

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 71/72 (1918)  
**Heft:** 20

**Artikel:** Knickung elastisch eingespannter Stäbe  
**Autor:** Nater, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34757>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

former schliessen sich die Stufenschalter (für je 12 Stufen) an, sodass die Verbindungen mit den Transformeranzapfungen äusserst kurz werden. An den Enden des Kastens befinden sich die Führerstände, auf deren Dach die Stromabnehmer montiert sind. Der Transformer-, sowie der Hauptschalter-Deckel bilden zugleich einen Teil des Lokomotivkasten-Daches, sodass die Hochspannungs-Leitungs-Führungen vereinfacht und unnötige Dach-Durchführungen, und im Lokomotivinnern ein eigentlicher Hochspannungsraum, vermieden werden können. Da die Drehzapfen relativ nahe beieinander liegen, kann der Kasten der kleinen Ausschläge wegen breiter gehalten werden, was für die Bedienung von Vorteil ist. Die Drehzapfen sind leicht zugänglich und in deren Nähe können die nur wenigen flexiblen Kabel zu den Motoren günstig auf die Drehgestelle übergeführt werden.

Diese Anordnung hat weiter für den Betrieb den grossen Vorteil, dass der Führer sich nicht an der Stirne des Fahrzeuges befindet, sondern dass ihm, ohne die Uebersichtlichkeit zu hindern, grössere Massen vorgelagert sind, wodurch ihm ein gewisses Sicherheitsgefühl gegeben ist; dies wird ihn dazu bestimmen, auch in Gefahrmomenten auf seinem Posten auszuharren und die Hilfsmittel zur Sicherung seines Zuges voll anzuwenden. Der Führer befindet sich auch so nahe beim Schaltapparat, dass, wenn auf Vielfachsteuerung aus andern Gründen verzichtet werden will, eine einfache mechanische Betätigung dieser Antriebe stattfinden kann.

Für die Depots und Werkstätten hat diese Anordnung den grossen Vorteil des rascheren Ein- und Ausbaues von Motoren und Apparaten und des relativ kürzeren und leichteren Wagenkastens. Die Hubhöhen für das Aus- und Einbauen können kleinere sein, und es wird daher vielerorts mit bestehenden Anlagen auskommen sein. Auch die Reservehaltung für diese dreiteiligen Lokomotiven ist vereinfacht. Das Lokomotivgewicht ist kleiner, sodass, wie im vorliegenden Fall, ein vermehrtes Gewicht in den mechanischen Teil und das Triebwerk im besondern gelegt werden kann.

Wenn aus Konstruktionsgründen eine Lagerung der Motoren-Blindwelle auf Triebwellenhöhe nicht möglich ist, sind doch noch verschiedene Antriebslösungen möglich; so entsprechend der ersten Lötchberglokomotive (Nr. 121) und der C + C Probelokomotive (Abb. 3) mit Schrägstange als der leichtesten Konstruktion, oder mittels Kurbeldreieck, entsprechend den grossen Lötchberglokomotiven (Abb. 5). Weiter gibt Abb. 6 eine Lösung mit Vertikalstangen-Antrieb wieder. Der schliesslich nach Vorschlag der Lokomotivfabrik Winterthur gewählte Schrägstangenantrieb mit Hilfswelle nach Abb. 4 dürfte eine einwandfreie Konstruktion ergeben.

Das Uebersetzungsverhältnis der Zahnräder wurde bei diesen zehn Lokomotiven auf 1:4 festgesetzt. Die Normalleistung der vier Motoren, am Rad gemessen, beträgt 2100 PS. Das Gewicht des elektrischen Teils von 58 t und jenes des mechanischen Teils von 71 t ergeben 129 t Gesamtgewicht oder 6,72 t auf den laufenden Meter, und 107 t Adhäsionsgewicht.

