes sich verringert.

Bewegung der Pfeilerköpfe.

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{l,r} &= \lambda_r \cdot (H_{r-1} - H_r) + \\ &\quad + \lambda'_r \cdot (M_{b,r-1} + H_{r-1} \cdot s_{r-1} - M_{a,r} - H_r \cdot s_r) \\ \Delta_{l,r+1} &= \lambda_{r+1} \cdot (H_{r+1} - H_r) + \\ &\quad + \lambda'_{r+1} \cdot (M_{a,r+1} + H_{r+1} \cdot s_{r+1} - M_{b,r} - H_r \cdot s_r) \\ \alpha_r &= \lambda'_r \cdot (H_{r-1} - H_r) + \\ &\quad + \varepsilon_r \cdot (M_{b,r-1} + H_{r-1} \cdot s_{r-1} - M_{a,r} - H_r \cdot s_r) \\ \alpha_{r+1} &= \lambda'_{r+1} \cdot (H_{r+1} - H_r) + \\ &\quad + \varepsilon_{r+1} \cdot (M_{a,r+1} + H_{r+1} \cdot s_{r+1} - M_{b,r} - H_r \cdot s_r) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Um die Elastizitätsgleichungen zu erhalten, sind die vorstehenden Ausdrücke (Gl. 1 u. 2) zu verbinden. Es folgt dann ein Gleichungssystem, das aus drei Gleichungen besteht, die man für jede Oeffnung anschreibt, worauf man die jeweiligen Unbekannten (H, M_a, M_b) ermitteln kann. Mithin ist die Aufgabe gelöst.

2. *Die Auflösung der Elastizitätsgleichungen.*

Die Pfeiler der durchlaufenden Brückengewölbe sind in der Regel durch äussere Kräfte schwer aus ihrer Form zu bringen, sodass sie gegenüber den biegsamen Gewölben stets als verhältnismässig steif angesehen werden können.

[1]) Ist wie beim fest eingespannten Gewölbe zu bestimmen. Unter «Bogenkraft» ist die sonst mit «Horizontalschub» bezeichnete Kraft zu verstehen. Vgl. das Werk des Verfassers «Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger», Berlin 1916, Verlag von W. Ernst & Sohn, Seite 148.

Die Formänderungen der Pfeiler — die Verschiebung Δ_l und die Drehung α (s. Abb. 3) — sind in erster Linie von der Kraft H abhängig, während das Moment M nur sehr wenig zur Geltung kommt. Um dies einzusehen, beachte man die folgende Untersuchung.

Ein Pfeiler habe 20 m Höhe und sei durch $H = 1\,t$ und $M = {}^1/_2\,mt$ belastet (s. Abb. 4)[1].

Es ergibt sich

	inf. H	inf. M	
$EJ \cdot \Delta_l \cong$	2700	100	in m^{-1}
$EJ \cdot \alpha \cong$	200	10	in m^{-2}

Mithin ist es zulässig, dass man bei der Formänderung der Pfeiler das Moment M ausser Betracht lässt. Die Elastizitätsgleichungen für die Pfeiler (Gl. 2) lauten dann

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{l,r} &= \lambda_r \cdot (H_{r-1} - H_r) \\ \Delta_{l,r+1} &= \lambda_{r+1} \cdot (H_{r+1} - H_r) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

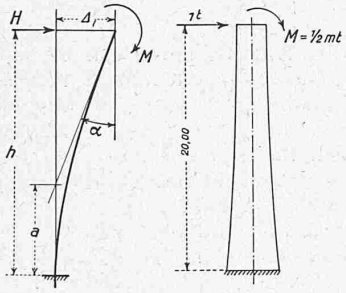


Abb. 3 Abb. 4

Dies sind die Ausdrücke für die Verschiebungen. Die Winkel werden unter Bezug auf Abb. 3 gefunden. Es ist allgemein[2])

$$\alpha = \frac{\Delta_l}{h - a}$$

und es kann somit gesetzt werden

$$\left.\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{\Delta_{l,r}}{h_r - a_r} \\ \alpha_{r+1} &= \frac{\Delta_{l,r+1}}{h_{r+1} - a_{r+1}} \end{aligned}\right\} (4)$$

Nun folgt durch Verbinden mit den Gleichungen (1)

$$\Delta_{l,r} + \Delta_{l,r+1} + \left[\frac{\Delta_{l,r}}{h_r - a_r} + \frac{\Delta_{l,r+1}}{h_{r+1} - a_{r+1}}\right] \cdot s_r = \\ = \Sigma P \delta_{h,r} + H_r \cdot \delta'_r$$

oder

$$\Delta_{l,r} \cdot \left(1 + \frac{s_r}{h_r - a_r}\right) + \Delta_{l,r+1} \cdot \left(1 + \frac{s_r}{h_{r+1} - a_{r+1}}\right) = \\ = \Sigma P \delta'_{h,r} + H_r \cdot \delta'_r$$

und mit Rücksicht auf die Gl. (3) bezw. (4)

