

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 71/72 (1918)
Heft: 3

Artikel: Graphisches Verfahren zur Ermittlung der elastischen Linie
Autor: Dolder, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34703>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

tung nachträglicher besserer Erkenntnis ist auch durch korrektes Vorgehen in *allen* Fällen leicht möglich. *Man muss nur auf die Ambition verzichten können, sich niemals geirrt zu haben!*

In dem eingangs gestreiften Fall, da ich mitgeholfen hatte, für einen Bebauungsplan für Frauenfeld ein unausführbares Ideal-Projekt zu prämiieren, stellte ich sogleich den Antrag, wir Fachleute des Preisgerichts wollen uns den in engste Wahl gekommenen Bewerbern zu mündlicher Rechtfertigung unseres Urteils an einem bestimmten Tag zur Verfügung stellen. Mein Antrag beliebte zwar nicht; ich möchte aber doch bitten, diesen Vorschlag auch in Diskussion zu ziehen. Er scheint mir ein wirksames Vorbeugungsmittel zu sein, um sich als Preisrichter vor übereilten, namentlich vor *Stimmungs-Entscheiden* zu behüten.

Endlich verdient auch das z. B. im Falle der Brandversicherungsanstalt Bern angewendete *Verfahren der Punktzahl-Ermittlung*¹⁾ eine nähere Prüfung. Es kommt dabei nur darauf an, dass man die einzelnen Wertziffern noch *mit den richtigen Gewichten* versteht, dass man z. B. der „Architektur“-Note (im engeren Sinn) etwa dreifaches Gewicht gibt. Zugegeben, dass dem Verfahren ein gewisser schulmeisterlicher Beigeschmack anhaftet. Aber wie will man komplizierte Aufgaben, z. B. den Wettbewerb Gross-Zürich in seiner Vielseitigkeit, anders als mit Punktzahl-Ermittlung richtig abwägen und beurteilen? — Auch braucht man sich ja im *Endurteil* nicht sklavisch an die Punktsommen zu halten. Zur Vermeidung grober Irrtümer und Versehen scheinen sie mir aber entschieden geeignet. Das Verfahren stellt ungefähr das Gegenstück dar zum Vorgehen der Solothurner Kirchen-Jury.

*

Die Beispiele und Gegenbeispiele lassen erkennen, dass nicht die „Grundsätze“ schuld sind, wenn es irgendwo hapert, sondern entweder *das mangelhafte Programm* oder *die unsichere Handhabung*, oder gar *Beides*. So komme ich zum *Ergebnis* in den in der Einladung aufgeführten drei Hauptpunkten:

1. Dass das *allgemeine* Ziel unserer Wettbewerbe das *ideale* sein muss, ist wohl ebenso selbstverständlich, wie dass das *spezielle*, durch das betreffende Programm zu setzende Ziel, ein *reales* ist.

2. Auf welchem Weg wir am sichersten zu sorgfältig vorbereiteten, nicht mehr als nötig bindenden, aber *unzweideutigen Programmen* gelangen können, sollte hauptsächlich Gegenstand der heutigen Diskussion sein.

3. Selbstverständlich scheint mir aber dann eine *absolute Bindung* der Preisrichter, Bewerber und Ausschreiber an ein also aufgestelltes Programm, dessen *Vertragscharakter* allen Teilhabern in *jedem* Zeitpunkt des Verfahrens gegenwärtig bleiben muss.

*

Werte Kollegen! Alle unsere Wettbewerbs-Anstände haben ihre natürlichen Quellen in menschlichen Schwächen. Sie sind weiter die Folge unserer Berufsverhältnisse, wie sie uns Scheffler vor kurzem hier gekennzeichnet hat, als „auseinander gefallen“. Im Einen lebt vorherrschend der Künstler, im Andern mehr der rechnende, technische Organisator. *Beide* aber sind notwendig. Dies bedenkend, wollen wir keinem der Meinungs-Gegner die ehrliche Ueberzeugung, den guten Willen anzweifeln. Dann werden wir unsere Diskussion in würdigem Ton zu führen wissen, den Blick nur auf die Sache gerichtet, der sie dient, auf *das Ziel*. Und auch dieses hat uns Scheffler so schön gezeigt: die Ausübung des Berufes als ein Ganzes, in dem sich Abstraktes und Konkretes notwendig mischen. Möge die Diskussion uns diesem Ziele auch auf dem Sondergebiet der Wettbewerbe näher bringen, auf dass wir, unter Zurückdrängung persönlicher Liebhabereien, unsere *Mission als Preisrichter stets auffassen und betätigen mögen als ein Ganzes!*

Graphisches Verfahren zur Ermittlung der elastischen Linie.