Zur Schluss sei mit Abb. 7 noch ein Typ kleinerer Leistung mit z. B. 660 PS und 6000 kg (maximal 9000 kg) Zugkraft und 30 (maximal 45) km/h erwähnt, der zeigen soll, dass das beschriebene System auch für leichten Verkehr auf Nebenlinien, Vorortverkehr und für Rangierdienst Verwendung finden kann. Abb. 8 zeigt ferner, dass die dreiteilige Kastenkonstruktion auch ohne weiteres für die *Schmalspur* verwendet werden kann. So lässt sich z. B. für die *Rhätische Bahn*, sogar unter *Beibehaltung* der bisher verwendeten Konstruktionsteile, wie Motoren, Triebwerk usw., eine Verdoppelung der 600 PS- und 800 PS-Lokomotiven erreichen. Hier ist es, der Platzverhältnisse wegen, allerdings nötig, die Motorhauben bis auf Dachhöhe hinauf zu führen, was aber trotzdem dem Führer einen besseren Ausblick gewährt, als bei den Dampflokomotiven.

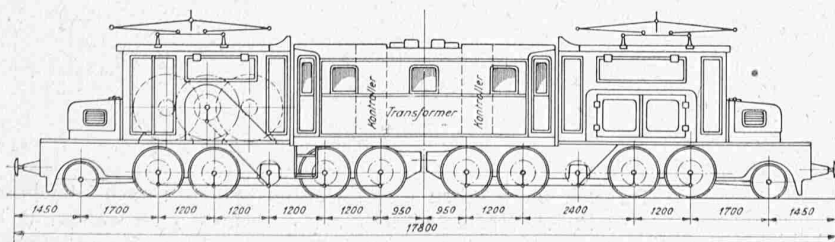


Abb. 8. Projekt einer Schmalspurbahn-Lokomotive (M. F. O.) mit dreiteiligem Kasten. — 1:150.

## Knickung elastisch eingespannter Stäbe.

Von Ing. H. Nater.

Die bekannten Knickformeln von Euler, die unter den bei Knickungsuntersuchungen üblichen Voraussetzungen einer ursprünglichen geraden Axe sowie eines zentrischen Lastangriffes ermittelt wurden, lauten für beiderseits gelenkige Auflagerung, bzw. für beiderseits feste Einspannung:

$$P_{k_{\infty}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \text{ bzw. } P_{k_0} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$$

Diese Grenzwerte kommen praktisch selten in Frage (ausgenommen bei wirklicher Gelenkausbildung), sondern es wird stets eine gewisse Einspannung der Stabenden vorhanden sein, namentlich im Eisenbetonbau durch die Monolithität und bei eisernen Fachwerken durch die Steifigkeit der Knotenpunktausbildungen. Allgemein kann deshalb die Euler'sche Formel wie folgt geschrieben werden:

$$P_k = n \cdot \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (1)$$

wobei  $n$  den Zahlenfaktor bedeutet, mit dem die Knicklast für Spitzenlagerung multipliziert werden muss, um die Knicklast für elastisch eingespannte Auflagerung zu erhalten.  $n$  kann zwischen 1 und 4 variieren und hängt von den Einspannungsgraden der beiden Stabenden ab.

In nachstehender Untersuchung werden die eingangs erwähnten Annahmen einer ursprünglich geraden Stabaxe und einer zentrisch wirkenden Knickkraft beibehalten.

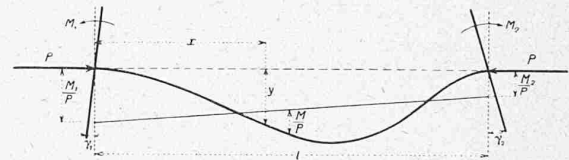


Abbildung 1.

Im Moment des Ausknickens entsteht das in Abb. 1 gegebene Deformationsbild, das allerdings, der grösseren Deutlichkeit wegen, in starker Verzerrung aufgetragen ist. Durch die elastische Einspannung der Stabenden wird deren Verdrehung ein Widerstand entgegengesetzt, der in den Einspannungsmomenten  $M_1$  und  $M_2$  zum Ausdruck kommt.