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_r \cdot (H_{r-1} - H_r)\,(1 + \psi_r) + \\ &+ \lambda_{r+1} \cdot (H_{r+1} - H_r)\,(1 + \psi_{r+1}) = \Sigma P \delta'_{h,r} + H_r \cdot \delta'_r \\ &\frac{\Delta_{l,r}}{h_r - a_r} = \Sigma P \delta_{a,r} + M_{a,r} \cdot \alpha_{a,r} + M_{b,r} \cdot \beta_r \\ &\frac{\Delta_{l,r+1}}{h_{r+1} - a_{r+1}} = \Sigma P \delta_{b,r} + M_{b,r} \cdot \alpha_{b,r} + M_{a,r} \cdot \beta_r \end{aligned}\right\} (5)$$

worin die Abkürzungen

$$\psi_r = \frac{s_r}{h_r - a_r} \quad , \quad \psi_{r+1} = \frac{s_r}{h_{r+1} - a_{r+1}} \quad . \; . \quad (6)$$

Mit Hilfe dieser neuen Elastizitätsgleichungen (Gl. 5) sind die durchlaufenden Gewölbe auf elastischen Pfeilern zu berechnen. Man kann die drei Gleichungen für jede Oeffnung anschreiben und die jeweiligen Unbekannten (H, M_a und M_b) ermitteln. Es empfiehlt sich jedoch stets der Rückschluss der Unbekannten für das Gewölbe mit starren Pfeilern. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \overline{H_r} + \Delta H_r \\ M_{a,r} &= \overline{M_{a,r}} + \Delta M_{a,r} \\ M_{b,r} &= \overline{M_{b,r}} + \Delta M_{b,r} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$\overline{H_r}$, $\overline{M_{a,r}}$, $\overline{M_{b,r}}$ sind die Unbekannten bei starren Kämpfern, ΔH_r, $\Delta M_{a,r}$, $\Delta M_{b,r}$ entsprechen dem Einfluss der Pfeilerelastizität.

[1]) Das Verhältnis von $M : H$ ist mit ${}^1/_2 : 1$ für unsere Untersuchung äusserst ungünstig festgesetzt. Es hängt in erster Linie vom Pfeilverhältnis ab und ist umso grösser, je grösser $f : l$ ist.

[2]) Siehe das Werk des Verfassers „Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger", Verlag von W. Ernst & Sohn, Berlin, Seite 39.

Nun gehen die Gleichungen 5 über in

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_r \cdot (\overline{H_{r-1}} + \Delta H_{r-1} - \overline{H_r} - \Delta H_r) \cdot (1 + \psi_r) + \\ &+ \lambda_{r+1} \cdot (\overline{H_{r+1}} + \Delta H_{r+1} - \overline{H_r} - \Delta H_r)\,(1 + \psi_{r+1}) = \\ &\qquad = \Sigma P \delta_{h,r} + (\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot \delta'_r \\ &\frac{\Delta_{l,r}}{h_r - a_r} = \Sigma P \delta_{a,r} + (\overline{M_{a,r}} + \Delta M_{a,r}) \cdot \alpha_{a,r} + \\ &\qquad + (\overline{M_{b,r}} + \Delta M_{b,r}) \cdot \beta_r \\ &\frac{\Delta_{l,r+1}}{h_{r+1} - a_{r+1}} = \Sigma P \delta_{b,r} + (\overline{M_{b,r}} + \Delta M_{b,r}) \cdot \alpha_{b,r} + \\ &\qquad + (\overline{M_{a,r}} + \Delta M_{a,r}) \cdot \beta_r \end{aligned}\right\} (8)$$

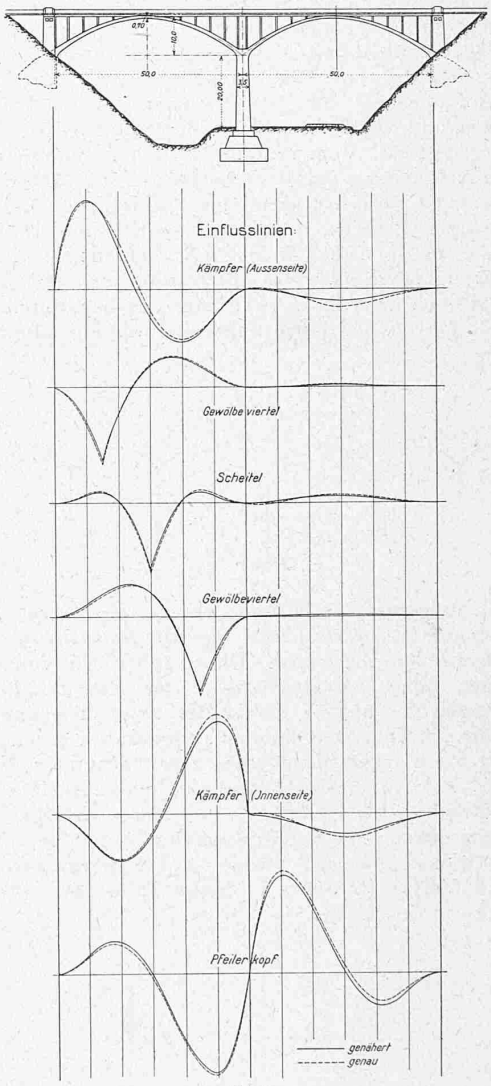


Abb. 5

Die beiden letzten Beziehungen sind, unter Beachtung dass[1])

