Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 71/72 (1918)
Heft: 11

Artikel: Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen periodisch veränderlicher Elastizität
Autor: Meissner, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34811

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. — Das Wohlfahrtshaus der Vereinigten Drahtwerke A.-G. in Biel. — Zum Wettbewerb für eine Strassenbrücke über die Reuss bei Gisikon. — Die Durchflussverhältnisse der Reuss bei Gisikon. — Ueber die Regenmengen in der Schweiz. — Miscellanea: Versuche mit Speisewasser-Vorwärmern und Speisepumpen für Lokomotiven. Das Wolfram. Ein Quecksilberdampf-Gleichrichter mit 800 Volt Spannungen. Leuchtgas-Schäden an Strassenbäumen. Elektrifizierung der italienischen Staatsbahnen. Die Nickelerzgewinnung. Deutsche Beleuchtungstechnische Gesellschaft. Schweizerischer Elektrotechnischer Verein. — Nekrologie: Carlo Vanbianchi. G. Cuénod. — Konkurrenzen: Gymnasium im St. Jean-Quartier in Genf. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizer. Ingenieur- und Architekten-Verein. G. e. P.: Stellenvermittlung.
Tafeln 7 und 8: Das Wohlfahrtshaus der Vereinigten Drahtwerke A.-G. Biel.

Band 72. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 11.**

Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität.

Von Prof. Dr. *E. Meissner* in Zürich-Zollikon.

Im Stangengetriebe elektrischer Lokomotiven treten bekanntlich bei gewissen Fahrgeschwindigkeiten Schüttel-Erscheinungen auf, die sich u. U. sehr unangenehm bemerkbar machen. Sie sind deshalb Gegenstand mehrerer technischer (z. T. noch im Erscheinen begriffener) Arbeiten geworden. Dabei zeigt es sich, dass mit der üblichen Schwingungs-Theorie nicht mehr auszukommen ist, und es soll Zweck dieser Zeilen sein, die neuen Begriffe, die dort gelten, auseinander zu setzen.

Man denke sich bei einer elektrischen Lokomotive die mit dem elastischen Getriebe verbundene Ankermasse des Motors um die Motorwelle bei festgestelltem Getriebe elastische Schwingungen ausführend. Je nach der Stellung des Getriebes wird die Schwingungszahl eine andere sein, weil die Stärke der Elastizität (die Nachgiebigkeit) von jener Stellung abhängt. Was geschieht nun aber, wenn das Getriebe nicht feststeht, sondern etwa gleichförmig umläuft? Von einer eigentlichen Schwingungszahl kann jetzt offenbar gar nicht mehr gesprochen werden, ja der Schwingungsvorgang wird gar nicht mehr streng periodisch sein. Bleiben überhaupt die auftretenden Schwingungen in endlichen Grenzen, und wie verhält sich ein solches System gegenüber störenden Kräften (Erzwungene Schwingungen, Resonanz)?

Dies sind die Fragen, die im folgenden am einfachsten Fall eines ungedämpften Systems mit einem Freiheitsgrad erörtert werden sollen.[1])

1. *Die Differential-Gleichung.*

An Stelle der gewöhnlichen Gleichung der erzwungenen Schwingung

$$y'' + k^2 y = P \quad [2])$$

(k^2 = Elastizitätstärke, P = störende Kraft) tritt die folgende:

$$y'' + p(t) \cdot y = P(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Es ist die Konstante k^2 durch die periodisch veränderliche, „pulsierende" Elastizitätstärke $p(t)$ ersetzt, für welche

$$p(t+T) = p(t) \qquad p(t) > 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gilt. T soll *Pulsationsperiode* der elastischen Kraft heissen. $P(t)$ ist auch hier die störende Kraft, von der wir annehmen, dass sie ebenfalls die Periode T habe.

$$P(t+T) = P(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Ist $P = 0$, so sprechen wir von *Eigenschwingungen* des Systems. Für sie gilt also

$$y'' + p(t)\, y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2. *Struktur der Lösung.*

Das Integral von (1) setzt sich, wie man weiss, aus einer Partikularlösung von (1), $y = E(t)$, der sog. *erzwungenen Schwingung* und aus der allgemeinen Lösung von (3), der *Eigenschwingung* additiv zusammen.

