

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 71/72 (1918)  
**Heft:** 7

**Artikel:** Zur Frage der Knickungsbiegung elastisch eingespannter Stäbe  
**Autor:** Pröll, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34794>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

feuerfesten Tönen keine glänzenden sind, ist es andererseits nicht ausgeschlossen, dass sich dafür geeignete Materialien der Gruppen 2 und 3 finden lassen. Es wäre dies umso mehr zu begrüssen, als insbesondere Dolomit und Magnesit zu den höchstfeuerfesten und daher wertvollsten Materialien gehören und für die bei uns immer mehr zunehmende Industrie des Elektrostahls geradezu unentbehrlich sind.<sup>1)</sup>

Wie die Erfahrung zeigt, bestehen jedoch sowohl unter jenen Personen, die sich an den Nachforschungen nach neuen feuerfesten Materialien beteiligen, wie auch unter den Verbrauchern feuerfester Steine vielfach noch recht unklare Anschauungen über den Begriff „feuerfest“ und die sehr mannigfachen Anforderungen, denen feuerfeste Materialien zu genügen haben. Es sei daher dem Verfasser gestattet, im nachstehenden diese Verhältnisse, soweit dies bei dem beschränkten zur Verfügung stehenden Raum möglich ist, etwas näher zu betrachten.

Wie schon die Bezeichnung „feuerfest“ andeutet, ist die Hauptforderung, die man an solche Materialien stellt, eine hinreichende Widerstandsfähigkeit gegen höhere Temperaturen, also ein *hoher Schmelzpunkt*. Nach dem Beschluss der Hauptversammlung des Vereins deutscher Fabriken feuerfester Produkte vom 4. März 1914 sind als „feuerfest“ nur solche Waren zu bezeichnen, deren Schmelzpunkt mindestens dem Segerkegel Nr. 26 (etwa 1580° C) entspricht, wobei zu bemerken ist, dass Chamotte-Steine und Dinas-Steine im allgemeinen Schmelzpunkte von etwa 1650° bis 1750° erreichen, Bauxit 1820°, reine Tonerde ( $Al_2O_3$ ) 2010°, Dolomit und Magnesit ebenfalls über 2000°.

Schon die Definition des Begriffs „Schmelzpunkt“ wie auch dessen Bestimmung bieten aber gewisse Schwierigkeiten. Nach der physikalischen Erklärung des Begriffs „Schmelzpunkt“

<sup>1)</sup> Dolomitlager von recht befriedigender Qualität sind vor einiger Zeit im Jura, in Günsberg bei Solothurn entdeckt worden, und werden auch mit Erfolg von den L. v. Roll'schen Eisenwerken ausgebeutet.

versteht man darunter jene Temperatur eines Körpers, bei der er aus dem festen in den tropfbar flüssigen Zustand übergeht. Während nun aber dieser Uebergang bei chemisch reinen Elementen, z. B. den Metallen, sowie bei vielen chemischen Verbindungen (sofern sich diese natürlich nicht etwa schon unter dem Schmelzpunkt zersetzen) sich *plötzlich*, bei einer ganz bestimmten Temperatur vollzieht, liegen die Verhältnisse bei den meisten feuerfesten Materialien viel verwickelter; denn hier haben wir es ja in der Regel nicht mit einem einheitlichen Körper, sondern fast immer mit einem mechanischen Gemenge mehrerer chemischen Verbindungen (Mineralien) zu tun, von denen jede ihren besondern Schmelzpunkt besitzt.

(Schluss folgt.)

## Zur Frage der Knickungsbiegung elastisch eingespannter Stäbe.

Von Prof. Dr. Ing. A. Pröll, Hannover.

Herr Ing. H. Nater bespricht in dieser Zeitschrift (Band LXXI, Seite 215 ff, Nr. 20 vom 18. Mai 1918) die Berechnung der Knickungsbedingung und der zulässigen Knicksicherheit für einen axial belasteten Balken mit teilweise eingespannten Enden. Er gelangt auf Grund der allgemeinen Differentialgleichung der elastischen Linie zu dem Schlusse, dass die Knicklast sich bei teilweiser Einspannung durch

$$P_k = n \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (1)$$

berechnen lässt und findet den Koeffizienten  $n$  durch ein teilweise graphisches Verfahren. Dieser Schluss ist mit Vorsicht aufzunehmen. Tatsächlich tritt nur dann eine Erhöhung der *wirklichen* Knicklast, und zwar gleich auf den vierfachen Wert ein, wenn die Einspannung eine vollkommene ist. Bei unvollkommener Einspannung wird das „Ausknicken“, das heisst der Eintritt eines labilen Zustandes, bei beliebiger Ausbiegung selbst immer wieder bei

der Eulerschen „Knicklast“  $P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$  einsetzen.