$$0 = \Sigma P \delta_{a,r} + \overline{M_{a,r}} \cdot \alpha_{a,r} + \overline{M_{b,r}} \cdot \beta_r \,, \\ 0 = \Sigma P \delta_{b,r} + \overline{M_{b,r}} \cdot \alpha_{b,r} + \overline{M_{a,r}} \cdot \beta_r \,,$$

in die Form zu bringen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta_{l,r}}{h_r - a_r} &= \Delta M_{a,r} \cdot \alpha_{a,r} + \Delta M_{b,r} \cdot \beta_r \\ \frac{\Delta_{l,r+1}}{h_{r+1} - a_{r+1}} &= \Delta M_{b,r} \cdot \alpha_{b,r} + \Delta M_{a,r} \cdot \beta_r \end{aligned}\right\} (9)$$

Mit Vorstehendem haben wir die Aufgabe, die durchlaufenden Brückengewölbe auf elastischen Pfeilern nach einem praktisch durchführbaren Verfahren zu berechnen, gelöst. Es bleibt nun nur noch übrig, die erhaltenen Gleichungen in eine zum unmittelbaren Gebrauch geeignete Form

[1]) Vgl. «Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke . . .» S. 143, Gl. 8. (Es ist $L_a = L_b = 0$).

zu bringen. Zuvor soll jedoch der Genauigkeitsgrad des Verfahrens an Hand eines Beispiels eingehend geprüft und der Beurteilung des Lesers zugängig gemacht werden.

Die Abbildung 5 auf Seite 108 stellt ein Gewölbe mit zwei Oeffnungen dar, das starre Endwiderlager und einen elastischen Mittelpfeiler besitzt. Die Abmessungen sind aus der Abbildung ersichtlich.

Für dieses Gewölbe wurden die Einflusslinien für die Scheitel- und Kämpferquerschnitte einmal genau und zum andern nach dem vorbeschriebenen Verfahren genähert berechnet. Die gestrichelt dargestellten Einflusslinien sind die genauen und die ausgezogenen die näherungsweisen (siehe Abbildung 5).

Man sieht, dass der bei dem vorstehenden Verfahren unterlaufene Fehler keine grosse Rolle spielt und ohne Bedenken als zulässig erachtet werden kann. Der geringste Unterschied ergibt sich bei den Einflusslinien für den Scheitel und die Gewölbeviertel. Die etwas beträchtlichere Abweichung der genauen und der näherungsweisen Kurven für die Kämpfer geht bei den Einflusslinien für nur wenig von den Kämpfern entfernte Schnitte sofort merklich zurück.

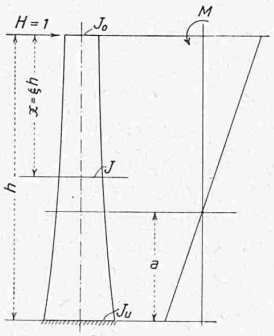


Abb. 6

Die Genauigkeit des Verfahrens ist umso grösser, je steifer die Pfeiler im Verhältnis zu den Gewölben sind und je kleiner das Pfeilverhältnis ist.

3. Die Pfeilerelastizität.

Die Verschiebung infolge $H = 1$ ist

$$\lambda = \int x^2\, dw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Hierbei ist der Pfeiler am Fusse als fest eingespannt gedacht. Bei beliebig veränderlichem Querschnitt ist λ_r als Summe zu berechnen

$$\lambda = \Sigma\, x^2\, w\,, \text{ wo } w = \frac{\Delta x}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Regel ist jedoch eine stete Querschnittzunahme vom Pfeilerkopfe nach dem Fuss zu, so wie Abb. 6 zeigt. Für diese Art Querschnittzunahme gilt das Gesetz

$$\frac{J_o}{J} = 1 - (1 - n)\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo

$$n = \frac{J_o}{J_u} = \frac{\text{Trägheitsmom. am Pf.-Kopf}}{\text{Trägheitsmom. am Pf.-Fuss}} \quad . \quad . \quad (13)$$

Hiernach ist

$$dw = \frac{dx}{EJ} = h \cdot [1 - (1 - n)\,\xi]\, d\xi$$

und folglich

$$\lambda = \frac{h^3}{EJ_o} \cdot \int_0^1 [1 - (1 - n)\,\xi]\, \xi^2\, d\xi$$

Man erhält

$$\lambda = \frac{h^3 \cdot (1 + 3n)}{12 \cdot EJ_o} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment ($n = 1$) ist

$$\lambda = \frac{h^3}{3 \cdot EJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ausser diesen elastischen Grössen muss man noch den Abstand des Festpunktes vom Pfeilerfuss, der genau wie beim eingespannten Balken zu ermitteln ist, kennen.