Es seien jetzt $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ die zwei Lösungen von (3), welche die Anfangsbedingungen

$$\eta_1(0) = 1 \quad \eta'_1(0) = 0 \quad \eta_2(0) = 0 \quad \eta'_2(0) = 1 \qquad (4)$$

erfüllen. Das allgemeine Integral von (3) ist

$$y = a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wobei a_1 a_2 Integrationskonstanten sind mit der mechanischen Bedeutung

$$a_1 = y_1(0) \qquad a_2 = y'_1(0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

[1]) Das vorliegende mathematische Problem ist zunächst in der sog. Störungstheorie der Planetenbewegungen aufgetreten. Die hier gegebene Darstellung sucht sich technischen Bedürfnissen anzupassen.

[2]) Akzente bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

Ist $e(t)$ irgend eine Lösung von (1), so ist die allgemeine Lösung von der Form

$$y = e(t) + a_1 \eta_1(t) + a_2 \eta_2(t) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wenn man in den Gleichungen (1), (3) überall statt t nun $t+T$ setzt, so ändern sie sich wegen (2), (2') nicht. Es sind daher auch $\eta_1(t+T)$ und $\eta_2(t+T)$ Integrale von (3), also von der Form (5). Somit gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(t+T) &= a\,\eta_1(t) + b\,\eta_2(t) \\ \eta_2(t+T) &= c\,\eta_1(t) + d\,\eta_2(t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wobei

$$a = \eta_1(T) \quad b = \eta'_1(T) \quad c = \eta_2(T) \quad d = \eta'_2(T) \qquad (7')$$

Die vier Konstanten a, b, c, d können angegeben werden, sobald man die Integrale η_1, η_2 im Intervall $0 \leq t \leq T$ ermittelt hat. Das ist durch Annäherung, z. B. mittels eines graphischen Verfahrens[1]) stets möglich. Alsdann lehren die Formeln (7) aus den Werten der Lösung im Intervall $(0\,..\,T)$ den Verlauf im folgenden Intervall $(T\,..\,2\,T)$ berechnen, und da sich das Verfahren beliebig oft wiederholen lässt, so wird es grundsätzlich möglich, den Verlauf der Lösung ganz zu überblicken. Bevor dies ausgeführt wird, erledigen wir

die erzwungene Schwingung

durch folgenden Satz:

Ist $\frac{a+d}{2} \neq 1$, *so existiert stets eine rein periodische erzwungene Schwingung mit der Periode T der Pulsation.*

In der Form (6) wird freilich $e(t)$ nicht gerade diese Lösung sein. Wir suchen durch Verfügen über a_1 und a_2 in

$$E(t) = e(t) + a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2$$

$E(t)$ periodisch zu machen. Dies ist schon der Fall, wenn nur

$$E(T) = E(0) \quad E'(T) = E'(0) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

gemacht wird, weil dann aus Gleichung (1) und deren Ableitungen folgt, dass auch alle höhern Ableitungen von E in $t = 0, T$ übereinstimmen. Aber

$$E(t+T) = e(t+T) + a_1 \eta_1(t+T) + a_2 \eta_2(t+T)$$

somit

$$\begin{aligned} E(T) &= e(T) + a_1 a + a_2 b \\ E'(T) &= e'(T) + a_1 c + a_2 d \end{aligned}$$

Bedingung (8) erfordert

$$\begin{aligned} -e(T) + e(0) &= a_1(a-1) + a_2 b \\ -e'(T) + e'(0) &= a_1 c + a_2(d-1) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben eindeutig

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\Delta}\left\{(d-1)\left[e(0) - e(T)\right] - b\left[e'(0) - e'(T)\right]\right\} \\ a_2 &= \frac{1}{\Delta}\left\{-c\left[e(0) - e(T)\right] + (a-1)\left[e'(0) - e'(T)\right]\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\Delta = (a-1)(d-1) - bc$$

sobald nur $\Delta \neq 0$ ausfällt. Nun folgt aus

$$\left.\begin{aligned} \eta_1'' + p\,\eta_1 &= 0 \\ \eta_2'' + p\,\eta_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ oder } \eta_1\,\eta_2'' - \eta_2\,\eta_1'' = 0$$

und für $t = 0, T$

$$\eta_1\,\eta_2' - \eta_2\,\eta_1' = 1 = \eta_1(T)\,\eta_2'(T) - \eta_2(T)\,\eta_1'(T) = ad - bc \qquad (10)$$

daher ist

$$\Delta = (a-1)(d-1) - bc = 2 - (a+d)$$

und es ist $\Delta \neq 0$ wenn

$$\frac{a+d}{2} \neq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

ausfällt.