Von Dr. Ing. E. Dolder, Winterthur.

Das hier zu erläuternde Verfahren zur Ermittlung der elastischen Linie weicht von der bekannten Mohr'schen Seilpolygon-Methode ab und verdient meines Erachtens seiner Einfachheit wegen in der Praxis eine noch grössere Verbreitung, als ihm bisher zu teil geworden ist.

¹⁾ Vgl. S. B. Z. Band LXIX, Seite 298 (vom 30. Juni 1917).

In der vorliegenden Abbildung (S. 35) einer irgendwie belasteten Welle sind zwei rechtwinklige Koordinatensysteme mit dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte *O* eingezeichnet; das eine von ihnen hat als Abszissenaxe *x* die horizontale Axe der unbelasteten Welle und das andere als *x'*-Axe die Tangente an die elastische Linie im Anfangspunkte. Für die weit überwiegende Mehrzahl der praktischen Fälle sind nun wie bekannt die Neigungswinkel der elastischen Linie gegenüber der ursprünglich geraden Trägeraxe sehr kleine Grössen erster Ordnung, was auch hier für unser Beispiel bezüglich der Winkel β' bzw. β zutrifft.

Die Richtungsänderung der elastischen Linie innerhalb zweier im Abstände *dl* voneinander gelegenen Punkte hat mit der Lage des Koordinatensystems nichts zu tun, sie sei mit $d\beta' = d\beta$ bezeichnet. Die auf die Längeneinheit bezogene Richtungsänderung, d. h. $\frac{d\beta'}{dl} = \frac{d\beta}{dl}$ bedeutet die Krümmung der elastischen Linie. Durch Einführung des Krümmungsradius folgt: $\varrho \cdot d\beta' = \varrho \cdot d\beta = dl$, sodass die Krümmung auch ist: $\frac{d\beta'}{dl} = \frac{d\beta}{dl} = \frac{1}{\varrho}$.

Die in der Abbildung ersichtliche Grösse $e \cdot d\beta'$ bedeutet die Verlängerung, die ein an der Wellenoberfläche gelegenes Faserelement von der ursprünglichen Länge *dl* bei der Verbiegung der Welle erfährt. Es ist daher $\frac{e \cdot d\beta'}{dl}$ seine spezifische Dehnung, sie kann nach dem Elastizitäts-Gesetz gleich $\alpha \cdot \sigma_b = \frac{1}{E} \cdot \sigma_b$ gesetzt werden, wobei α bzw. *E* den Dehnungskoeffizienten bzw. Elastizitätsmodul und σ_b die Biegungsspannung bedeuten. Damit schreibt sich die Krümmung der elastischen Linie:

$$\frac{d\beta'}{dl} = \frac{d\beta}{dl} = \alpha \cdot \frac{\sigma_b}{e} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\sigma_b}{e} = \frac{1}{\varrho}$$

Nach der Biegungsgleichung: $M_b = \frac{J}{e} \cdot \sigma_b$ ist $\frac{\sigma_b}{e} = \frac{M_b}{J}$ sodass folgt:

$$\frac{d\beta'}{dl} = \frac{d\beta}{dl} = \frac{\alpha \cdot M_b}{J} = \frac{M_b}{EJ} = \frac{1}{\varrho}$$

Diese Gleichung spricht die leicht verständliche Beziehung aus, dass an irgend einer Trägerstelle die Stärke der Verbiegung $\frac{1}{\varrho}$ proportional ist mit dem daselbst herrschenden Biegemomente und dem Dehnungskoeffizienten α und sich umgekehrt proportional verhält mit dem für die Widerstandsfähigkeit bzw. Unnachgiebigkeit eines Trägers massgebenden Trägheitsmomente.