Es ist

$$a = h \cdot \frac{\int \xi\xi'\, dw}{\int \xi\, dw}\,,$$

$$\int \xi\xi'\, dw = \frac{1}{EJ_o} \cdot \int_0^1 [1 - (1 - n)\,\xi]\,(\xi - \xi^2)\, d\xi = \frac{1 + n}{12 \cdot EJ_o}$$

$$\int \xi\, dw = \frac{1}{EJ_o} \cdot \int_0^1 [1 - (1 - n)\,\xi]\, \xi\, d\xi = \frac{1 + 2n}{6 \cdot EJ_o}$$

Somit

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + n}{1 + 2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment ($n = 1$) ergibt sich der bekannte Wert $a = {}^1/_3\, h$; wenn sich der Pfeiler nach oben zu verjüngt, ist a stets etwas grösser.

4. Die Elastizität der Gewölbe.

Meist liegt die Angriffslinie der Bogenkraft bezw. deren Abstand vom Scheitel (y_s, s. Abb. 7) von der Berechnung des Gewölbes für den fest eingespannten Fall her bereits fest. Desgleichen sind auch die zur Feststellung des Einflusses der Pfeilerelastizität erforderlichen elastischen Grössen δ' und β, ebenfalls von der Berechnung des fest eingespannten Gewölbes her, häufig bekannt. a_a und a_b sind beim symmetrischen Gewölbe unter sich gleich und brauchen nicht besonders ermittelt zu werden.

Für δ' und β gelten die Gleichungen

$$\delta' = \int y^2\, dw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\beta = \int \xi\xi'\, dw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Bei beliebig veränderlichem Querschnitt und beliebiger Gewölbeachse — β ist von der Gewölbeaxe unabhängig — sind diese Integrale als Summen auszurechnen. Es ist

$$\delta' = \Sigma\, y^2\, w\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\beta = \Sigma\, \xi\xi'\, w\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

w ist durch Gleichung (11) bestimmt.

Nimmt der Querschnitt vom Scheitel nach den Kämpfern hin stetig zu, entsprechend dem vom Verfasser in dem Werk „Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogenträger", Seite 173 aufgestellten Gesetz

$$\frac{J_s}{J \cdot \cos\varphi} = 1 - (1 - n)\,\xi\,, \quad . \quad . \quad (21)$$

wo

$$n = \frac{J_s}{J_k \cdot \cos\varphi_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und die Veränderliche (ξ) sich auf die Lotrechte durch die Gewölbemitte bezieht (die Bedeutung der übrigen angewandten Bezeichnungen ersieht man aus Abb. 7), so kann δ' mit Hilfe der folgenden Tabelle berechnet werden. Dabei ist die Form der Gewölbeaxe durch y_v, die Ordinate der Gewölbeaxe im Gewölbeviertel (inbezug auf die Scheitelwagrechte) bestimmt[1]).

$y_v : f$	0,25	0,24	0,22	0,20	0,18	0,16	
für $n = 1$ ist $\delta' =$	0,0889	0,0876	0,0850	0,0827	0,0805	0,0785	$\cdot \frac{f^2 l}{EJ_s}$
„ $n = 0{,}4$ „ $\delta' =$	0,0520	0,0509	0,0488	0,0469	0,0450	0,0433	
„ $n = 0{,}25$ „ $\delta =$	0,0410	0,0400	0,0380	0,0363	0,0347	0,0331	

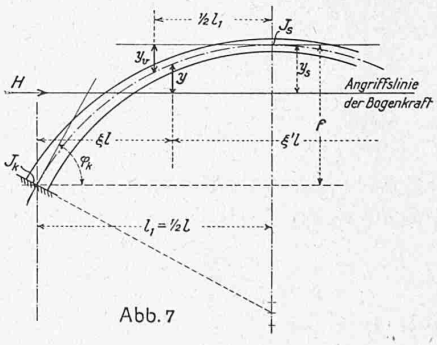


Abb. 7

Die Lage der Bogenkraft ist mit grosser Genauigkeit nach der folgenden Formel zu bestimmen (s. „Neuere Methoden", S. 177):

$$y_s = \frac{f}{90 \cdot (1 + n)} \cdot \left[3 \cdot \left(16 \cdot \frac{y_v}{f} + 1\right) + 5n \cdot \left(16 \cdot \frac{y_v}{f} + 5\right)\right] \quad (23)$$

Genauere Werte erhält man aus den Tabellen in dem vorgenannten Werk.

β berechnet sich nach

$$\beta = l \cdot \frac{5 + 3n}{48 \cdot EJ_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

[1]) Ausführlicher sind die Tabellen in dem Werk «Neuere Methoden ...», Seite 198, 204, 210 usw. Dort hat N die Bedeutung von δ'.