Die so gefundene Schwingung $E(t)$ bleibt, weil periodisch, in endlichen Schranken. Ob dies auch für den Schwingungsvorgang (1) der Fall ist, wird davon abhängen, ob es für die zu E hinzutretende Eigenschwingung zutrifft.

[1]) Vergl. hierüber des Verfassers Aufsatz: Ueber graph. Integration. Diese Zeitschrift Bd. LXII, Nr. 15/16 (11./18. Oktober 1913).

Immerhin lässt sich einsehen, dass wegen des Nenners Δ in (9) die erzwungene Schwingung $E(t)$ beträchtlich gross wird, wenn $\frac{a+d}{2}$ in die Nähe von 1 rückt. Für $\frac{a+d}{2} = 1$ tritt der *Fall der Resonanz* ein, ganz analog wie bei der gewöhnlichen Resonanztheorie.

Die Eigenschwingung.

Sie ist bei konstanter Elastizitätstärke rein periodisch. Ganz anders gestalten sich aber hier die Verhältnisse. Da die Schwingungen jetzt in einem zeitlich veränderlichen Feld erfolgen, ist die Möglichkeit da, dass sie mit wachsender Zeit ins Unendliche zunehmen, gerade wie im bekannten Fall der Resonanz es die erzwungene Schwingung tut. Ist das der Fall, so sollen sie *instabil* heissen, wenn sie sich stets in endlichen Schranken halten, sollen sie *stabil* genannt werden. Welches von beiden der Fall ist, wird von den Grössen (7') abhängen, die nach (7) den Verlauf der Schwingungen für spätere Zeiten bestimmen.

Die Normalintegrale.

Wir suchen jetzt eine Eigenschwingung $N(t)$, die nach Ablauf einer Pulsation T sich bis auf einen multiplikativen Faktor σ reproduziert, also der Forderung

$$N(t+T) = \sigma N(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

genügt. Wie jede Lösung von (3) hat sie die Form

$$N(t) = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2$$

Es ist

$$N(t+T) = \alpha_1 \eta_1 (t+T) + \alpha_2 \eta_2 (t+T)$$

und wegen (7)

$$N(t+T) = \alpha_1 (a \eta_1 + b \eta_2) + \alpha_2 (c \eta_1 + d \eta_2)$$

Die Forderung (11) schreibt sich

$$a\,a + \alpha_2 c = \sigma \alpha_1$$
$$\alpha_1 b + \alpha_2 d = \sigma \alpha_2$$

hieraus

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{c}{a-\sigma} = -\frac{(d-\sigma)}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und mit Rücksicht auf (10)

$$\sigma^2 - \sigma(a+d) + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Wurzeln $\sigma_1 \sigma_2$ dieser Gleichung sollen die *Multiplikatoren der Eigenschwingung (3)* heissen. Für jedes der σ erhält man aus (12) das Verhältnis $\alpha_1 : \alpha_2$[1] und damit das zugehörige Normalintegral $N_1(t)$ resp. $N_2(t)$, das natürlich nur bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmt ist. Es ist nun

$$N_1(t+T) = \sigma_1 N_1(t) \quad N_2(t+T) = \sigma_2 N_2(t) \quad (14)$$

und das allgemeine Integral von (3) wird jetzt zweckmässig in der Form

$$y = \gamma_1 N_1 + \gamma_2 N_2 \quad (\gamma_1 \gamma_2 = \text{Integr. Kraft})$$

dargestellt.

1. Fall. Reelle Multiplikatoren.

Da nach (13)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - 1}$$

so ist dann

$$\left|\frac{a+d}{2}\right| > 1.$$

Wegen $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ ist von den Wurzeln eine, z. B. σ_1 absolut grösser, die andere σ_2 absolut kleiner als 1. Weil ferner

$$N_1(t+nT) = \sigma_1^n N_1(t) \quad N_2(t+nT) = \sigma_2^n N_2(t)$$
$$(n = \text{ganze Zahl})$$

so wächst N_1 ins Unendliche an, und zwar um so rascher, je grösser $|\sigma_1|$ ist; dagegen geht N_2 nach Null.

Für reelle Multiplikatoren ist somit die allgemeine Eigenschwingung instabil. $|\sigma_1|$ ist Mass der Instabilität. Praktisch hat dies Schüttelerscheinungen zur Folge.

2. Fall. Komplexe Multiplikatoren.

$\left|\frac{a+d}{2}\right| < 1$. Man setze

$$\frac{a+d}{2} = \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wo φ reell ist. Es wird $\sigma_1 = e^{i\varphi}$ $\sigma_2 = e^{-i\varphi}$, N_1 und N_2 werden konjugent komplex, sodass

$N_1(t+nT) = e^{in\varphi} N_1(t)$ $\quad N_2(t+nT) = e^{-in\varphi} N_2(t)$.