Für die Folge erweist sich die Orientierung der elastischen Linie auf das Koordinatensystem mit den Axen *x'* und *y'* als vorteilhaft. Nach unserer Voraussetzung der sehr kleinen Winkelgrössen darf nun $x = x'$, ferner das Bogenelement *dl* = den Abszissenelementen $dx = dx'$ und schliesslich $\beta' = \text{tg}\beta'$ gesetzt werden. Damit schreibt sich die obige Gleichung:

$$\frac{d \text{tg} \beta'}{dx'} = \frac{M_b}{EJ}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\text{tg} \beta' = \int \frac{M_b}{EJ} \cdot dx' + C_1$$

Im Anfangspunkte *O* ist der Wert von $\text{tg} \beta' = 0$ und da hier auch $M_b = 0$ ist, wird die Integrationskonstante $C_1 = 0$.

In der Abbildung sind die verschiedenen Werte der Biegemomente M_b und der Krümmungen $\frac{M_b}{EJ}$ als Ordinaten unterhalb der horizontalen Abszissenaxe in bestimmten Masstäben abgetragen. Da nun $x' = x$, also auch $x'_{\max} = x_{\max} = l$ ist, so erhält man in irgend einem Punkte der elastischen Linie den Wert von $\text{tg} \beta'$ durch jene Fläche ausgedrückt, die sich zwischen der horizontalen Axe und dem Begrenzungslinienzuge der Krümmungswerte $\frac{M_b}{EJ}$ bis zu dem betreffenden Wellenquerschnitte hin erstreckt; wir bezeichnen die gesamte Fläche mit den Ordinaten $\frac{M_b}{EJ} = \frac{1}{\varrho}$ als Krümmungsfläche.

Diese Zahlenwerte von $\operatorname{tg} \beta' = \frac{dy'}{dx'}$ sind in der Abbildung nach den daselbst angegebenen Masstäben als Ordinaten oberhalb der Horizontalen aufgetragen. An Hand dieses so gewonnenen Kurvenzuges ergeben sich nun bereits die Ordinaten der elastischen Linie y' zu:

$$y' = \int \left(\frac{dy'}{dx'} \right) \cdot dx + C_2 = \int \operatorname{tg} \beta' \cdot dx + C_2 = \int \left\{ \int \frac{M_b}{E \cdot J} dx \right\} dx + C_2$$

Da im Anfangspunkte sowohl y' als auch $\operatorname{tg} \beta' = 0$ sind, so wird auch die zweite Integrationskonstante $C_2 = 0$. Es ist daher irgend ein Wert von y' durch den Inhalt jener Fläche bestimmt, die bis zu der betreffenden Stelle hin zwischen der Horizontalen und der Begrenzungskurve der Werte von $\operatorname{tg} \beta'$ gelegen ist. Die so ermittelten Grössen von y' sind als Ordinaten von der Horizontalen aus nach oben abgetragen; ihre Endpunkte bestimmen gegenüber der als x' -Axe aufzufassenden Horizontalen den Verlauf der elastischen Linie.

In dem vorliegenden Beispiele handelt es sich nun weniger darum, die Werte von y' und $\operatorname{tg} \beta'$ zu kennen, als vielmehr die vertikalen Durchsenkungen der Welle y und ihre Neigungswinkel im verbogenen Zustande ($\operatorname{tg} \beta$) gegenüber der anfänglich geraden Wellenaxe. Die Durchbiegungen y sind aber bereits gegeben und zwar in denjenigen vertikalen Strecken, die zwischen der gefundenen elastischen Linie $f(x', y') = 0$ und der unter Winkel β_1 ansteigenden Verbindungsgeraden ihrer Endpunkte gelegen sind, was aus folgendem hervorgeht: Zieht man von einem Punkte der elastischen Linie aus eine Parallele zur y' -Axe, bis sie die horizontale x -Axe schneidet, so wird diese Strecke $= \frac{y'}{\cos \beta_1}$. Sie verläuft gegenüber der Ordinate y unter dem sehr kleinen Winkel β_1 und darf daher gleich dieser letztern selbst gesetzt werden, sodass die Gleichung besteht:

$$x' \operatorname{tg} \beta_1 = x \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = y' - y$$

und die vertikale Durchbiegung wird:

$$y = -x \operatorname{tg} \beta_1 + y'$$

d. h. gleich der oben genannten vertikalen Strecke zwischen der elastischen Linie und der schräg ansteigenden Geraden. Durch Abtragen dieser Grössen unterhalb der Horizontalen erhält man den gesuchten Verlauf der elastischen Linie $f(x, y) = 0$.