Bei konstantem Trägheitsmoment (d. h. für $J \cdot \cos \varphi =$ konstant) ist

$$\beta = \frac{l}{6 \cdot E J_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24a)$$

Die Festpunktabstände des Gewölbes für den fest eingespannten Fall, die wie sich noch zeigt zur Durchführung der Berechnung erforderlich sind, lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\int \xi \xi' \, dw = \beta \text{ (s. Gl. 24)}$$

$$= l \cdot \frac{5 + 3n}{48 \cdot E J_s},$$

$$\int \xi \, dw = \frac{}{2} \cdot \int dw = l \cdot \frac{1 + n}{4 \cdot E J_s};$$

somit

$$a \text{ oder } b = l \cdot \frac{\int \xi \xi' \, dw}{\int \xi \, dw} = \frac{l}{12} \cdot \frac{5 + 3n}{1 + n} \quad (25)$$

Für $n = 1$ ist

$$a \text{ oder } b = \frac{l}{3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

5. Ermittlung des Einflusses der Pfeilerelastizität.

a) Einfluss der Verschiebung der Pfeilerköpfe. Unter Beachtung, dass für das Gewölbe mit starren Kämpfern (s. „Neuere Methoden", S. 180)

$$\overline{H_r} = - \frac{\Sigma P \delta_{h,t}}{\delta'_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

kann die erste der Gl. (8) in die Form gebracht werden

$$\lambda_r \cdot (\overline{H_{r-1}} + \Delta H_{r-1}) \cdot (1 + \psi_r) - (\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot [\delta'_r + \lambda_r \cdot (1 + \psi_r) + \lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1})] + \lambda_{r+1} \cdot (\overline{H_{r+1}} + \Delta H_{r-1}) \cdot (1 + \psi_{r+1}) + \overline{H_r} \cdot \delta'_r = 0 \quad (28)$$

Begreiflicherweise gilt diese Gleichung auch dann noch, wenn die Oeffnungen l_r, l_{r-1}, l_{r+1} unbelastet sind, H_r, H_{r-1}, H_{r+1} also verschwinden. Man hat dann

$$\lambda_r \cdot \Delta H_{r-1} \cdot (1 + \psi_r) - \Delta H_r \cdot [\delta'_r + \lambda_r \cdot (1 + \psi_r) + \lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1})] + \lambda_{r+1} \cdot \Delta H_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1}) = 0 \quad (29)$$

Hiernach ist, indem man bei einer Endöffnung beginnt und die Gleichung der Reihe nach für die Anschlussöffnungen anschreibt, soweit es sich um unbelastete Oeffnungen handelt, das Verhältnis einer jeden Bogenkraft zur nächstfolgenden zu bestimmen.

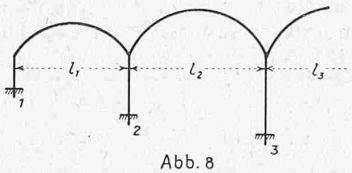


Abb. 8

Man erhält unter Bezug auf Abb. 8

$$0 - \Delta H_1 \cdot [\delta'_1 + \lambda_1 \cdot (1 + \psi_1) + \lambda_2 \cdot (1 + \psi_2)] + \Delta H_2 \cdot \lambda_2 \cdot (1 + \psi_2) = 0;$$

hieraus

$$\frac{\Delta H_1}{\Delta H_2} = k_{1,2} = \frac{\lambda_2 \cdot (1 + \psi_2)}{\delta'_1 + \lambda_1 \cdot (1 + \psi_1) + \lambda_2 \cdot (1 + \psi_2)} \quad (29a)$$

ferner

$$\Delta H_1 \cdot \lambda_2 \cdot (1 + \psi_2) - \Delta H_2 \cdot [\delta'_2 + \lambda_2 \cdot (1 + \psi_2) + \lambda_3 \cdot (1 + \psi_3)] + \Delta H_3 \cdot \lambda_3 \cdot (1 + \psi_3) = 0;$$

hieraus

$$\frac{\Delta H_2}{\Delta H_3} = k_{2,3} = \frac{\lambda_3 \cdot (1 + \psi_3)}{\delta'_2 + \lambda_2 \cdot (1 + \psi_2) \cdot (1 - k_{1,2}) + \lambda_3 \cdot (1 + \psi_3)} \quad (30)$$

$$\Delta H_2 \cdot \lambda_3 \cdot (1 + \psi_3) - \Delta H_3 \cdot [\delta'_3 + \lambda_3 \cdot (1 + \psi_3) + \lambda_4 \cdot (1 + \psi_4)] + \Delta H_4 \cdot \lambda_4 \cdot (1 + \psi_4) 0 = ;$$

hieraus

$$\frac{\Delta H_3}{\Delta H_4} = k_{3,4} = \frac{\lambda_4 \cdot (1 + \psi_4)}{\delta_3 + \lambda_3 \cdot (1 + \psi_3)(1 - k_{2,3}) + \lambda_4 \cdot (1 + \psi_4)} \quad (31)$$

