Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 69/70 (1917)
Heft: 7

Artikel: Notiz über Kräftezusammensetzungsfigur und Schwerpunkt
Autor: Kiefer, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33832

Band 69. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 7.

Notiz über Kräftezusammensetzungsfigur und Schwerpunkt.

Von *A. Kiefer* in Zürich.

Wenn die beiden gerichteten Strecken AP, BQ (Abbildung 1) zwei Kräfte darstellen und die Linien AC, QR parallel zu PB und die Linien BC, PR parallel zu AQ gezogen sind, so ist CR die resultierende Kraft von AP und BQ.[1]) Projiziert man nämlich die Kräfte AP, BQ parallel zu PB auf CR, so ist die Summe der Projektionen gleich CR und wenn man die Kräfte AP, BQ parallel zu AQ auf CR projiziert, so ist die Summe der Projektionen ebenfalls gleich CR; ferner ist $\measuredangle CAP = CAB = CQB$ und $\measuredangle RAP = RQP = RQB$. In gleicher Weise ist DE die Resultierende von AB, PQ. Die Linien OC, AB halbieren sich gegenseitig, ebenso OR, PQ; folglich ist die Resultierende CR parallel zu $M_1 M_2$, doppelt so gross und von O doppelt so weit entfernt wie $M_1 M_2$. Ebenso ist DE parallel $M_3 M_4$, doppelt so gross und in doppeltem Abstande von O. Wird umgekehrt eine Kraft CR in zwei Komponenten AP, BQ zerlegt und verbindet man die Mitte M_1 ihrer Anfangspunkte mit der Mitte M_2 der Endpunkte, so ist diese Linie parallel zur Resultierenden und halb so gross.

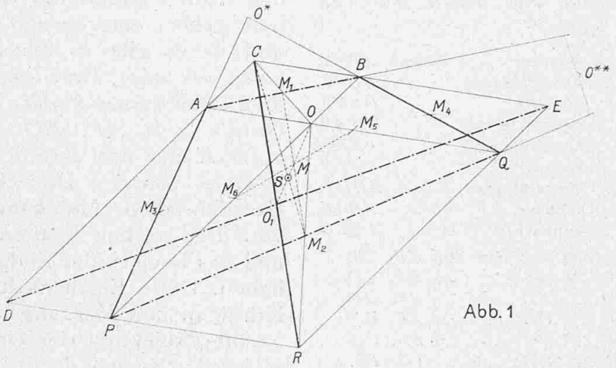

Abb. 1

Die Figur enthält zwei Tripel von parallelen Geraden

DAC, POB, RQE und DPR, AOQ, CBE.

Auf jeder der sechs Geraden liegen drei, durch die Buchstaben bezeichneten, Punkte. Diese neun Punkte bilden die Ecken von sechs Dreiecken, derart, dass jede Ecke eines Dreieckes auf einer andern Geraden desselben Tripels liegt und das Dreieck auf beiden Tripeln vorkommt, nämlich:

DOE, DBQ, ABR, APE, CPQ, COR.