Die elastische Linie stellt zugleich die mit  $\frac{l}{P}$  multiplizierte Momentenfläche dar, in der die Schlusslinie um  $\frac{M_1}{P}$  bzw.  $\frac{M_2}{P}$  abgesenkt ist. Infolge  $M = 1$  verdrehen sich die Stabwiderlager um  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$ , sodass die Verdrehungen der Stabenden sein werden:

$$\gamma_1 = M_1 \cdot \tau_1 \text{ und } \gamma_2 = M_2 \cdot \tau_2.$$

Das Biegemoment  $M_x$  lautet für den Querschnitt in  $x$

$$M_x = P \cdot y + M_1 \cdot \frac{l-x}{l} + M_2 \cdot \frac{x}{l} \quad (2)$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} EJ = -M_x = -P \cdot y - M_1 \cdot \frac{l-x}{l} - M_2 \cdot \frac{x}{l} \quad (3)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ist nach Föppl (Bd. III § 64 der 5. Auflage) von der Form:

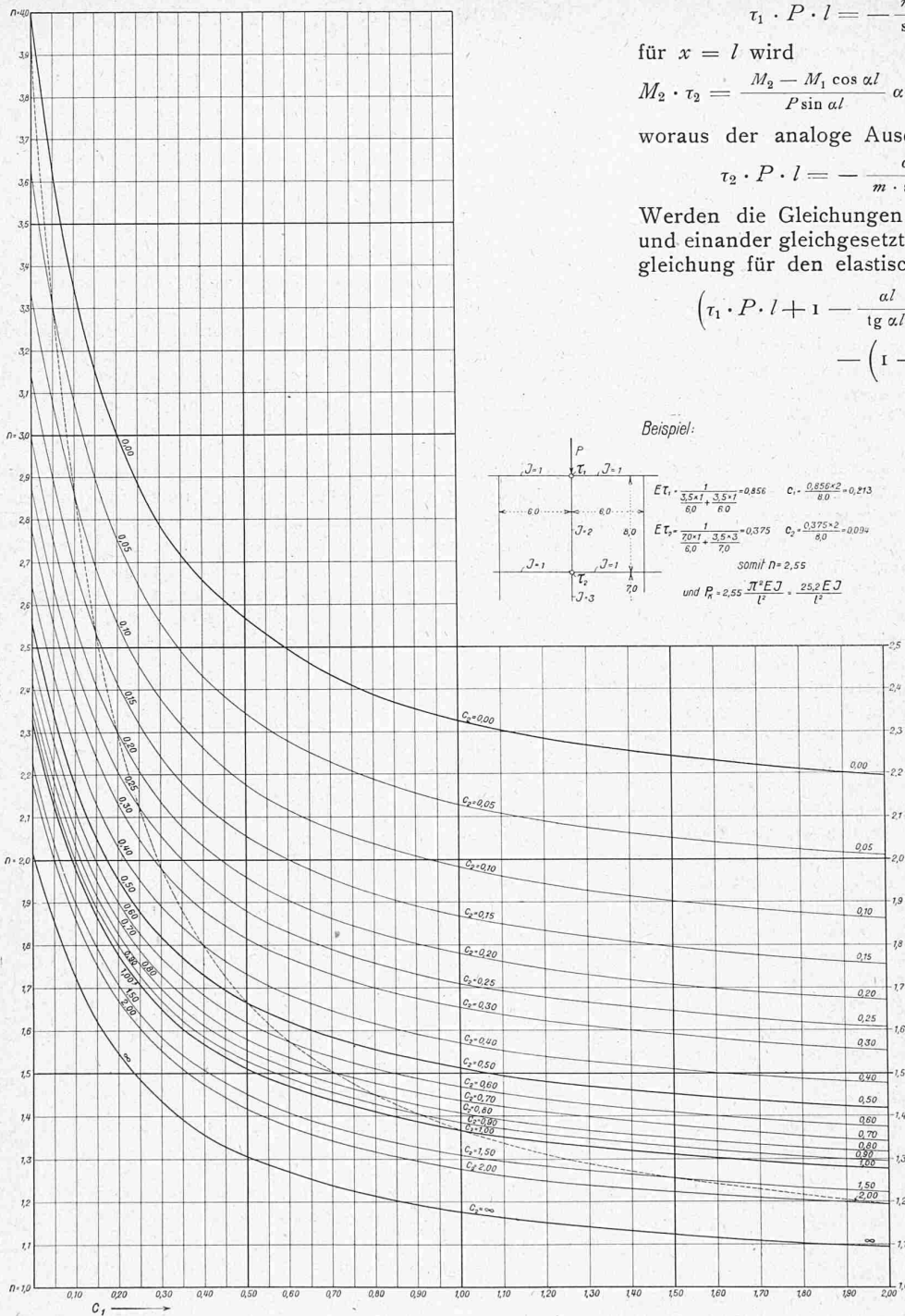
$$y = C_1 \cdot \sin \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x - \frac{M_1}{P} \cdot \frac{l-x}{l} - \frac{M_2}{P} \cdot \frac{x}{l} \quad (4)$$