Dagegen ist die von Ingenieur Nater aufgestellte Formel (1) vollkommen berechtigt, wenn es sich etwa darum handelt, die Durchbiegung und das grösste Moment (zulässige Biegungsspannung) in einem solchen Falle auszurechnen. Denn diese sind in hohem Grade abhängig von der Grösse der entlastenden Einspannungsmomente. Durch Einführung der sogenannten Knicksicherheit

$$\zeta = \frac{P_k}{P} \quad (2)$$

können die Formeln für Durchbiegung  $f$  und Moment  $M$  sehr anschaulich dargestellt werden, und dabei erscheint dann allerdings die Knicklast wesentlich vergrössert — es ist das aber freilich nur eine *scheinbare* Erhöhung von  $P_k$ , die nur für die Berechnung von  $f$  und  $M$  benutzt werden darf. Die erhöhte „Knickkraft“  $P_k$  hat dann eben nur eine theoretische Bedeutung als Rechnungswert, und kann vielleicht am besten nach dem Vorschlag von Prof. Kayser als „Biegungswiderstand“ aufgefasst werden.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Kayser, Beziehungen zwischen Druckfestigkeit und Biegezugfestigkeit. Zeitschrift d. Ver. deutscher Ing., 1917, S. 93.

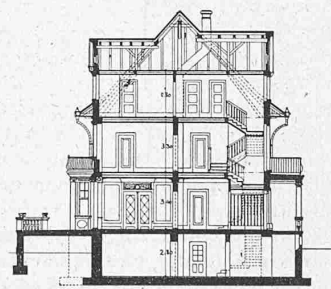
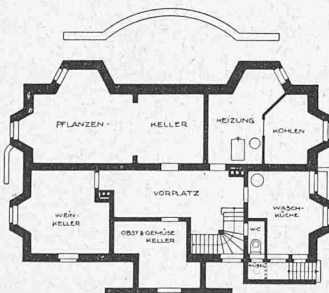
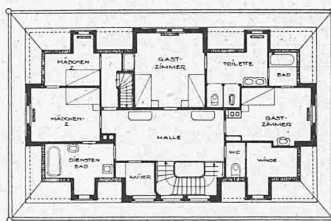
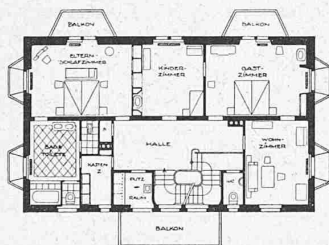


Abb. 2 bis 4 Grundrisse, Abb. 5 Schnitt zur Villa Arbenz. — 1:400.

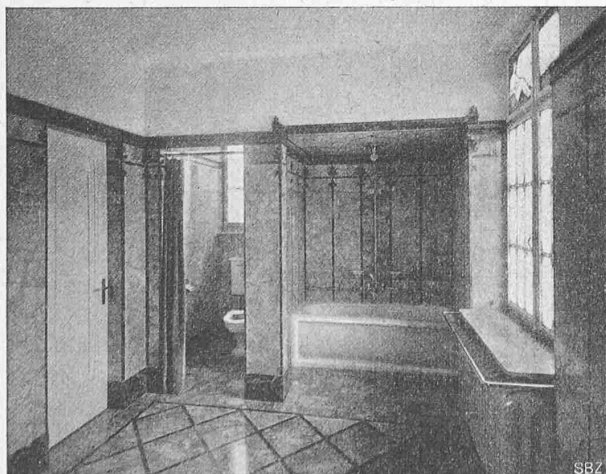
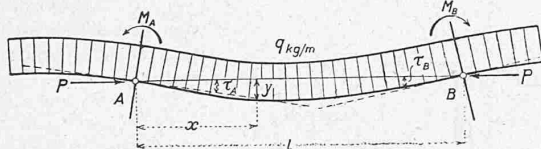


Abb. 6. Bad und Toilette der Villa Arbenz in Zürich.