Aus dem Grunde, dass jedes Dreieck seine Ecken auf den drei Geraden beider Tripel hat (z. B. ABR auf DC, PB, RE und zugleich auf AQ, CE, DR und ebenso PQC u. s. f.), *müssen alle diese sechs Dreiecke denselben Schwerpunkt S haben.* Jeder von den neun Punkten ist eine gemeinsame Ecke für zwei der sechs Dreiecke (z. B. A von ABR und APE); die der gemeinsamen Ecke gegenüberliegenden Seiten der zwei Dreiecke bilden die Diagonalen eines Parallelogramms (z. B. gehört zu A das Parallelogramm $PBER$; zu O gehört $DCER$) und *der gemeinsame Schwerpunkt S liegt auf jeder der neun Linien, die von je einem der neun Punkte nach dem Diagonalenschnittpunkt des zugehörigen Parallelogramms gehen und teilt sie im Verhältnis von 2 : 1.* Jeder von den neun Punkten ist der Schnittpunkt von zwei der sechs Tripel-Geraden und das zugehörige Parallelogramm wird von den vier andern Geraden gebildet, von denen keine durch den Punkt geht. Die neun Diagonalenschnittpunkte der neun Parallelogramme bilden eine zur Figur der zwei Tripel ähnliche und für S als Aehnlichkeitspunkt ähnlich gelegene Figur. Aus diesem Grunde haben auch die Dreiecke $O' M_1 M_2$, $O' M_3 M_4$, usf. den Punkt S zum Schwerpunkt.[2]) *Dieser ausgezeichnete Punkt S ist zugleich der Schwerpunkt des Viereckes ABQP.* Das Viereck wird nämlich durch die Diagonale AQ in zwei Dreiecke ABQ, APQ geteilt, die sich verhalten wie $BO:OP$; bringt man diese Linien parallel und in gleicher Grösse als Kräfte nach den Ecken jedes der zwei Dreiecke, so muss der Schwerpunkt des Viereckes auf der Resultierenden der drei gleich grossen, parallelen Kräfte CD, BP, ER liegen. Ebenso muss die Resultierende der drei parallelen, unter einander gleichen Kräfte CE, AQ, DR durch den Schwerpunkt des Viereckes gehen. Nun liegen die Ecken aller sechs Dreiecke auf beiden Gruppen der parallelen Kräfte und folglich schneiden sich die zwei Resultierenden der zwei Kräftegruppen im gemeinsamen Schwerpunkt aller Dreiecke, der also zugleich der Schwerpunkt des Viereckes ist. Uebrigens geht die Resultierende von CD und ER durch O' und verhält sich zu BP wie $2:1$; die Resultierende von allen drei Kräften CD, ER, BP teilt also OO' im Verhältnis von $2:1$. Ebenso geht die Resultierende von CE und DR durch O' und verhält sich zu AQ wie $2:1$; die Resultierende der drei Kräfte CE, DR, AQ teilt also ebenfalls OO' im Verhältnis von $2:1$, d. h. der Punkt S, der OO' im Verhältnis $2:1$ teilt, und welcher der Schwerpunkt der Dreiecke OCR, ODE und damit auch der andern vier Dreiecke ist, ist zugleich der Schwerpunkt des Viereckes $ABQP$. *Hebt man von den neun Punkten die vier Punkte C, D, R, E speziell hervor, so müssen die Linien von ihnen nach den Mitten M_2, M_4, M_1, M_3 der Seiten des Viereckes ABQP durch seinen Schwerpunkt S gehen*; dieser spezielle Fall drückt den bekannten Satz von *Edmond Henry* über den Schwerpunkt des Viereckes aus.[3]) Zieht man von O' die Parallelen zu den Diagonalen AQ, BP des Viereckes, so werden die Diagonalen in M_5, M_6 halbiert; $O'O$ und $M_5 M_6$ halbieren sich gegenseitig und es ist $OM:MS = 3:1$. Als Mitte von $M_5 M_6$ ist M der Schwerpunkt der vier Punkte A, B, Q, P und daher auch die Mitte von $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$. *Der Schwerpunkt eines Viereckes wird gefunden, indem man den Schnittpuukt O seiner Diagonalen mit dem Schwerpunkt M seiner vier Ecken verbindet und diese Linie um $^1/_3$ verlängert.*

Die Abbildung 1 weist noch andere Vierecke von der Eigenschaft des Viereckes $ABQP$ auf; die Ecken dieses Viereckes liegen auf den Seiten des Parallelogramms $CDRE$, das von vier der sechs Tripelgeraden gebildet wird. Die zwei andern Tripelgeraden schneiden die Gegenseiten des Parallelogramms in den Gegenecken des Viereckes und bilden seine Diagonalen. Betrachtet man eine Seite des Viereckes und die umgekehrte Gegenseite, AP und BQ, oder AB und PQ, als Kräfte, so ist ihre Resultierende die eine oder andere Diagonale CR oder DE des Parallelogramms. Der Schwerpunkt des Viereckes ist der ausgezeichnete Punkt S. Diese Eigenschaften gelten in gleicher Weise für jedes der neun Parallelogramme, die von je vier

[1]) Schweiz. Bauzeitung, Bd. 43, Nr. 6 (vom 6. Februar 1904).