$$\text{wobei } \alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \text{ bedeutet} \quad (5)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestehen die Bedingungen, dass für  $x = 0$  und  $x = l$  die Ausbiegung  $y$  gleich Null werden muss. Für  $x = 0$  wird

$$0 = C_2 - \frac{M_1}{P}$$

$$\text{somit } C_2 = \frac{M_1}{P} \quad (6)$$



und für  $x = l$

$$0 = C_1 \sin \alpha l + \frac{M_1}{P} \cos \alpha l - \frac{M_2}{P}$$

woraus

$$C_1 = \frac{M_2 - M_1 \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} \quad (7)$$

Zur Eliminierung der Unbekannten  $M_1$  und  $M_2$  hat man die Bedingungen, dass sich die Einspannstellen um  $-M_1 \tau_1$  bzw. um  $+M_2 \cdot \tau_2$  verdrehen.

Die erste Ableitung der Gleichung der elastischen Linie ergibt

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cdot \alpha \cos \alpha x - C_2 \cdot \alpha \sin \alpha x + \frac{M_1}{Pl} - \frac{M_2}{Pl} \quad (8)$$

Für  $x = 0$  wird

$$-M_1 \cdot \tau_1 = \frac{M_2 - M_1 \cos \alpha l}{P \cdot \sin \alpha l} \alpha + \frac{M_1}{Pl} - \frac{M_2}{Pl}$$

Setzt man für  $\frac{M_2}{M_1} = m$ , so folgt nach Division beider Seiten mit  $M_1$  und Multiplikation mit  $Pl$

$$\tau_1 \cdot P \cdot l = -\frac{m \cdot \alpha l}{\sin \alpha l} + \frac{\alpha l}{\lg \alpha l} - 1 + m \quad (9)$$

für  $x = l$  wird

$$M_2 \cdot \tau_2 = \frac{M_2 - M_1 \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} \alpha \cos \alpha l - \frac{M_1}{P} \alpha \sin \alpha l + \frac{M_1}{Pl} - \frac{M_2}{Pl}$$

woraus der analoge Ausdruck zu Gleichung (9) entsteht:

$$\tau_2 \cdot P \cdot l = -\frac{\alpha l}{m \cdot \sin \alpha l} + \frac{\alpha l}{\lg \alpha l} - 1 + \frac{1}{m} \quad (10)$$

Werden die Gleichungen (9) und (10) nach  $m$  aufgelöst und einander gleichgesetzt, so ergibt sich daraus die Knickgleichung für den elastisch eingespannten Stab zu

$$\left( \tau_1 \cdot P \cdot l + 1 - \frac{\alpha l}{\lg \alpha l} \right) \left( \tau_2 \cdot P \cdot l + 1 - \frac{\alpha l}{\lg \alpha l} \right) - \left( 1 - \frac{\alpha l}{\sin \alpha l} \right)^2 = 0 \quad (11)$$

Da die Gleichung von transzendenten Form ist, kann die Unbekannte  $P$  nicht explizite dargestellt werden; am geeignetsten ist daher die graphische Lösung, indem man für  $P$  und  $\tau_1$  alle möglichen Werte annimmt und daraus die  $\tau_2$  berechnet und aufrägt.

Zur bessern Auflösung wird die Gleichung (11) noch etwas umgewandelt.

Aus Gleichung (1)

$$P = n \cdot \frac{\pi^2 E J}{l^2}$$

und aus Gleichung (5)

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E J}}$$

folgt  $\alpha = \frac{\pi}{l} \sqrt{n}$

Wird  $\pi \sqrt{n} = x$  gesetzt, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \alpha l &= x \\ n &= \frac{x^2}{\pi^2} \\ P &= \frac{x^2 E J}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Gleich. (11) geht somit über in

$$\left( x^2 \cdot \frac{\tau_1 E J}{l} + 1 - \frac{x}{\lg x} \right) \times \left( x^2 \cdot \frac{\tau_2 E J}{l} + 1 - \frac{x}{\lg x} \right) - \left( 1 - \frac{x}{\sin x} \right)^2 = 0$$

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$C_1 = \frac{\tau_1 E J}{l}, \quad C_2 = \frac{\tau_2 E J}{l} \quad (13)$$

(Die Zahlenwerte  $C$  stellen den Einspannungsgrad oder Einspannungs-Koeffizienten der Stabenden dar.)