Im „Zentralblatt der Bauverwaltung“ 1917<sup>1)</sup> habe ich diese vielbesprochene Aufgabe eines auf Biegung und gleichzeitige Knickung beanspruchten Balkens mit entlastenden Knotenmomenten zur Gewinnung einer brauchbaren Näherungsformel in der Weise bearbeitet, dass ich der unsymmetrischen Biegelinie zwei in einander übergehende Kurven (Parabeln oder Sinuslinien) zugrunde legte. Nach bekanntem Verfahren konnte dann ein der Vianello-Kayserschen Formel ähnlicher Ausdruck für die grösste Durchbiegung und auch für das Moment gefunden werden.

Die Annahme zweier Kurven ist allerdings theoretisch nicht einwandfrei, wenn auch praktisch das Ergebnis dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt wird, weil die richtige Form der Biegelinie von nur geringem Einfluss auf Biegearbeit und Durchbiegung ist. Für Aufstellung einer Näherungsrechnung, die besonders den Einfluss der entlastenden Momente auf die Knickungsbeanspruchung klar überblicken liess, war die Annahme genügend geeignet.

Im Folgenden wird dasselbe Endziel mit Hilfe des Ritz-Lorenz'schen Verfahrens<sup>2)</sup> zur Näherungslösung elastischer Probleme zu erreichen gesucht. Die Aufgabe sei dahin erweitert, dass es sich um einen auch noch gleichmässig belasteten Träger handelt, an dem an den beiden betrachteten Auflagerstellen  $A$  und  $B$  entlastende Momente  $M_A$  und  $M_B$  wirken, während  $q$  die Querbeltung ( $\text{kg/m}$ ) und  $P$  die Längskraft (Druck) darstellt (siehe Abb.).



Das Ritz'sche Verfahren besteht nun in diesem Falle darin, dass für die Biegelinie ein algebraischer Ausdruck

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \quad (3)$$

mit den noch unbestimmten Koeffizienten  $a_1$  bis  $a_4$  so eingeführt wird, dass zunächst die Grenzbedingungen des Problems

$$\left. \begin{aligned} \text{für } x=0, y=0: \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{M_A}{EJ} \\ \text{für } x=l, y=0: \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{M_B}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

erfüllt werden (Durchbiegungen an den Stützen = 0, zweite Abteilung [Krümmung der elastischen Linie] in den Auflagern den Stützmomenten proportional). Dabei ist, wie üblich,  $E$  der Elastizitätsmodul,  $J$  das konstant angenommene Trägheitsmoment des Querschnitts.

Dann wird der Ausdruck für die innere Biegearbeit  $L_i$  und für die Arbeit der äusseren Kräfte und Momente  $L_a$  aufgestellt und in diesen (3) so eingeführt, dass der Ausdruck

$$J = L_i - 2 L_a \quad (4)$$

zu einem ausgezeichneten Wert (Minimum) wird. Dies erfordert aber nach Lorenz<sup>3)</sup> das Verschwinden der partiellen Ableitungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial a_1} - 2 \frac{\partial L_a}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial L_i}{\partial a_2} - 2 \frac{\partial L_a}{\partial a_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

In unserem Falle genügen 4 Koeffizienten zur einfachsten Darstellung der Verhältnisse, und es wird nur die erste Gleichung (5) gebraucht. Wir erhalten mit (3) aus (3a) die Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{y}{l}\right)_{x=l} &= a_1 + a_2 l + a_3 l^2 + a_4 l^3 = 0 \\ \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=0} &= 2 a_2 = \frac{M_A}{EJ} \\ \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=l} &= 2 a_2 + 6 a_3 l + 12 a_4 l^2 = \frac{M_B}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

<sup>1)</sup> A. Pröll: Zur Frage der Knickungsbeanspruchung biegesteifer Fachwerkstäbe. Zentralblatt der Bauverwaltung 1917, Seite 389.

<sup>2)</sup> Lorenz, Techn. Elastizitätslehre, § 40. Vgl. auch Hort, Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, § 81.

<sup>3)</sup> Lorenz, Techn. Elastizitätslehre, Seite 401.

aus denen somit  $a_2$  bestimmt ist und  $a_3$  wie  $a_4$  als Funktionen von  $a_1$  dargestellt werden können. Es ist mit

$$a_2 = \frac{M_A}{2 EJ} \quad (7)$$

$$a_3 = - \left( \frac{2 a_1}{l^2} + \frac{5 M_A + M_B}{6 EJ l} \right) \quad (8)$$

$$a_4 = \left( \frac{a_1}{l^3} + \frac{2 M_A + M_B}{6 EJ l^2} \right)$$

Weiter ist noch, was für später angemerkt sei,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_3}{\partial a_1} &= - \frac{2}{l^2} \\ \frac{\partial a_4}{\partial a_1} &= \frac{1}{l^3} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Der Ausdruck für die innere Arbeit ist