Die Neigungswinkel ihrer Tangenten gegenüber der Axe der unbelasteten Welle ergeben sich nach dem Satze über die Gleichheit zwischen einem Aussenwinkel eines Dreieckes und den beiden ihm gegenüberliegenden innern Dreieckswinkeln. Dabei können wiederum an Stelle der sehr kleinen Winkel ihre Tangentenwerte gesetzt werden, sodass die Beziehung besteht:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \beta' + \operatorname{tg} \beta, \text{ solange } \beta_1 > \beta' \text{ ist, und} \\ \operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta, \text{ wenn } \beta' > \beta_1 \text{ ist.}$$

Benützt man für drei solche Tangentenverhältnisse ein und dieselbe gemeinschaftliche, horizontale Kathete und zieht von der zu $\operatorname{tg} \beta_1$ gehörigen Vertikalkathete jene von $\operatorname{tg} \beta'$ ab, so verbleibt die zu $\operatorname{tg} \beta$ gehörige Vertikalkathete. Dieser Zusammenhang der drei Winkelgrössen ist in der Zeichnung zum Ausdruck gebracht.

Der Wert von $\operatorname{tg} \beta_1$ ist gleich $\frac{y'_{\max}}{l} = \frac{\int_0^x \operatorname{tg} \beta' \cdot dx}{l}$ d. h. im Ordinatenmasstab durch die Höhe jenes Rechteckes von der Grundlinie l ausgedrückt, das mit der Fläche $\int_0^x \operatorname{tg} \beta' \cdot dx$ gleichen Inhalt hat. Zieht man also in dieser Höhe von der x -Axe aus eine Horizontale, so bestimmen die vertikalen Strecken zwischen dieser letztern und dem Kurvenzuge mit den Ordinaten $\operatorname{tg} \beta'$ die verschiedenen Werte von $\operatorname{tg} \beta$. Die Stelle der grössten Durchbiegung ist da, wo $\operatorname{tg} \beta = 0$ bzw. $\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} \beta_1$ wird, d. h. an der Stelle, wo die Horizontale und der Kurvenzug sich schneiden.

In dem obenstehenden Ausdrucke für $y = -x \operatorname{tg} \beta_1 + y'$ ist nun einerseits die Strecke $x \operatorname{tg} \beta_1$ auch durch die Fläche des Rechteckes mit der Grundlinie x und der Höhe $\operatorname{tg} \beta_1$ und anderseits y' durch den Inhalt jener Fläche gemessen, die sich auf die Länge von x zwischen der Abszissenaxe und dem Kurvenzuge mit den Ordinaten $\operatorname{tg} \beta'$ erstreckt.

Daher lassen sich die einzelnen Durchbiegungen y auch jeweils durch die Differenzen der beiden vorerwähnten Flächeninhalte ausdrücken. Die elastische Linie wird solange sinken, als die erstere Fläche $x \operatorname{tg} \beta_1$ mit wachsender Abszisse stärker zunimmt, als die letztere Fläche $\int_0^x \operatorname{tg} \beta' \cdot dx$, was bis zu demjenigen Punkte der Fall ist, wo die obere Rechtecksgerade den genannten Kurvenzug schneidet, d. h. wo eben die grösste Durchbiegung stattfindet. Von hier ab steigt die elastische Linie, bis y im Auflager rechts gleich Null wird entsprechend der hier herrschenden Gleichheit der Inhalte der beiden Flächen.