Es wird

$$\left( C_1 \cdot x^2 + 1 - \frac{x}{\lg x} \right) \left( C_2 \cdot x^2 + 1 - \frac{x}{\lg x} \right) - \left( 1 - \frac{x}{\sin x} \right)^2 = 0$$

woraus

$$C_2 = -\frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\lg x} \right) + \frac{\left[ \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \right]^2}{C_1 + \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\lg x} \right)} = A + \frac{B}{C_1 - A} \quad (14)$$

Da sich  $n$  zwischen 1 und 4 ändert, so sind nach Gleichung (12) für  $x$  Werte zwischen  $\pi \sqrt{1}$  und  $\pi \sqrt{4}$  zu wählen, d. h.  $\pi < x < 2\pi$ .  $C_1$  kann zwischen 0 und  $\infty$  alle möglichen Werte annehmen; praktisch kommen jedoch nur Werte

zwischen 0 und 2 in Betracht, da für  $C > 2$  die Einspannung der Stabenden nicht mehr viel ausmacht.

Ist  $C = 0$ , so besteht feste Einspannung, u. zw., wenn

- a)  $\tau = 0$  (Einspannungstelle unverdrehbar)  
 oder b)  $J = 0$  (massenloser Stab)  
 oder c)  $l = \infty$  (unendlich langer Stab)

umgekehrt ist bei  $C = \infty$  der Stab gelenkig gelagert, d. h. wenn

- a)  $\tau = \infty$  (Einspannungstelle vollkommen drehbar)  
 oder b)  $J = \infty$   
 oder c)  $l = 0$

Die Grenzwerte unter b) und c) kommen jedoch praktisch nicht in Frage.

In begedruckter Tafel sind die nach Gleichung (14) berechneten Werte von  $C_2$  für bestimmte Intervalle von  $C_1$  und  $x$  aufgetragen, wobei die  $x$  nach Gleichung (12) auf  $n = \frac{x^2}{\pi^2}$  umgerechnet wurden.

Die Knickkraft eines beliebig eingespannten Stabes lässt sich nun leicht bestimmen; bei gegebenen Einspannungskoeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  findet man  $n$  als die Ordinate des Schnittpunktes der  $C_1$ -Vertikalen und der  $C_2$ -Kurven, und es ist dann

$$P_k = n \cdot \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l^2} \quad \dots \quad (1)$$

z. B. ist für  $C_1 = 0,80$  und  $C_2 = 0,30$

$$n = 1,70$$

Das gleiche Resultat erhält man natürlich, wenn  $C_1 = 0,30$  und  $C_2 = 0,80$  ist. Die Knicklast beträgt also für diese Einspannungskoeffizienten das 1,7-fache der Knicklast eines Stabes mit Spitzenlagerung.

Aus der Hauptgleichung (11) lassen sich die Euler'schen Formeln übrigens leicht ableiten, indem  $\tau = 0$  oder  $\tau = \infty$  gesetzt wird. Es führt dies zu folgenden Sonderfällen:

a) gelenkige Auflagerung.

Es ist  $\tau_1 = \tau_2 = \infty$ ; somit ist das Produkt der beiden ersten Klammern auch gleich  $\infty$ , oder

$$\frac{al}{\sin al} = \infty$$

Dies ist nur möglich, wenn  $\sin al = 0$  oder wenn

$$al = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

$al$  muss von 0 verschieden sein, da die Knickkraft ja eine absolute Grösse darstellt, somit besteht als erste Möglichkeit

$$al = \pi$$

worin für

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \text{ gesetzt wird,}$$

sodass

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

b) fest eingespannte Auflagerung.