[2]) Man kann noch andere derartige Dreiecke angeben. Z. B. die Dreiecke über jeder der 18 Seiten der neun Parallelogramme als Grundlinien; die Spitzen dieser 18 Dreiecke fallen auf die sechs Tripelgeraden und entstehen dort durch Vertauschen der Abschnitte. Ferner Dreiecke, von denen zwei Seiten auf je zwei Tripelgeraden, oder auf je zwei Diagonalen fallen.

[3]) *Gysel, J.*, Zur Konstruktion des Schwerpunktes einer ebenen Vielecksfläche, Beilage zum Jahresbericht des Gymnasiums Schaffhausen für 1894/95. S. 6.

der sechs Tripelgeraden gebildet und von den jeweiligen zwei andern Tripelgeraden in den Gegenecken des zugehörigen Viereckes geschnitten werden. Dabei können die Vierecke überschlagen oder konkav werden. Nimmt man z. B. das Parallelogramm $CAOB$, so werden seine Seiten von den zwei andern Tripelgeraden DR, RE in den Gegenecken D, P und Q, E des überschlagenen Viereckes $DQPE$ geschnitten, dessen Schwerpunkt wieder der Punkt S ist. Der Inhalt des überschlagenen Viereckes $DQPE$ ist nämlich die Differenz der Dreiecke DPE und DPQ, deren Inhalte sich wie $RE : RQ$ verhalten; der Schwerpunkt des Viereckes liegt also auf der Resultierenden der drei gleichen und parallelen Kräfte AD, OP, QR. Ebenso liegt er auf der Resultierenden der drei gleichen parallelen Kräfte OQ, PR, BE. Nun liegen wieder die Ecken der eingangs hervorgehobenen sechs Dreiecke DOE, DBQ, ABR, APE, CPQ, COR auf beiden Gruppen der drei parallelen Kräfte und folglich ist der Schnittpunkt der beiden Resultierenden, das ist der Schwerpunkt des Viereckes $DQPE$, identisch mit dem Schwerpunkt S der sechs Dreiecke; dabei ist AB die resultierende Kraft von DE, QP und CO von DQ, EP. *Der Punkt S ist also der gemeinsame Schwerpunkt von neun einfachen Vierecken, von denen jedes zu einem der neun Parallelogramme gehört.*

Dem Parallelogramm	$CDRE$	entspricht das	konvexe	Viereck	$APQB$,
„ „	$CAOB$	„ „	überschlagene	„	$DQPE$,
„ „	$CAQE$	„ „	konkave	„	$DBRO$,
„ „	$BOQE$	„ „	überschlagene	„	$CPAR$,
„ „	$ADPO$	„ „	überschlagene	„	$CRBQ$,
„ „	$ADRQ$	„ „	konkave	„	$CPEO$,
„ „	$OPRQ$	„ „	überschlagene	„	$ABDE$,
„ „	$CDPB$	„ „	konkave	„	$AROE$,
„ „	$BPRE$	„ „	konkave	„	$DQCO$.

CR	ist die Resultierende von	AP, BQ	und DE	jene von	AB, PQ,
CO	„ „ „ „	DQ, EP	„ AB	„ „	DE, QP,
CQ	„ „ „ „	BR, DO	„ AE	„ „	OR, DB,
BQ	„ „ „ „	CR, PA	„ OE	„ „	AR, PC,
AP	„ „ „ „	CR, QB	„ DO	„ „	RB, CQ,
AR	„ „ „ „	CP, OE	„ DQ	„ „	CO, PE,
OR	„ „ „ „	AE, BD	„ PQ	„ „	DE, BA,
CP	„ „ „ „	AR, EO	„ DB	„ „	RO, AE,
BR	„ „ „ „	CQ, OD	„ PE	„ „	DQ, OC.