$$L_i = \frac{EJ}{2} \int_0^l y''^2 dx + \frac{P^2 l}{EF} \quad (10)$$

Hieraus bilden wir

$$\frac{\partial L_i}{\partial a_1} = EJ \int_0^l y'' \frac{\partial y''}{\partial a_1} dx =$$

$$EJ \int_0^l (2 a_2 + 6 a_3 x + 12 a_4 x^2) \left( 2 \frac{\partial a_2}{\partial a_1} + 6 x \frac{\partial a_3}{\partial a_1} + 12 x^2 \frac{\partial a_4}{\partial a_1} \right) dx =$$

$$24 EJ \int_0^l (a_2 + 3 a_3 x + 6 a_4 x^2) \cdot \left( \frac{x^2}{l^3} - \frac{x}{l^2} \right) dx =$$

$$- EJ (4 a_2 + 6 a_3 l + 7,2 a_4 l^2) = 4,8 EJ \frac{a_1}{l} + 0,6 M_A - 0,2 M_B \quad (11)$$

Die äussere Arbeit  $L_a$  dagegen setzt sich zusammen aus  
1. Arbeit der Kraft  $P$  bei der Annäherung der Stützen um  $\Delta x$

$$L_{a1} = \frac{1}{2} P \Delta x$$

2. Arbeit der Querbeltung bei der Durchbiegung

$$L_{a2} = \frac{1}{2} \int_0^l q y dx \quad (12)$$

3. Arbeit der Momente  $M_A$  und  $M_B$

$$L_{a3} = \frac{1}{2} \int_0^l M_A \frac{l-x}{l} y'' dx + \frac{1}{2} \int_0^l M_B \frac{x}{l} y'' dx$$

Es ist dann die gesamte äussere Arbeit nach Einsetzen von (3) und (6)

$$L_a = \frac{P \Delta x}{2} + \frac{q}{2} \left( \frac{a_1 l^2}{2} + \frac{a_2 l^3}{3} + \frac{a_3 l^4}{4} + \frac{a_4 l^5}{5} \right) + M_A \left( \frac{a_2 l}{2} + \frac{a_3 l^2}{2} + \frac{a_4 l^3}{2} \right) + M_B \left( \frac{a_2 l}{2} + a_3 l^2 + \frac{3}{2} a_4 l^3 \right) \quad (13)$$

Um lineare Ausdrücke zu bekommen, bilden wir auch hier nach Gl. (5) die partiellen Differentialquotienten der Arbeiten nach  $a_1$  und erhalten mit (9) nach einiger Rechnung

$$2 \frac{\partial L_a}{\partial a_1} = \frac{P \Delta x}{\partial a_1} + \frac{q l^2}{5} - (M_A + M_B) \quad (14)$$

Aus (11) und (14) folgt mit (5)

$$a_1 = \frac{q l^3}{24 EJ} + \frac{1}{4,8} \frac{P}{EJ} \frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} - \frac{2 M_A + M_B}{12 EJ} l \quad (15)$$

Weiter ist dann

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= - \frac{q l}{12 EJ} - \frac{M_A - M_B}{6 EJ} - \frac{1}{2,4 l} \frac{P}{EJ} \frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} \\ a_4 &= \frac{q}{24 EJ} + \frac{1}{4,8 l^2} P \frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} \frac{1}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Als Gleichung der elastischen Linie bekommt man jetzt

$$y = \frac{q x}{24 EJ} \left( l^3 - 2 l x^2 + x^3 \right) - \frac{M_A x}{6 EJ} \left( 2 l - 3 x + \frac{x^2}{l} \right) - \frac{M_B x}{6 EJ} \left( l - \frac{x^2}{l} \right) + \frac{P}{4,8 EJ l^2} \frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} \cdot \left( x l^3 - 2 x^3 l + x^4 \right) \quad (17)$$

Um die grösste Durchbiegung zu finden, bilden wir den Ausdruck  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$  und führen hierin

$$x_0 = \frac{l}{2} - \lambda \quad (18)$$

ein, wobei  $\lambda$  eine kleine Grösse sei, sodass annäherungsweise:



$$\left. \begin{aligned} x_0^2 &= \frac{l^2}{4} - l\lambda \\ x_0^3 &= \frac{l^3}{8} - \frac{3l^2\lambda}{4} \\ x_0^4 &= \frac{l^4}{16} - \frac{l^3\lambda}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

gesetzt werden kann. Dann ergibt sich nach einiger Rechnung

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_0} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{M_A - M_B}{24} l - \frac{M_A + M_B}{2} \lambda \right) = 0 \quad (20)$$

für den tiefsten Punkt; es ist somit

$$\lambda = l \frac{M_A - M_B}{12(M_A + M_B)} \dots \dots \dots (21)$$

die Strecke, um welche die tiefste Einsenkung aus der Mitte verschoben erscheint.