Da  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  ist, erhält man

$$\left(1 - \frac{al}{\lg al}\right)^2 - \left(1 - \frac{al}{\sin al}\right)^2 = 0$$

oder

$$\lg al = \sin al$$

somit

$$\cos al = +1$$

Dies ist der Fall bei  $al = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

Wie oben kommt der nächste Wert nach 0 in Frage, sodass

$$al = 2\pi \quad \text{oder} \quad l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 2\pi$$

und

$$P = 4 \cdot \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

c) einseitig eingespannter Stab.

Es ist  $\tau_1 = \infty$  und  $\tau_2 = 0$ , sodass

$$1 - \frac{al}{\lg al} = \frac{\left(1 - \frac{al}{\sin al}\right)^2}{\infty + 1 - \frac{al}{\lg al}} = 0$$

oder

$$al = \lg al$$

Dies trifft nach  $al = 0$  zum erstenmal zu bei

$$al = 4,4935$$

oder

$$l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 4,4935$$

und

$$P = 20,19 \frac{EJ}{l^2} = \sim 2 \cdot \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

d) an beiden Enden gleichmässig, elastisch eingespannter Stab.

Ferner möge noch der Fall betrachtet werden, wo allgemein  $\tau_1 = \tau_2$  wird; nach Gleichungen (9) oder (10) folgt, wenn für  $m = 1$  gesetzt wird

$$\begin{aligned} \tau \cdot P \cdot l &= -al \left( \frac{1}{\sin al} - \frac{1}{\lg al} \right) = -al \frac{1 - \cos al}{\sin al} \\ &= -al \cdot \lg \frac{al}{2} \end{aligned}$$

Nach Einführung der unter Gleichung (12) angeführten Substitutionen wird

$$Cx = -\lg \frac{x}{2}$$

Die sich daraus ergebende Kurve ist in der Tafel punktiert aufgetragen worden; sie verbindet die Kreuzungspunkte der gleichwertigen  $C_1$  und  $C_2$ -Kurven.

Der Einfluss der elastischen Einspannung auf die Knickung möge in nachstehenden zwei Beispielen näher gezeigt werden.

### 1. Eisenbetonsäulen einer Hochbahn.

Die einzelnen Stablängen und Trägheitsmomente gehen aus nachstehender Skizze (Abb. 2) hervor:

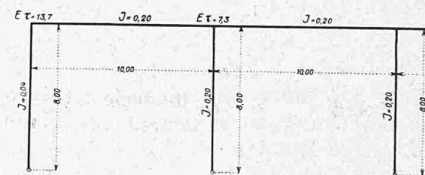


Abbildung 2.

Unten werden Gelenke ausgebildet, sodass  $\tau_u = \infty$  wird. Die Einheitsdrehwinkel der Pfeilerkopfanschlüsse sind nach den bekannten Ritter'schen Formeln

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1 + \frac{2EJ}{l} \cdot \tau^*} \cdot \frac{l}{3} \\ \tau &= \frac{(2l - 3a)}{(l - a)} \cdot \frac{l}{6EJ} \\ \tau^* &= \frac{1}{\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_r}} \end{aligned}$$

in sinngemässer Weise ermittelt worden, wonach für die Aussensäule

$$E\tau_0 = 13,7; E\tau_u = \infty$$

wird und sich die Einspannungs-Koeffizienten nach Gleichung (13) zu

$$C_0 = \frac{13,7 \times 0,04}{8,00} = 0,0685 \text{ und } C_u = \infty \text{ berechnen.}$$

Nach der Tabelle ergibt sich

$$n = 1,80$$

also

$$P = 1,80 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Für die erste Mittelsäule wird

$$E\tau_0 = 7,3 \text{ und } E\tau_u = \infty$$

woraus  $C_0 = \frac{7,3 \times 0,20}{8,00} = 0,184$  und  $C_u = \infty$

Nach der Tabelle wird

$$P = 1,56 \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l^2}$$

### 2. Druckstäbe eines Eisenfachwerkes.

Das Axenbild, sowie die Längen und Trägheitsmomente der einzelnen Stäbe des Fachwerkes sind umstehender Skizze zu entnehmen, in der die Längen in  $dm$  über, die Trägheitsmomente in  $dm^4$  unter den Stäben eingetragen sind.

Die Anschlussdrehwinkel der einzelnen Stäbe werden nach den vorhin angeführten Formeln ermittelt, wobei als erste Annäherung  $\tau = \frac{l}{3,5 EJ}$  angenommen wird.