Allgemein ist (s. Abb. 2)

$$\left.\begin{aligned} k_r &= \frac{\Delta H_{r-1}}{\Delta H_r} = \\ &= \frac{\lambda_r \cdot (1 + \psi_r)}{\delta'_{r-1} + \lambda_{r-1} \cdot (1 + \psi_{r-1}) \cdot (1 - k_{r-1}) + \lambda_r \cdot (1 + \psi_r)} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Indem man rechts beginnt und von Oeffnung zu Oeffnung nach links vorgeht, erhält man das Verhältnis einer jeden Bogenkraft zur nächstfolgenden sinngemäss wie vor. Allgemein bestimmt sich (s. Abb. 2)

$$\left.\begin{aligned} k_{r+1} &= \frac{\Delta H_{r+1}}{\Delta H_r} = \\ &= \frac{\lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1})}{\delta'_{r+1} + \lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1}) \cdot (1 - k_{r+2}) + \lambda_r \cdot (1 + \psi_r)} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Gleichung (32) setzt voraus, dass sich die belastete Oeffnung rechts von der Oeffnung l_r (s. Abb. 2) und Gleichung (33), dass sich die belastete Oeffnung links von der Oeffnung l_r befindet. Ist die Oeffnung l_r belastet, so haben k_r, k_{r+1} die Bedeutung

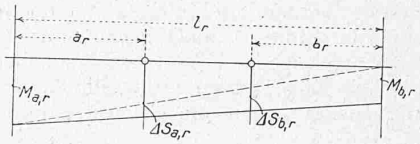


Abb. 9

$$\left.\begin{aligned} k_r &= \frac{\Delta \overline{H_{r-1}}}{H_r + \Delta H_r} \\ k_{r+1} &= \frac{\Delta \overline{H_{r+1}}}{H_r + \Delta H_r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

und sind nach den Gleichungen (32) und (33), also genau wie vorhin zu berechnen.

Man erhält, falls nur die Oeffnung l_r belastet ist, nach Gleichung 28 ($H_{r-1} = H_{r+1} = 0$)

$$\lambda_r \cdot \Delta H_{r-1} \cdot (1 + \psi_r) - (\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot [\delta'_r + \lambda_r \cdot (1 + \psi_r) + \lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1})] + \lambda_{r+1} \cdot \Delta H_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1}) + \overline{H_r} \cdot \delta'_r = 0$$

und gelangt durch Verbinden mit den Gleichungen (34) zu

$$\lambda_r \cdot k_r \cdot (\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot (1 + \psi_r) - (\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot [\delta'_r + \lambda_r \cdot (1 + \psi_r) + \lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1})] + \lambda_{r+1} \cdot k_{r+1} \cdot (\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot (1 + \psi_{r+1}) + \overline{H_r} \cdot \delta'_r = 0$$

oder

$$(\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot [\delta'_r + \lambda_r \cdot (1 + \psi_r) \cdot (1 - k_r) + \lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1}) \cdot (1 - k_{r+1})] - \overline{H_r} \cdot \delta'_r = 0$$

Hieraus folgt

$$\Delta H_r = - \overline{H_r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta'_r}{\varkappa_r}} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

wo

$$\varkappa_r = \lambda_r \cdot (1 + \psi_r) \cdot (1 - k_r) + \lambda_{r+1} \cdot (1 + \psi_{r+1}) \cdot (1 - k_{r+1}) \quad (36)$$

$\varkappa_r$ ist für jedes Gewölbe eine feste Grösse, desgleichen δ'_r. Der Beiwert von $\overline{H_r}$ (Gl. 35) ist mithin nur von den Abmessungen des Gewölbes abhängig und ändert sich mit der Belastung für ein und dasselbe Gewölbe nicht.

$\overline{H_r}$ ist für das fest eingespannte Gewölbe nach den bekannten Regeln zu bestimmen. Einfacher ist die Entnahme aus den Tabellen in dem Werk des Verfassers „Neuere Methoden . . .", die für alle in der Praxis vorkommenden Fälle ausreichen.

Die Zusatzbogenkraft ΔH_r erzeugt das Schnittmoment (Zusatzmoment)

$$\Delta M = - \Delta H \cdot y, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

wo y die Gewölbeordinate inbezug auf die Angriffslinie der Bogenkraft ist (s. Abb. 7). Ueber der Angriffslinie der Bogenkraft ist y positiv und unter der Angriffslinie negativ.

Das Verhältnis k ist in der Regel sehr klein, sodass die Zusatzbogenkraft (ΔH) von der belasteten Oeffnung aus nach links und nach rechts rasch abnimmt.

b) Einfluss der Verdrehung der Pfeilerköpfe. Um den Einfluss der Verdrehung der Pfeilerköpfe festzustellen, ist von der Gleichung 9 auszugehen.