Setzt man

$$N_1 = \varphi_1 + i\varphi_2 \qquad N_2 = \varphi_1 - i\varphi_2$$

wo $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ reell sind, so sind auch φ_1, φ_2 Integrale von (3) und es ist

$$\varphi_1(t+nT) = \cos n\varphi \cdot \varphi_1(t) - \sin n\varphi \cdot \varphi_2(t)$$
$$\varphi_2(t+nT) = \sin n\varphi \cdot \varphi_1(t) + \cos n\varphi \cdot \varphi_2(t)$$

Deutet man (φ_1, φ_2) resp. $\varphi_1(t+nT)$, $\varphi_2(t+nT)$ als Koordinaten zweier Punkte P, P_n in der Ebene, so entsteht P_n aus P, indem man die Ebene um den Anfangspunkt herum um den Winkel $n\varphi$ dreht. Die zwei Integrale φ_1, φ_2 und damit die allgemeine Eigenschwingung (3) bleiben sonach innerhalb endlicher Schranken. *Die Eigenschwingung ist bei komplexen Multiplikatoren stabil.*

Aber sie ist im allgemeinen *keineswegs periodisch.* Eine Periode hat sie nur dann, wenn φ und 2π sich verhalten, wie zwei ganze (teilerfremde) Zahlen p und q, $\left(\varphi = 2\pi\frac{p}{q}\right)$. In der Tat fallen dann für $n = q$ die Punkte P und P_n zusammen und es sind beide Integrale φ_1, φ_2 also auch das allgemeine Integral von (3) periodisch. Jedoch ist die Periode T^x nicht gleich T, sondern gleich dem q-fachen der Pulsationsperiode.

3. Der Grenzfall $\left|\frac{a+d}{2}\right| = 1$.

Er vermittelt den Uebergang zwischen reellen und komplexen Multiplikatoren, also zwischen instabilen und stabilen Schwingungen.

Die zwei Wurzeln σ von (13) fallen zusammen, ebenso die in (14) angegebenen Lösungen.

Für $\frac{a+d}{2} = +1$ ist $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ $\quad N(t+T) = N(t)$

Für $\frac{a+d}{2} = -1$ ist $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$ $\quad N(t+T) = -N(t)$

also $N(t+2T) = N(t)$.

Es existiert im Grenzfall also eine periodische Eigenschwingung mit der Periode T der Pulsation oder eine solche von der doppelten Periode, die nach Ablauf der Zeit T das Zeichen wechselt [halbperiodische Lösung].

Umgekehrt kann aus dem Bestehen solcher Lösungen auch gefolgert werden, dass der Grenzfall vorliegt.[1])

Das Resonanzproblem.

Es ist jetzt die Stabilität der Eigenschwingung in ihrer Abhängigkeit von der Pulsationszeit T zu untersuchen.[2])

Wir führen die neue Veränderliche

$$\tau = t\,\frac{2\pi}{T}$$

ein; ändert sich t um T, so ändert sich τ um 2π. Setzen wir

$$\frac{p(t)}{4\pi^2} = q(\tau)$$

so bedeutet $q(\tau)$ eine periodische Funktion mit der Periode 2π.

$$q(\tau + 2\pi) = q(\tau)$$

und mit

$$\lambda = T^2 > 0$$

geht die Gleichung (3) in folgende über

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \lambda\, q(\tau) \cdot y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^*)$$

Das Resonanzproblem lautet jetzt:

Für welche (positiven) Werte von λ sind die Integrale von (3) instabil?*

Die Gesamtheit dieser Werte λ soll der *Resonanz-Bereich* heissen.

In (3*) ist an Stelle von p nun λq getreten. Infolgedessen hängen die Grössen (7') alle von λ ab, und es ist

[1]) Eine Ausnahme tritt ein, wenn $a = d = \sigma$, $b = c = 0$, wo α_1 und α_2 ganz willkürlich sind. Dann ist aber nach (13) $\sigma = \pm 1$ und es liegt der später erörterte Grenzfall $\left|\frac{a+d}{2}\right| = 1$ vor.

[1]) Im Grenzfall ist die zweite Lösung instabil, ausser wenn der Fall $a = d = \pm 1$, $b = c = 0$ vorliegt.