Nimmt man irgend eines der oben aufgezählten neun Vierecke, z. B. $ABQP$, so sind A, B, Q, P seine vier Ecken und folgen in dieser Reihenfolge aufeinander. Durch Aendern der Reihenfolge bestimmen die vier Punkte noch zwei andere einfache Vierecke, nämlich $ABPQ$ und $APBQ$, die überschlagen sind. Bei jedem dieser zwei neuen Vierecke kann man zwei Gegenseiten nehmen, die Richtung der einen umkehren, beide als Kräfte auffassen und die Resultierende aufsuchen; man erhält in der Figur wie früher für jedes Viereck wieder zwei Tripel von parallelen Geraden, sechs Dreiecke und neun Vierecke mit dem gleichen Schwerpunkt, ferner neun Parallelogramme, deren Diagonalen die Resultierenden von je zwei Kräften sind.

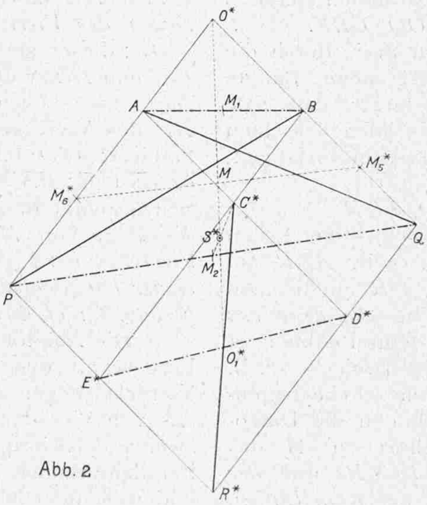

Abb. 2

In der Abbildung 2 ist das überschlagene Viereck $ABPQ$ herausgezeichnet, die Seite AQ und die umgekehrte Gegenseite BP als Kräfte aufgefasst und die Kräftezusammensetzungsfigur hergestellt; $C^* R^*$ ist die Resultierende von AQ, BP und $D^* E^*$ die Resultierende von QP, AB. Der ausgezeichnete Schwerpunkt ist S^*. *Wie früher ist* $MS^* = {}^1/_3\, O^*M$; dabei bezeichnet O^* den Diagonalschnittpunkt des Viereckes $ABPQ$ und M den Schwerpunkt seiner vier Ecken.

Dieselbe Konstruktion kann man für das Viereck $APBQ$ wiederholen; sein Schwerpunkt S^{**} liegt so, dass $MS^{**} = {}^1/_3\, O^{**}M$ ist. (O^{**} ist in Abbildung 1 zu sehen). *Die drei Schwerpunkte der drei einfachen Vierecke ABQP, ABPQ, APBQ, welche durch vier Punkte A, B, Q, P bestimmt sind, bilden ein Dreieck* SS^*S^{**}, *das zum Dreieck der Diagonalpunkte* O, O^*, O^{**} *des vollständigen Viereckes A, B, Q, P ähnlich ist und zu ihm für den Schwerpunkt M der vier Punkte A, B, Q, P als innerer Aehnlichkeitspunkt im Verhältnis 1 : 3 ähnlich liegt.* Da $SM = {}^1/_4\, SO$ und O als jeder der neun Punkte C, B, E, A, O, Q, D, P, R *auftreten kann, so ist die Gesamtheit der Punkte M eine zur Figur jener neun Punkte für S als äusserer Aehnlichkeitspunkt im Verhältnis 4 : 1 ähnlich gelegene Figur.*

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass man auch das konvexe Viereck als Differenz von Dreiecken auffassen kann; in Abbildung 1 ist Viereck

$$ABQP = \Delta\ PO^*Q - AO^*B = \Delta\ AO^{**}P - BO^{**}Q.$$

Daher liegen die Schwerpunkte der Dreiecke PO^*Q, AO^*B auf der Parallelen durch S zu $M_1 M_2$ und die Schwerpunkte der Dreiecke $AO^{**}P$, $BO^{**}Q$ liegen auf der Parallelen durch S zu $M_3 M_4$.