Ist a_r der Festpunktabstand für den festeingespannten Fall (Gl. 25), so folgt, wenn man den allgemeinen Ausdruck dafür (vergl. „Neuere Methoden . . ." S. 2 ff.)

$$a_r = \frac{l_r \cdot \beta_r}{\alpha_{a,r} + \beta_r}$$

nach $\alpha_{a,r}$ auflöst

$$\alpha_{a,r} = \beta_r \cdot \frac{l_r - a_r}{a_r}$$

und mit der ersten der Gleichungen (9) verbindet:

$$\frac{\Delta_{l,r}}{h_r - a_r} = M_{a,r} \cdot \beta_r \cdot \frac{l_r - a_r}{a_r} + M_{b,r} \cdot \beta_r$$
$$= \frac{l_r}{a_r} \cdot \left[M_{a,r} \cdot \frac{l_r - a_r}{l_r} + M_{b,r} \cdot \frac{a_r}{l_r} \right] \cdot \beta_r$$

Sinngemäss ist

$$\frac{\Delta_{l,r+1}}{h_{r+1} - a_{r+1}} = \frac{l_r}{b_r} \cdot \left[M_{b,r} \cdot \frac{l_r - b_r}{l_r} + M_{a,r} \cdot \frac{b_r}{l_r} \right] \cdot \beta_r$$

Abb. 9 ergibt sofort, dass die eckigen Klammern dem Moment in den Festpunkten, $\Delta S_{a,r}$ und $\Delta S_{b,r}$, entsprechen, sodass einfach, wenn man an Stelle der eckigen Klammern $\Delta S_{a,r}$ und $\Delta S_{b,r}$ setzt und nach diesen Werten auflöst,

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_{a,r} &= \frac{a_r}{l_r} \cdot \frac{\Delta_{l,r}}{(h_r - a_r) \cdot \beta_r} \\ \Delta S_{b,r} &= \frac{b_r}{l_r} \cdot \frac{\Delta_{l,r+1}}{(h_{r+1} - a_{r+1}) \cdot \beta_r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (38)$$

Auf Grund der Gleichung (3) ist ($H_{r-1} = 0$)

$$\Delta_{l,r} = \lambda_r \cdot (\Delta H_{r-1} - \overline{H_r} - \Delta H_r)$$

und unter Bezug auf die Gleichungen (34) erhält man

$$\Delta_{l,r} = \lambda_r \cdot [(\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot k_r - \overline{H_r} - \Delta H_r]$$
$$= - \lambda_r \cdot (\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot (1 - k_r)$$

Der Ausdruck vor Gleichung (35) lautet bei Beachtung der Abkürzung (36)

$$(\overline{H_r} + \Delta H_r) \cdot (\delta'_r + \varkappa_r) - \overline{H_r} \cdot \delta'_r = 0$$

und gibt

$$\overline{H_r} + \Delta H_r = \overline{H_r} \cdot \frac{\delta'_r}{\delta'_r + \varkappa_r} ,$$

sodass

$$\Delta_{l,r} = - \overline{H_r} \cdot \lambda_r \cdot \frac{\delta'_r}{\delta'_r + \varkappa_r} \cdot (1 - k_r) .$$

Sinngemäss ist

$$\Delta_{l,r+1} = - \overline{H_r} \cdot \lambda_{r+1} \cdot \frac{\delta'_r}{\delta'_r + \varkappa_r} \cdot (1 - k_{r+1}) .$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (38) folgt

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_{a,r} &= - \overline{H_r} \cdot \frac{a_r}{l_r} \cdot \lambda_r \cdot \frac{\delta'_r}{\delta'_r + \varkappa_r} \cdot \frac{1 - k_r}{(h_r - a_r) \cdot \beta_r} \\ \Delta S_{b,r} &= - \overline{H_r} \cdot \frac{b_r}{l_r} \cdot \lambda_{r+1} \cdot \frac{\delta'_r}{\delta'_r + \varkappa_r} \cdot \frac{1 - k_{r+1}}{(h_{r+1} - a_{r+1}) \beta_r} \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

$\varkappa_r$ ist nach Gleichung (36) zu berechnen.

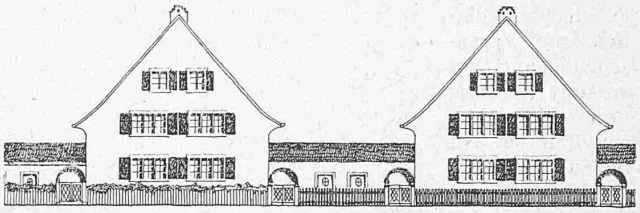
Die Beiwerte von $\overline{H_r}$ haben für jedes Gewölbe einen festen Wert, ebenso wie der Beiwert von $\overline{H_r}$ der Gleichung (35).