[2]) Im Fall der elektrischen Lokomotiven ist T meist $^1/_4$ der Umlaufzeit des Getriebes; es wird also jetzt diese letztere variiert.

also auch $\frac{a+d}{2} = J(\lambda)$ eine Funktion von λ. Der Resonanzbereich ist durch die Ungleichung

$$|y(\lambda)| > 1$$

bestimmt, die ja reelle Multiplikatoren zur Folge hat. Denkt man sich $J(\lambda)$ als Schaubild aufgezeichnet (Abb. 1), so wird der Resonanzbereich aus denjenigen Intervallen von λ bestehen, in denen die Kurve aus dem Streifen $J = \pm 1$ heraustritt. Das Resonanzgebiet besteht also nicht aus einzelnen Punkten (krit. Geschwindigkeiten), sondern aus einer Reihe von Intervallen (Schüttelgebieten). Nach vorigem findet man die Grenzen $\lambda = \lambda_i$ dieser Intervalle und damit den Resonanzbereich aus der Forderung, dass für $\lambda = \lambda_i$ eine periodische Eigenschwingung existieren soll mit der Pulsationsperiode $t = T$ resp. $\tau = 2\pi$ oder eine halbperiodische Eigenschwingung.

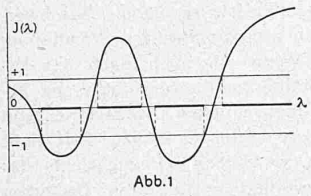


Abb. 1

Es stellt sich jetzt die Frage nach der Zahl der Werte λ_i. Die Theorie der sog. Integralgleichungen gibt darüber erschöpfenden Aufschluss.[1]) Danach hat Gleichung (3*) unter der hier zutreffenden Voraussetzung $q(\tau) > 0$ für eine *unendliche* Reihe positiver Grössen

$$\lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2^{(1)} < \lambda_3^{(1)} \leq \lambda_4^{(1)} < \quad \text{ad inf.} \quad . \quad . \quad (16')$$

periodische Lösungen von der Periode $\tau = 2\pi$, und für eine zweite ebensolche Reihe

$$\lambda_1^{(2)} \leq \lambda_2^{(2)} < \lambda_3^{(2)} \leq \lambda_4^{(2)} < \quad \text{ad inf.}$$

halb-periodische Lösungen von der Periode 4π. . (16'')

Der Resonanzbereich setzt sich also stets aus unendlich vielen Schüttelgebieten zusammen, von denen sich bei speziellen Verhältnissen einige (oder sogar alle) auf einzelne Punkte reduzieren können. *Nur für Pulsationsperioden ausserhalb dieser Intervalle sind diese Schwingungen stabil.*

Wie können nun die kritischen Randwerte (16', 16'') berechnet werden? Darüber gestattet der Raum hier nur eine Andeutung.

Man kann z. B. für die periodische Lösung in (3*) eine Fourier-Reihe ansetzen und bei linearen Gleichungen für ihre Koeffizienten weiter behandeln.

Wenn $q(\tau)$ in (3*), wie im Fall der elektrischen Lokomotiven, einen kleinen Parameter ε enthält, und in der Form

$$q(t) = q_0(t) + q_1(\tau) \cdot \varepsilon + q_2(\tau)\,\varepsilon^2 + \ldots$$

entwickelbar ist, so kann man auch für y und λ Potenzreihen in ε ansetzen und aus der Periodizitätsforderung die Koeffizienten in der Reihe für λ zu bestimmen suchen.

Ist endlich $q(\tau)$ unregelmässig verlaufend, oder sogar mit Sprüngen behaftet (Lagerspiel, Stichmassfehler), so kann man $q(\tau)$ angenähert durch eine stückweise konstante Funktion ersetzen, für welche (3*) elementar lösbar wird. Da es für den Techniker von Wert sein dürfte, an einem Beispiel die allgemein erörterten Verhältnisse entwickelt zu sehen, so soll dieser Fall hier noch behandelt werden.

Beispiel. $q(\tau)$ stückweise konstant.