In der Abbildung 1 erscheint jede von den 18 Diagonalen der neun Parallelogramme, gemäss der oben angegebenen Tabelle, als Resultierende von zwei bestimmten andern Diagonalen. Kehrt man die Resultierende um, so entsteht ein System von drei Kräften, von denen jede mit den beiden andern im Gleichgewicht ist. Zu jeder Diagonale gehört eine einzige Gruppe von drei solchen Kräften, und daher gibt es sechs solcher Gruppen, *die 18 Diagonalen der neun Parallelogramme gehen somit sechsmal zu dreien durch einen Punkt.* Nimmt man jetzt irgend eine solche Gruppe z. B. AP, BQ, RC, so bilden die Anfangspunkte A, B, R der drei Kräfte und ebenso die Endpunkte P, Q, C je eines von den Dreiecken, deren Ecken auf alle Tripel-Geraden fallen. Man kann also sagen, dass für jede Gruppe von drei solchen Kräften das Dreieck der Anfangspunkte und das Dreieck der Endpunkte gemeinsamen Schwerpunkt haben. Diese Eigenschaft bleibt bestehen, wenn man die Kräfte in den Wirkungslinien verschiebt; denn auch dann ist die Projektion der einen Kraft auf irgend eine Gerade gleich der Summe der Projektionen der zwei andern Kräfte. *Aus demselben Grunde muss bei beliebig vielen Kräften, die im Gleichgewicht sind, der Schwerpunkt der Anfangspunkte aller Kräfte mit dem Schwerpunkt aller Endpunkte zusammenfallen.* Haben die Kräfte, die im Gleichgewicht sind, den gleichen Anfangspunkt, so muss er der Schwerpunkt aller Endpunkte sein und umgekehrt. Hat man n Kräfte, die den gleichen Anfangspunkt besitzen, so muss die Resultierende durch den Schwerpunkt der Endpunkte gehen und n mal so gross sein wie die Strecke vom Anfangspunkt bis zum Schwerpunkt; denn wenn man die Resultierende vom Anfangspunkt der Kräfte aus in entgegengesetzter Richtung nimmt, so ist sie mit den n Kräften im Gleichgewicht, und der Schwerpunkt aus dem Schwerpunkt der n Punkte und dem Endpunkt der entgegengesetzt genommenen Resultierenden fällt in den Anfangspunkt und teilt die Strecke zwischen den zwei Punkten im Verhältnis 1 : n.

Auf die Abbildung 1 angewendet: Da die sechs Dreiecke DOE, DBQ, ABR, APE, CPQ, COR ihre Schwerpunkte in S haben, so folgt, dass wenn man die Strecken von S nach den Ecken jedes der Dreiecke als Kräfte auffasst, die drei Kräfte für jedes Dreieck im Gleichgewicht sind. Der Punkt S, welcher Schwerpunkt der Dreiecke ABR, PQC, ODE ist, ist deswegen der Schwerpunkt der neun Punkte C, B, E, A, O, Q, D, P, R. *Betrachtet man daher die Strecken von S nach diesen neun Punkten als Kräfte, so müssen diese neun Kräfte im Gleichgewicht sein.* Die Resultierende der drei Kräfte mit O' als Anfangspunkt nach den drei Ecken irgend eines der Dreiecke DOE, DBQ, ABR, APE, CPQ, COR ist immer gleich $O'O$; die Resultierende der drei Kräfte vom Mittelpunkt irgend eines der neun Parallelogramme, z. B. M_1, nach den Ecken irgend eines der sechs Dreiecke ist gleich der Strecke vom Mittelpunkt des Parallelogramms bis zum Schnittpunkt der zwei Tripelgeraden, die nicht Seiten des Parallelogramms sind ($M_1 R$). Die Resultierende der neun Kräfte mit O' als Anfangspunkt und den neun Punkten $C, B, E, A, O, Q, D, P, R$ als Endpunkte ist $9 \cdot O'S = 3 \cdot O'O$; die Resul-