Der Einfluss der Verdrehung der Pfeilerköpfe ist bei weitem nicht so gross als der Einfluss der Verschiebung der Pfeilerköpfe. Näherungsweise kann man ihn vernachlässigen. In andern Fällen genügt es stets, nur die Verdrehung der beiden an die belastete Oeffnung angrenzenden Pfeiler zu berücksichtigen — der Einfluss der übrigen Verdrehungen verschwindet. Für die an das belastete Gewölbe angrenzenden Oeffnungen, also für die Oeffnungen l_{r-1} und l_{r+1} ist somit nur $\Delta S_{b,r-1}$ und $\Delta S_{a,r+1}$ zu bestimmen. ($\Delta S_{a,r-1}$ für die Oeffnung l_{r-1} und $\Delta S_{b,r+1}$ für die Oeffnung l_{r+1} sind gleich Null.) Dazu dienen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_{b,r-1} &= \overline{H_r} \cdot \frac{b_{r-1}}{l_{r-1}} \cdot \lambda_r \cdot \frac{\delta'_r}{\delta'_r + \varkappa_r} \cdot \frac{1 - k_r}{(h_r - a_r) \cdot \beta_{r-1}} \\ \Delta S_{a,r+1} &= \overline{H_r} \cdot \frac{a_{r+1}}{l_{r+1}} \cdot \lambda_{r+1} \cdot \frac{\delta'_r}{\delta'_r + \varkappa_r} \cdot \frac{1 - k_{r+1}}{(h_{r+1} - a_{r+1}) \beta_{r+1}} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Die Erläuterung der hergeleiteten Gleichungen geschieht durch das Rechnungsbeispiel in nächster Nummer.

(Schluss folgt.)



TYPENHAUS DER WOHNKOLONIE.

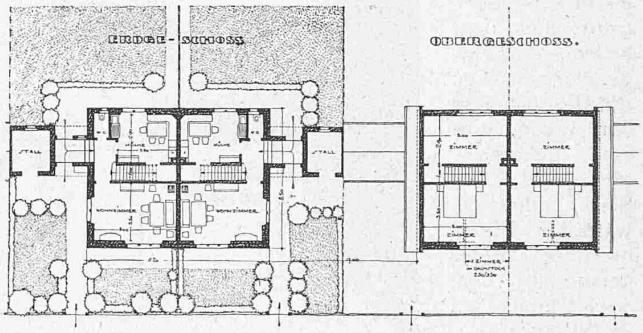


Abb. 31 und 32. Doppel-Einfamilienhaus mit Stall. — 1 : 400.

Schweiz. Werkbund-Ausstellung in Zürich.

Die Arbeiterwohnung.

(Fortsetzung von Seite 70.)

Einen weitern Beitrag zu den Vorschlägen für Kleinhaus-Typen brachten die Architekten Müller & Freytag in Thalwil; er ist dargestellt nach ihren Originalzeichnungen in Abb. 30 bis 32. Auch hier wird landwirtschaftliche Eigenproduktion begünstigt, wenn auch nicht in dem Mass wie beim Vorschlag von Architekt M. Haefeli (vergl. Seiten 68 bis 70). Auch hier sind im Anschluss an das Haus Kleinviehställe angeordnet, doch sind sie nicht hinter, sondern zwischen den Häusern als niedrige Verbindungsbauten zur Schliessung der Hauslücken von 9 *m* gedacht, wie dies von den Kruppschen Zechenkolonien Dahlhauserheide und Emscher Lippe her bekannt ist. Ebenfalls wie dort ist auch dieser Typ ein nach der Firstrichtung geteiltes Doppelhaus von je zwei Räumen pro Geschoss und Haus; die Einteilung ist den Grundrissen zu entnehmen.

Ein Vorteil dieser Anordnung liegt in der grössern Masse des ordentlich kubischen Hauskörpers, ohne dass der Grundsatz des Einfamilienhauses mit eigenem Eingang aufgegeben werden muss. Es besteht auch die Möglichkeit, je nach Bedarf das Dachgeschoss beiden oder nur dem einen Haus zuzuteilen; in diesem Fall kann eine der beiden Kehlboden-Treppen erübrigt werden.

Das Wesentliche derartiger Kolonien ist die *strenge Typisierung:* einheitliche Türen, Fenster, Läden usw. ermöglichen fabrikmässige und damit billigere Herstellung. (Forts. folgt.)

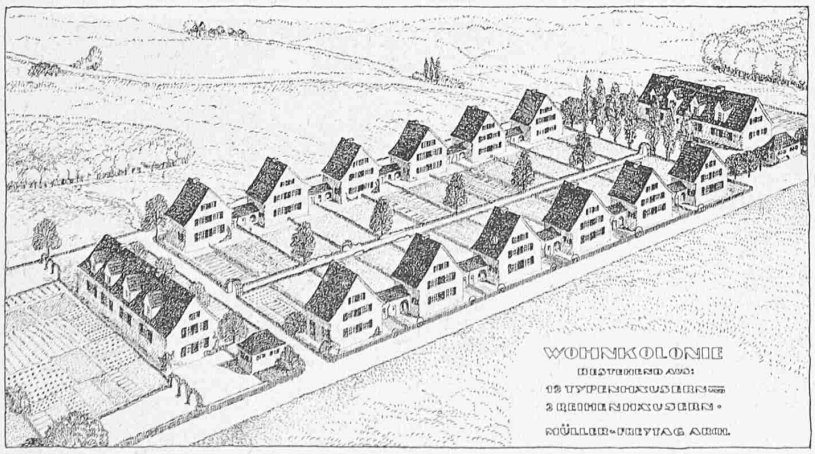


Abb. 30. Kleinhaus-Typen-Kolonie von Müller & Freytag, Arch. in Thalwil.