Man teile das Pulsationsintervall 2π in n beliebige Abschnitte $\tau_1\,\tau_2 \ldots \tau_n$, so dass $\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = 2\pi$ wird, und setze fest, dass in der Gleichung

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + T^2 \cdot q(\tau) \cdot y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^*)$$

$$q(\tau) = \frac{\nu_i^2}{4\pi^2} = \text{konst. im } i^{\text{ten}} \text{ Teilstück } \tau_i\,,$$

dann sind die Integrale $\eta_1\,\eta_2$ dort von der Form

$$A\cos\left(\frac{T\nu_i\tau}{2\pi}\right) + B\sin\left(\frac{T\nu_i\tau}{2\pi}\right)$$

Die Integrationskonstanten A, B bestimmen sich für das erste Teilstück aus (4), für alle folgenden aus der Bedingung, dass an der Grenze zweier Teilstücke Ordinaten und Tangenten der dort zusammenstossenden Teilkurven übereinstimmen müssen. Eine leichte aber umständliche Rechnung gibt so den Verlauf der Integrale η_1, η_2, insbesondere die wichtigen Endwerte

$$a = \eta_1(2\pi) \qquad d = \eta_2'(2\pi)$$

und hieraus den Wert von

$$J = \frac{a+d}{2}.$$

Für $n = 4$ wird

$$J_4 = \frac{a+d}{2} = C_1C_2C_3C_4 + NS_1S_2S_3S_4 - \sum_{iklm}\nu_{ik}S_iS_kC_lC_m$$

wobei

$$C_i = \cos\left(\frac{T\nu_i\tau_i}{2\pi}\right);\quad S_i = \sin\left(\frac{T\nu_i\tau_i}{2\pi}\right);\quad N = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4} + \frac{\nu_2\nu_4}{\nu_1\nu_3}\right)$$

$$\nu_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_i}{\nu_k} + \frac{\nu_k}{\nu_i}\right) \quad \text{bedeuten, und}$$

wobei die letzte Summe über alle 6 Permutationen

$$iklm = \begin{matrix} 1\,2\,3\,4 & 2\,3\,1\,4 \\ 1\,3\,2\,4 & 2\,4\,1\,3 \\ 1\,4\,2\,3 & 3\,4\,1\,2 \end{matrix}$$

zu erstrecken ist.

Für $n = 3$ wird

$$J_3 = C_1C_2C_3 - \nu_{12}S_1S_2C_3 - \nu_{13}S_1S_3C_2 - \nu_{23}S_2S_3C_1$$

und für $n = 2$ noch einfacher

$$J_2 = C_1C_2 - \nu_{12}S_1S_2$$

Nimmt man noch der Uebersichtlichkeit wegen $\tau_1 = \tau_2 = \pi$, so wird

$$J_2 = \cos\left(\frac{T\nu_1}{2}\right)\cos\left(\frac{T\nu_2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\sin\left(\frac{T\nu_1}{2}\right)\sin\left(\frac{T\nu_2}{2}\right)$$

was mit $x_1 = \frac{T\nu_1}{2}$; $x_2 = \frac{T\nu_2}{2}$ übergeht in

$$J_2(x_1, x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)\sin x_1 \sin x_2$$

Man deute (x_1, x_2) als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes A. Bei gegebenem ν_1, ν_2 gehört zu jedem T ein Punkt A, und wenn T sich ändert, läuft A auf dem Strahl

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \text{konstant}$$

durch den Anfangspunkt O. Der Abstand $OA = T\frac{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}{2}$ ist zu T proportional.

Das Stabilitätsgebiet der Perioden T wird vom Resonanzbereich getrennt durch die Kurven

$$J(x_1, x_2) = +1 \qquad J(x_1\,x_2) = -1.$$

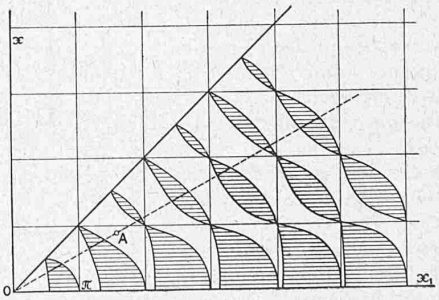


Abb. 2

In Abb. 2 sind sie aufgezeichnet, und zwar nur für den ersten Oktanten, da sich alles zur 45° Linie $x_1 = x_2$ symmetrisch verhält. Die Resonanzgebiete sind schraffiert. Auf jedem Strahl ($k_2 : k_1 =$ geg. Konst.) schneiden sie die Instabilitätsintervalle heraus, deren Anzahl stets unendlich gross ist. Für $\nu_1 = \nu_2$, den Fall *gewöhnlicher harmonischer Schwingungen*, reduzieren sich diese sämtlich auf Punkte. Denn es ist alsdann

$$J = \cos(x_1 + x_2) = \cos(\nu T)$$

$$\text{also} \quad |J| = 1 \quad \text{für} \quad T = \frac{\pi}{\nu}\,n \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Für $k_2 = 0$ ($x_2 = 0$) ergibt sich der Fall einer *periodisch aussetzenden elastischen Kraft.* Die Abbildung zeigt, dass dann die Instabilitätsintervalle sehr breit werden.