Eingesetzt in die Gl. (17) wird dann

$$y_{\max} = f = \frac{5}{16 \cdot 24} \frac{q l^4}{EJ} - \frac{1}{16} \left( M_A + M_B \right) \frac{l^2}{EJ} + \frac{5}{16 \cdot 4,8} P \frac{l^2}{EJ} \frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} - \frac{l^2}{24 EJ} \frac{(M_A - M_B)^2}{12(M_A + M_B)} \dots \dots \dots (22)$$

Es ist noch eine Festsetzung zu treffen über  $\frac{\partial \Delta x}{\partial a_1}$

$$\text{Aus der Bogenlänge } l = \int_0^{l-\Delta x} \sqrt{1+y'^2} dx \approx \int_0^{l-\Delta x} (1 + \frac{y'^2}{2}) dx =$$

$$l - \Delta x + \frac{1}{2} \int_0^{l-\Delta x} y'^2 dx$$

folgt mit Rücksicht auf die Kleinheit von  $\Delta x$  neben  $l$

$$\Delta x \approx \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx \dots \dots \dots (23)$$

und daher

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} = \int_0^l y' \frac{\partial y'}{\partial a_1} dx \dots \dots \dots (24)$$

Mit Gl. (3) und (9) folgt weiter

$$\frac{\partial y'}{\partial a_1} = 1 - \frac{6x^2}{l^2} + \frac{4x^3}{l^3} \dots \dots \dots (25)$$

woraus schliesslich

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} = \frac{q l^4}{48} + \frac{P l^2}{9,6 EJ} \frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} - 0,6 \frac{M_A + M_B}{6 EJ} l^2 \dots \dots \dots (26)$$

gefunden wird. Es ist daher

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial a_1} = 1,6 \frac{\frac{q l^2}{8} - 0,6(M_A + M_B)}{\frac{9,6 EJ}{l^2} - P} = 1,6 \frac{M - 0,6(M_A + M_B)}{P_K - P} \quad (27)$$

wenn wir hierin  $\frac{q l^2}{8} = M$  und mit genügender Annäherung

$$\frac{9,6 EJ}{l^2} = P_K \dots \dots \dots (28)$$

als Knicklast setzen, deren Zahlenkoeffizient 9,6 sich vom Eulerschen Wert  $\pi^2 = 9,87$  nur um 2,7% unterscheidet. Es ist dann nach Einführen in Gl. (22)

$$f = \frac{l^2}{9,6 EJ} \left( \frac{q l^2}{8} - 0,6(M_A + M_B) \right) + \frac{P l^2}{9,6 EJ} \frac{\frac{q l^2}{8} - 0,6(M_A + M_B)}{P_K - P} - \frac{l^2}{9,6 EJ} \frac{(M_A - M_B)^2}{30(M_A + M_B)} \dots \dots \dots (29)$$

somit nach Zusammenziehung und mit Rücksicht auf (Gl. 28)

$$f = \frac{\frac{q l^2}{8} - 0,6(M_A + M_B)}{P_K - P} - \frac{(M_A - M_B)^2}{30 P_K (M_A + M_B)} \approx \frac{M - 0,6(M_A + M_B)}{P_K - P} \quad (30)$$

wobei der zweite Bruch fast immer vernachlässigt werden darf.

Nach Einsetzen von (27) erhält man aus (17) die Gleichung der elastischen Linie. Es ist dies hier eine Kurve vierten Grades, bei der im allgemeinen zwei Wendepunkte ( $y'' = 0$ ) zwischen  $x = 0$  und  $x = l$  liegen. Es ist aber *sehr bemerkenswert*, dass die grösste Durchbiegung  $f$  (sofern das weitaus überwiegende erste Glied in Gleichung (30) in Betracht kommt) genau ebenso gross auch bei der eingangs erwähnten, theoretisch nicht einwandfreien Annahme von zwei Parabeln erhalten wurde, womit nur bestätigt wird, dass für die Berechnung von  $f$  (und auch des Momentes  $M_0$ ) die genaue Form der Biegelinie fast ohne Einfluss ist.