Hinsichtlich des Mohr'schen Seilpolygonverfahrens soll im folgenden gezeigt werden, dass der Ausdruck:

$$\int_0^x \left\{ \int_0^x \frac{M_b}{EJ} dx \right\} dx = \int_0^x \operatorname{tg} \beta' \cdot dx = y'$$

auch als das statische Moment der Krümmungsfläche

$\int_0^x \frac{M_b}{EJ} dx$ in bezug auf einen in der Entfernung x gelegenen Drehpunkt aufgefasst werden kann:

Denkt man sich die Krümmungsfläche in lauter vertikale Streifenelemente $df_1, df_2, df_3 \dots$ von den Breiten dx eingeteilt, so lässt sich der Ausdruck $\int_0^x \left\{ \int_0^x \frac{M_b}{EJ} dx \right\} dx = y'$ auch in folgender Form schreiben:

$$df_1 dx + (df_1 + df_2) dx + (df_1 + df_2 + df_3) dx + \dots \\ \dots + (df_1 + df_2 + df_3 + \dots + df_n) dx = \\ df_1 (dx + dx + dx + \dots + dx_n) + df_2 (dx + dx + dx + \dots + dx_{n-1}) + \\ + df_3 (dx + dx + dx + \dots + dx_{n-2}) + \dots + df_n dx.$$

Es erscheint also df_1 mit x multipliziert, df_2 mit $(x - dx)$, df_3 mit $(x - 2 dx)$ usw., womit die obige Aussage bewiesen ist. Die Summation über die ganze Lagerentfernung l ergibt das Drehmoment der gesamten Krümmungsfläche um den Auflagerpunkt rechts, seiner Dimension nach bedeutet es die Ordinate y'_{\max} . Dividiert man diesen Summenwert durch l , so erhält man die der totalen Krümmungsfläche zukommende Auflagerreaktion A , die also in Wirklichkeit den Zahlenwert von $\frac{y'_{\max}}{l} = \operatorname{tg} \beta_1$ vorstellt. Wir haben nun nach früherem die Beziehung: $y = y' - x \operatorname{tg} \beta_1$. Mit den vorstehenden Deutungen für y' und $\operatorname{tg} \beta_1$ ergibt sich somit die Durchbiegung y an irgend einer Stelle als das daselbst herrschende Biegemoment, erzeugt durch eine ideelle, durch die Krümmungsfläche veranschaulichte Belastung.

Zur Bestimmung von y teilt man also die Krümmungsfläche in einzelne Flächenstücke endlicher Grösse ein und fasst die ihnen entsprechenden Zahlenwerte als in den Schwerpunkten von jenen angreifende Kräfte auf. Wählt man dann im Kräftepolygon den Pol auf derjenigen Horizontalen, die die Summe der Vertikalkräfte in die beiden Auflagerreaktionen A und B teilt, so schneiden die Seilpolygonseiten auf den nach unten verlängerten Trennungsgeraden der erwähnten Flächenstücke einzelne Punkte der elastischen Linie ab und bilden an die letztere selbst die Tangenten. Der Durchbiegungsmasstab der so gewonnenen elastischen Linie hängt bei sonst gleichen Masstäben, wie beim ersten Verfahren, ganz von der Wahl der Polentfernung ab.

Aus diesen Darlegungen erkennen wir, dass es sich auch bei der Mohr'schen Methode als zweckmässig erweist, zur Festlegung der ideellen Kräfte, der Pol-Lage und der Stelle der grössten Durchbiegung den Linienzug aufzuzeichnen, der aus der ersten Integration hervorgeht. Dann mag eine nochmalige Flächenintegration zur Ermittlung der elastischen Linie wohl als das einfachere Mittel erscheinen, als die Aufzeichnung des Seilpolygonzuges.

Handelt es sich um mehrfach gelagerte Wellen bzw. Träger, so nimmt man zunächst die Auflagerreaktionen bis auf zwei, z. B. die beiden äusseren, schätzungsweise an, und berechnet dann diese letztern wie bei einem statisch bestimmten Träger nach dem Hebelgesetze. Mit den so gewonnenen Reaktionen führt man das ganze Verfahren in genau gleicher Weise wie oben durch. Dabei wird man nun aber zu einer elastischen Linie gelangen, die nicht durch jene Stützpunkte geht, für die man die Gegendrucke