Abb. 1. Hotelansicht von Osten, rechts die Vorfahrt.

tierende der Kräfte vom Mittelpunkt eines der Parallelogramme, z. B. M_1, nach den neun Punkten ist $3 \cdot M_1 R$ und ähnlich für die andern Parallelogramme. Nimmt man irgend einen der neun Punkte, so teilt der Schwerpunkt der acht andern die Strecke zwischen dem gewählten Punkt und S von aussen im Verhältnis $9:1$; die Kräfte von irgend einem der neun Punkte nach den acht andern haben eine Resultierende, die durch S geht und $8 \cdot \frac{9}{8}$ d. h. 9 mal so gross ist wie die Strecke von dem Punkte bis nach S. Wählt man von den neun Punkten irgend k Punkte, so bestimmt jeder von den k Punkten mit den acht andern von den neun Punkten ein Büschel von acht Kräften; von diesen $8\,k$ Kräften heben sich die $2\binom{k}{2}$ Kräfte auf, welche die k Punkte unter einander verbinden, sodass die k Büschel $8\,k - 2\binom{k}{2} = 8\,k - k\,(k-1) = k\,(9-k)$ Kräfte darstellen, welche die k Punkte mit den andern $9 - k$ Punkten verbinden. Die acht Kräfte jedes Büschels haben eine Resultierende, die von seinem Scheitelpunkt durch S geht und 9 mal so gross ist wie die Strecke vom Scheitelpunkt bis S. *Folglich geht die Resultierende aller k Büschel, d. i. die Resultierende der $k \cdot (9-k)$ Kräfte von dem Schwerpunkt der k Punkte nach dem Punkt S und ist $9\,k$ mal so gross wie diese Strecke.* [1]) Setzt man $k = 3$ und wählt als die drei Punkte die Ecken irgend eines der bekannten sechs Dreiecke, so müssten die entstehenden 18 Kräfte im Gleichgewicht sein, weil der Schwerpunkt des Dreieckes mit dem Schwerpunkt der neun Punkte zusammenfällt. Für $k = 4$ und A, B, Q, P als die vier Punkte, wird die Resultierende der 20 Kräfte gleich $36\,MS$ (vergl. Bd. LIII, Nr. 5 und 12 vom 30. Januar und 20. März 1909 dieser Zeitschrift).

[1]) Dieser Satz ist ein spezieller Fall von einem allgemeineren Satz über beliebig viele, beliebig gelegene Punkte und deren Schwerpunkt.

Das Suvrettahaus bei St. Moritz.

Ein Beitrag zum Hotelbau-Problem der Gegenwart.

Von Dr. *S. Guyer*.

(Mit Tafeln 13 und 14.)

Seit Jahren tobt im Schweizerland der Krieg gegen die unsere schönsten Gegenden entstellenden Hotelkästen. Und nun ist 1911/12 ein neuer solcher Bau entstanden, noch höher, noch grösser, noch massiger als seine Vorgänger. Was aber das merkwürdige dabei ist: trotzdem müssen wir ihn schön finden! Es ist das für die Gebrüder Bon durch Architekt *K. Koller* in St. Moritz ausgeführte „Suvrettahaus“.