Für das Biegemoment an der Stelle  $x$  hat man

$$M_x = Py + \frac{q x}{2} (l - x) - \frac{(M_B - M_A) x}{l} - M_A \quad (31)$$

Das durch die Knickungsbiegung entstehende Moment  $M_0$  an der Stelle der tiefsten Einsenkung ist jetzt unter Berücksichtigung von (18)

$$M_0 = \frac{P}{P - P_K} \left( \frac{q l^2}{8} - 0,6(M_A + M_B) \right) - \frac{(M_A - M_B)^2}{30(M_A + M_B)} \frac{P}{P_K} + \frac{q l^2}{8} - \frac{q l^2}{2} - \frac{1}{2} (M_B - M_A) + \frac{l}{l} (M_B - M_A) - M_A \quad (32)$$

oder mit (2) nach Umformen

$$M_0 = \frac{\frac{q l^2}{8} \mathfrak{S}}{\mathfrak{S} - 1} - 0,6 \frac{(M_A + M_B) \left( \frac{\mathfrak{S}}{2} + 0,1 \right)}{\mathfrak{S} - 1} - (M_A - M_B) \left( \frac{M_A - M_B}{30 \mathfrak{S} (M_A + M_B)} + \frac{l}{l} \right) \dots \dots \dots (33)$$

In diesem Ausdruck stellt das erste Glied die *Vianellosche* Formel für axiale und gleichzeitige Querbelaugung eines gelenkig gelagerten Trägers dar, das zweite und dritte enthalten den entlastenden Einfluss der Einspannungsmomente, doch kann auch hier das letzte Glied gewöhnlich vernachlässigt werden.

Dies ist insbesondere für *Ueberschlagsrechnungen* zugänglich, für die ausserdem noch die einfache Beziehung (1) abgeleitet werden soll, die Herr *Nater* in seinem Aufsatz aufstellt. Hierzu formen wir Gl. (33) nach Weglassen des letzten Gliedes um und finden

$$M_0 = \frac{q l^2}{8} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S} - 1} \left[ 1 - \frac{M_A + M_B}{\frac{q l^2}{8}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10 \mathfrak{S}} \right) \right] = \frac{\frac{q l^2}{8} \mathfrak{S}}{\mathfrak{S} - 1} \psi = \frac{\frac{q l^2}{8} \mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}' - 1} \dots \dots \dots (34)$$

wobei zur Abkürzung

$$\psi = 1 - \frac{M_A + M_B}{\frac{q l^2}{8}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10 \mathfrak{S}} \right) \dots \dots \dots (35)$$

gesetzt wurde.

Das Hinzutreten von  $\psi$  erniedrigt das Moment  $M_0$  gegenüber der ursprünglichen Vianelloschen Formel (in der  $\psi = 1$  ist) und hat die gleiche Wirkung wie ein erhöhter Sicherheitsgrad  $\mathfrak{S}'$  gegen Knickung.

Man findet

$$\mathfrak{S}' = \frac{\psi \mathfrak{S}}{\psi \mathfrak{S} - \mathfrak{S} + 1} = \mathfrak{S} + \sigma \dots \dots \dots (36)$$

und

$$\sigma = \mathfrak{S} \frac{(\mathfrak{S} - 1)(1 - \psi)}{1 - \mathfrak{S}(1 - \psi)} \dots \dots \dots (37)$$

Analog zur Eulerschen Knickungsformel kann man von einer *scheinbar vergrösserten Knicklast* sprechen im Einklang mit Formel (1)

$$P_K' = n \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = P_K \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} \dots \dots \dots (38)$$

und es ist der Faktor  $n$  gegeben durch

$$n = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} = 1 + \frac{\sigma}{\mathfrak{S}} = 1 + \frac{(\mathfrak{S} - 1) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10 \mathfrak{S}} \right) (M_A + M_B)}{\frac{q l^2}{8} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10 \mathfrak{S}} \right) (M_A + M_B)} \dots \dots \dots (39)$$

Sind schliesslich nicht die Momente  $M_A$  und  $M_B$  gegeben, sondern die Einspannung durch die *Neigung der Einspannungstangenten*  $\tau_A$  und  $\tau_B$ , so berechnet man (unter vorläufiger Schätzung von  $f$ ) aus

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = a_1 \\ \tau_B &= \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = a_1 + 2a_2 l + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

erste Näherungswerte für  $M_A$  und  $M_B$ , wonach dann eine Korrekturrechnung durchgeführt werden kann. Noch einfacher ist es freilich, in diesem Fall die *Müller-Breslau'schen* Formeln<sup>1)</sup> direkt zu verwenden. Es ist dabei