Diese Resultate werden, wenn *Dämpfung* vorhanden ist, modifiziert. Wirkt sie proportional der Geschwindigkeit gemäss der Gleichung

$$y'' + 2\omega y' + p(t)\,y = 0,$$

[1]) Z. B. *D. Hilbert,* Grundzüge etc. Göttinger Nachr. 1904 (zweite Mitteilung) und *M. Mason,* Randwertaufgaben bei gewöhnl. Diff.-Glchg. Diss. Göttingen 1903 (Seite 59).

Wohlfahrtshaus der Vereinigten Drahtwerke A.-G. Biel.

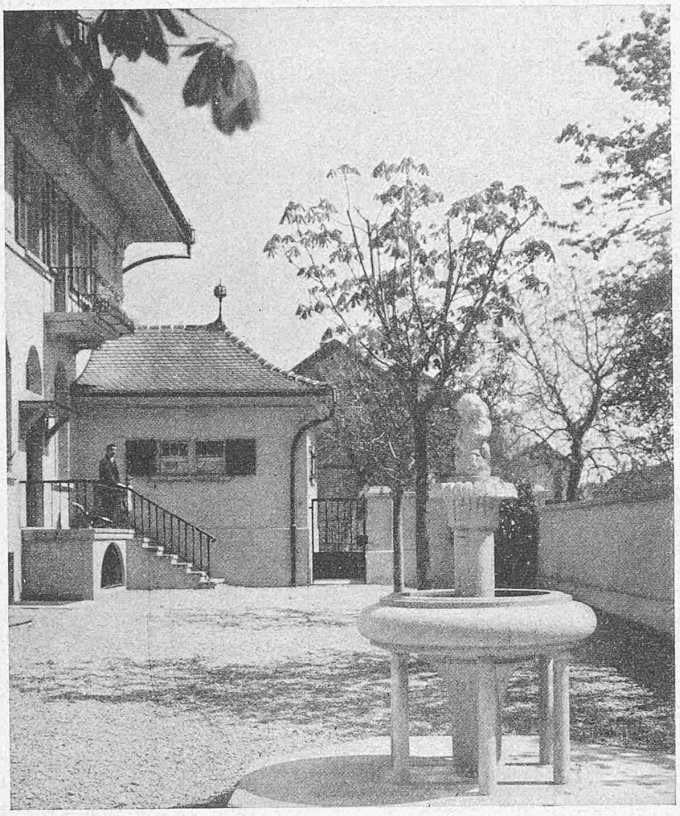


Abb. 5. Aufgang vom Hof zur Küche.

so lautet die Bedingung für Stabilität jetzt

$$\left|\frac{a+d}{2}\right| < \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\omega_2 T}\right)$$

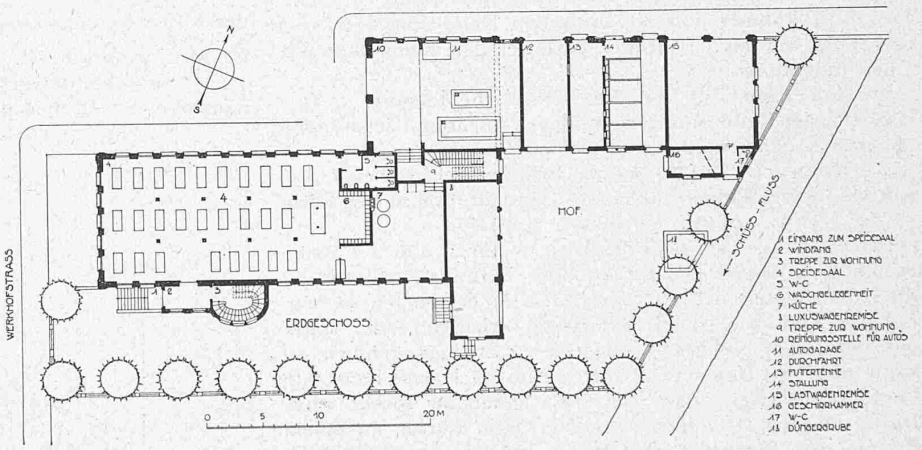
Bei genügend starker Dämpfung kann jede Instabilität verschwinden.