Es liegt am Eingang in die Val Suvretta, etwas oberhalb der von St. Moritz nach Campfèr und Maloja führenden Stasse, inmitten von Arven- und Lärchengruppen, an einer nach Süden zu geneigten Halde, und zwar an der Stelle, wo sich dem von St. Moritz Kommenden jener überraschende Ausblick auf das Oberengadin mit seinen Seen eröffnet (Tafel 13, unten). Die Lage ist also in jeder Hinsicht sehr glücklich gewählt, weil sie wirklich einzig und allein auf gute Stellung zur Sonne und auf die Schönheit der Natur Rücksicht nimmt, ein Luxus, den sich allerdings nur ein Haus leisten darf, das für sich allein seinen Gästen all das bieten kann, was sonst nur ein grosser Kurort zu geben imstande ist.

Die nächste *Umgebung* des Hauses ist im grossen und ganzen in ihrer natürlichen Unberührtheit gelassen. Nur vor der Fassade sind grosse ebene Plätze, die im Sommer dem Tennissport, im Winter als Eisbahn dienen. Ich muss gestehen, dass ich für derartige Anlagen, die sich ja beinahe bei jedem Hotel vorfinden, nicht gerade grosse Begeisterung hege. In England, wo der Tennisplatz nichts als eine grosse Rasenfläche ist, da darf er vor der Terrasse, vor der Hauptfront des Hauses angelegt werden. Bei uns, wo er wie eine trostlose Sonnenwüste aussieht, wirkt er direkt unerfreulich und gehört daher — wie dies Muthesius u. a. schon längst gefordert haben — abseits, hinter das Haus oder auf die Seite. Was einem dagegen vor dem Hause hier doch fehlt, das ist eine Gartenanlage. Hiebei denke ich weniger an eine kostspielige und reiche Schaustellung bunter Blumen, als vielmehr an eine künstlerische Gliederung der nächsten Umgebung des Hauses. Eine oder zwei durch Trockenmauern unterstützte Terrassen mit Rasenflächen, in die die geraden Wege, regelmässig verteilte Bäume, vielleicht Gartenhäuser an den Ecken, den richtigen Rhythmus hineingebracht hätten; das würde vollauf

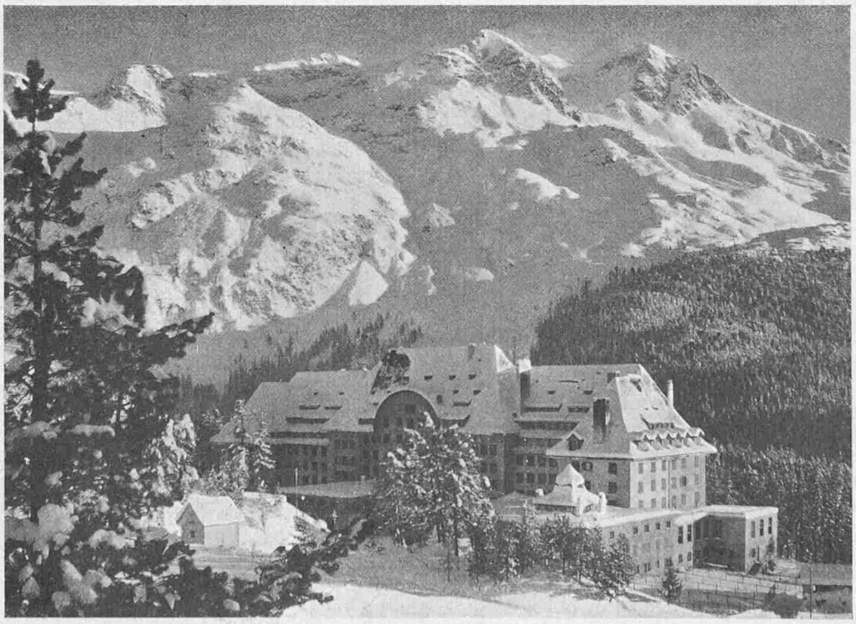

Abb. 2. Rückseite des „Suvrettahauses“, Winterbild gegen Südost gesehen.