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= \frac{M_A}{Pl} v' + \frac{M_B}{Pl} v'' - \frac{ql}{P} v''' \\ \tau_B &= \frac{M_A}{Pl} v'' + \frac{M_B}{Pl} v' - \frac{ql}{P} v''' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

<sup>1)</sup> Müller-Breslau. Graph. Statik der Baukonstruktion II, 2. S. 287.

mit

$$\left. \begin{aligned} v' &= 1 - \frac{\alpha}{14 \alpha} \\ v'' &= \frac{\alpha}{811 \alpha} - 1 \\ v''' &= \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (42)$$

wobei

$$\alpha = \sqrt{\frac{P l^2}{E J}} = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \dots \dots (43)$$

Zu dieser Art der Berechnung ist zusammenfassend folgendes zu bemerken:

1. Bei Querbelastrung eines auf Knickung beanspruchten Stabes kann für Ueberschlagsberechnungen das Moment nach der *ursprünglichen Vianelloschen* Formel  $M_0 = \frac{q l^2}{8} \frac{\epsilon'}{\epsilon' - 1}$  berechnet und dabei etwaigen entlastenden Momenten durch *scheinbare Vergrößerung der Eulerschen Knicklast* Rechnung getragen werden, die nach Formel (38) und (39) zu berechnen ist. (Erhöhte Knicksicherheit  $\epsilon' > \epsilon$ ).

Die scheinbar vergrößerte Knicklast darf *nur* für die Berechnung der Momente und Spannungen benutzt werden, nicht aber etwa dazu, dass die Druckbelastung bis in die Nähe oder gar über die *wirkliche* Knicklast gesteigert werde. Die letztere ist auch bei Vorhandensein entlastender Momente gleich der Eulerschen Knicklast.

### Automatische Schmierung der Spurkränze von Eisenbahnfahrzeugen und der Schienen.

Schon lange vor dem Ausbruch des Weltkrieges, d. h. in einem Zeitpunkt, wo das Material für Rad-Bandagen und Stahl-schienen noch ganz erheblich billiger und ohne die heutigen, fast unüberwindlichen Schwierigkeiten beschafft werden konnte, befasste man sich mancherorts, und, wie aus der einschlägigen Literatur hervorgeht, ganz besonders auch in Amerika (Pennsylvanien) mit der Frage der Schmierung von Radkränzen und Schienen, um dem vorzeitigen, rasch eintretenden Verschleiss dieser Teile möglichst vorzubeugen. Die Abnutzung der Spurkränze und Schienenköpfe ist, wie jedem Eisenbahnfachmann bekannt, eine beunruhigend grosse, falls diese Teile ohne eine die Reibung vermindernde Fettschicht aufeinander arbeiten.

Nach den unter andern in Pennsylvanien schon in den Jahren 1910 und 1911 vorgenommenen, eingehenden Versuchen konnte der Beweis erbracht werden, dass eine richtige und dauernde Schmierung von Spurkranz und Schienenkopf die Abnutzung dieser Teile um das vier- bis fünffache zu verringern imstande ist, dass also deren Lebensdauer um das gleiche Mass erhöht werden kann, was die Betriebsausgaben für den Ersatz der Radkränze und der Schienen

In unserm gebirgigen Lande, wo die topographische Gestaltung des Geländes ein ganz aussergewöhnlich kurvenreiches Tracé bei fast allen Bahnlinien nötig machte, erreicht die Abnutzung der Spurkränze und der Eisenbahnschienen im allgemeinen ein viel höheres Mass, als in einem ausgesprochenen Flachlande. Man hat daher auch bei uns die Bedeutung dieser Sache erkannt und verschiedenes versucht, um den angedeuteten Uebelständen abzuhelfen. In letzter Zeit ist es nun gelungen, einen Apparat zu konstruieren, der den angestrebten Zweck, wie eine dreijährige Erfahrung im Betrieb der Montreux-Berner-Oberland-Bahn gezeigt hat, in weitestgehendem Masse zu erfüllen imstande ist.