Das Anwachsen der Eigenschwingungen kann natürlich nur dadurch erfolgen, dass dem System Energie zugeführt wird. Im Fall der Lokomotive entstammt sie der Bewegungsenergie des fahrenden Lokomotivgestells, die in dieser Theorie als unbegrenzt gross vorausgesetzt ist gegenüber der Energie des schwingenden Systems. Will man das nicht annehmen, so ist die Rückwirkung auf die Lokomotive zu berücksichtigen, was dann auf gekuppelte Schwingungsvorgänge führt.

Das Wohlfahrtshaus der Vereinigten Drahtwerke A.-G. Biel.

Arch. *Moser, Schürch & v. Gunten*, Biel.
(Mit Tafeln 7 und 8.)

Dieses weiträumige und mit allem Nötigen sehr reichlich ausgestattete Wohlfahrtshaus, das im Obergeschoss und Dachgeschoss mehrere Angestellten- und Arbeiter-Wohnungen enthält, ist vom Oktober 1916 bis zum 1. November 1917 mit einem Kostenaufwand von rd. 600 000 Fr. (60 *Fr./m³*), Umgebungs-Arbeiten und Architektenhonorar inbegriffen, erbaut worden. Unsere Grundrisse und Bilder geben jeden wünschbaren Aufschluss, sodass weitere Erläuterungen entbehrlich erscheinen.



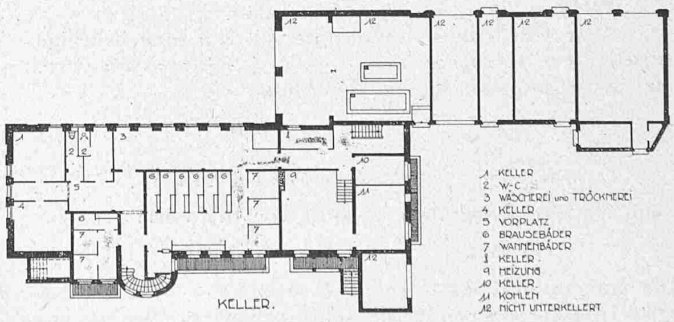


Abb. 1 und 2. Grundrisse vom Keller und Erdgeschoss. — 1 : 600.

Zum Wettbewerb für eine Strassenbrücke über die Reuss bei Gisikon.

Zum Ergebnis dieses Wettbewerbes und zum bezüglichen Urteil des Preigerichts, veröffentlicht in Nr. 1 und 2 laufenden Bandes unserer Zeitschrift (vom 6. und 13. Juli), sind uns sieben, zum Teil ziemlich ausführlich begründete Beschwerden zugekommen über durch programmwidrige Prämiierung verletzte Bewerber-Rechte. Wenn wir auch nach der Erörterung des Falles der Solothurner Kirchenkonkurrenz gehofft hatten, mit derartigen unerfreulichen Diskussionen von Wettbewerb-Entscheiden unsere Leser für längere Zeit nicht mehr behelligen zu müssen, so können wir angesichts der betreffend Gisikon von Bewerbern geäusserten Bedenken doch nicht umhin, ihnen Gehör zu verschaffen. Um aber die unvermeidliche Aussprache zwischen den Bewerbern und ihren Fachkollegen im Preisgericht möglichst kurz halten zu können, bringen wir, im allseitigen Einverständnis, nur eine redaktionelle Zusammenfassung der wichtigern der erhobenen Einwände zum Abdruck. Wir beginnen gemäss „Programm" mit den äussern Verhältnissen, um daran die innern anzuschliessen. Zum bessern Verständnis des Gesagten fügen wir einige Zeichnungen und Bilder bei; um indessen jeden Verdacht gekränkter Eitelkeit einzelner Verfasser von vornherein zu vermeiden, lassen wir alle Namen weg. Es handelt sich für sie wie für uns *nur um die Sache.*

A. Schmälerung des Durchfluss-Profils.

Das *Programm* bestimmte wörtlich: „Die Brückenkonstruktion darf bei jedem Widerlager höchstens 6 m^2 vom Durchflussprofil zwischen H.-W und Flussohle beanspruchen." (Vergl. die anschliessenden Mitteilungen über die Durchflussverhältnisse der Reuss bei Gisikon. *Red.*)

Im *Urteil* zum Entwurf Nr. 15 (I. Preis) steht: „Statt 6 m^2 sind beidseitig je 8,5 m^2 vom Durchfluss-Profil durch die Brückenkonstruktion beansprucht" (vergl. Abbildung 1, S. 100, die horizontal schraffierte Fläche am linksufrigen Kämpfer). Der Verfasser bestreitet zwar dieses Mass der Ueberschreitung, unter