Der betreffende Apparat (Patent 93481), der an den Lokomotiven oder Motorwagen eingebaut wird, besteht in der Hauptsache aus einem das Schmieröl enthaltenden Gehäuse A, das an einer mit Neigung gegen den zu schmierenden Spurkranz, am Untergerüst oder Dreh-

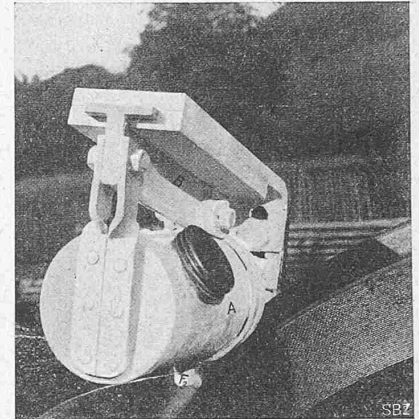


Abb. 2. Spurkranz-Schmierapparat der M. O. B.

gestell aufgehängten Gleitführung B verschiebbar angebracht wird. Infolge des Eigengewichtes des Schmierapparates und der geeigneten Führung legt sich die Rolle C, deren Achse in der Lagerbüchse D frei drehbar ist, an den Spurkranz S an. Sobald der Spurkranz sich dreht, nimmt er die Rolle C mit, die sofort, und solange das Fahrzeug sich bewegt, sich dreht. Auf der Welle der Rolle ist anderseits ein Schmiering E aufgelegt; dieser trägt in bekannter Weise Oel auf die Welle, das durch die Lagerbüchse D abgestreift wird und dann durch den Kanal F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, am Regulierstift G vorbei, zum Spurkranz gelangt, wo das Schmiermaterial tropfenweise aufgetragen wird. Die Rolle C, die an der gleichen innern Spurkranzseite anliegt und sich, wie schon gesagt, an derselben mitdreht, besorgt dann eine regelmässige Verteilung des Oels auf den Spurkranz, von wo es auch an die innere Seite des Schienenkopfes übertragen wird.

Die während drei Jahren im Betriebe gemachten Erfahrungen haben gezeigt, dass die früher in den zahlreichen kleinen Kurven

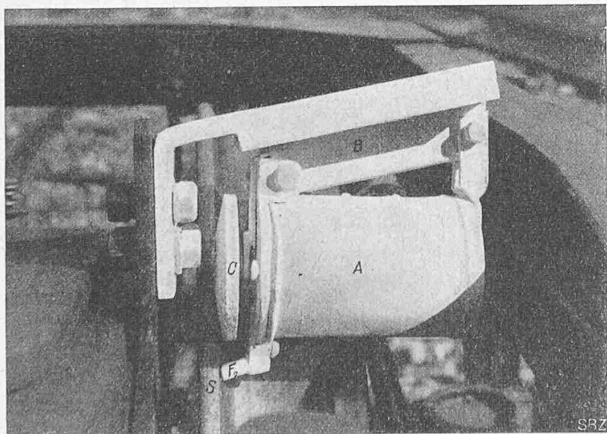


Abb. 1. Spurkranz- und Schienen-Schmierapparat der M. O. B.

ganz bedeutend herabsetzt. Die zahlenmässig zu berechnende Summe der auf diese Weise zu erzielenden Ersparnisse kann, wie wir an einem Beispiel weiter unten zeigen werden, ganz erhebliche Beträge erreichen, die in eindrucksvoller Weise den Beweis erbringen, wie wichtig und interessant diese Frage, besonders in der heutigen Zeit, für zahlreiche Eisenbahnverwaltungen werden kann.

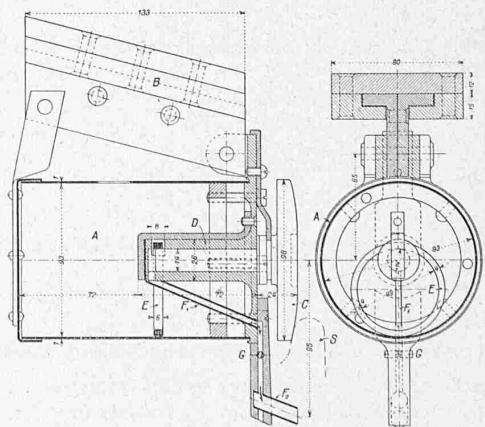


Abb. 3. Längs- und Querschnitt des Schmierapparats. 1:4.

von 40, 50, 60 und 80 m Radius aufgetretene Abnutzung der Schienen, der eine ebenso ausgesprochene Abnutzung der Spurkränze gegenüberstand, sozusagen vollkommen verschwunden ist. In den Kurven kleinen Halbmessers musste vorher mit der Auswechslung der Schienen schon im 9. und 10. Jahre begonnen werden, da infolge der Abnutzung des Schienenkopfes das Widerstandsmoment des