Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 69/70 (1917)

Heft: 7

Inhaltsverzeichnis

Band 69. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 7.

Notiz über Kräftezusammensetzungsfigur und Schwerpunkt.

Von *A. Kiefer* in Zürich.

Wenn die beiden gerichteten Strecken AP, BQ (Abbildung 1) zwei Kräfte darstellen und die Linien AC, QR parallel zu PB und die Linien BC, PR parallel zu AQ gezogen sind, so ist CR die resultierende Kraft von AP und BQ.[1]) Projiziert man nämlich die Kräfte AP, BQ parallel zu PB auf CR, so ist die Summe der Projektionen gleich CR und wenn man die Kräfte AP, BQ parallel zu AQ auf CR projiziert, so ist die Summe der Projektionen ebenfalls gleich CR; ferner ist $\Delta CAP = CAB = CQB$ und $\Delta RAP = RQP = RQB$. In gleicher Weise ist DE die Resultierende von AB, PQ. Die Linien OC, AB halbieren sich gegenseitig, ebenso OR, PQ; folglich ist die Resultierende CR parallel zu $M_1 M_2$, doppelt so gross und von O doppelt so weit entfernt wie $M_1 M_2$. Ebenso ist DE parallel $M_3 M_4$, doppelt so gross und in doppeltem Abstande von O. Wird umgekehrt eine Kraft CR in zwei Komponenten AP, BQ zerlegt und verbindet man die Mitte M_1 ihrer Anfangspunkte mit der Mitte M_2 der Endpunkte, so ist diese Linie parallel zur Resultierenden und halb so gross.

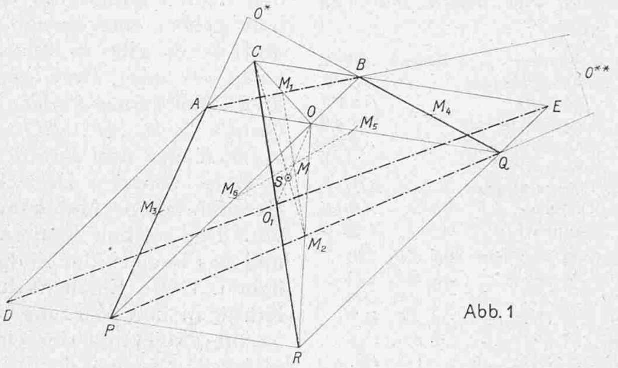

Abb. 1

Die Figur enthält zwei Tripel von parallelen Geraden DAC, POB, RQE und DPR, AOQ, CBE.

Auf jeder der sechs Geraden liegen drei, durch die Buchstaben bezeichneten, Punkte. Diese neun Punkte bilden die Ecken von sechs Dreiecken, derart, dass jede Ecke eines Dreieckes auf einer andern Geraden desselben Tripels liegt und das Dreieck auf beiden Tripeln vorkommt, nämlich:

DOE, DBQ, ABR, APE, CPQ, COR.

Aus dem Grunde, dass jedes Dreieck seine Ecken auf den drei Geraden beider Tripel hat (z. B. ABR auf DC, PB, RE und zugleich auf AQ, CE, DR und ebenso PQC u. s. f.), *müssen alle diese sechs Dreiecke denselben Schwerpunkt S haben.* Jeder von den neun Punkten ist eine gemeinsame Ecke für zwei der sechs Dreiecke (z. B. A von ABR und APE); die der gemeinsamen Ecke gegenüberliegenden Seiten der zwei Dreiecke bilden die Diagonalen eines Parallelogramms (z. B. gehört zu A das Parallelogramm $PBER$; zu O gehört $DCER$) und *der gemeinsame Schwerpunkt S liegt auf jeder der neun Linien, die von je einem der neun Punkte nach dem Diagonalenschnittpunkt des zugehörigen Parallelogramms gehen und teilt sie im Verhältnis von 2 : 1.* Jeder von den neun Punkten ist der Schnittpunkt von zwei der sechs Tripel-Geraden und das zugehörige Parallelogramm wird von den vier andern Geraden gebildet, von denen keine durch den Punkt geht. Die neun Diagonalenschnittpunkte der neun Parallelogramme bilden eine zur Figur der zwei Tripel ähnliche und für S als Aehnlichkeitspunkt ähnlich gelegene Figur. Aus diesem Grunde haben auch die Dreiecke $O' M_1 M_2$, $O' M_3 M_4$, usf. den Punkt S zum Schwerpunkt.[2]) *Dieser ausgezeichnete Punkt S ist zugleich der Schwerpunkt des Viereckes $ABQP$.* Das Viereck wird nämlich durch die Diagonale AQ in zwei Dreiecke ABQ, APQ geteilt, die sich verhalten wie $BO:OP$; bringt man diese Linien parallel und in gleicher Grösse als Kräfte nach den Ecken jedes der zwei Dreiecke, so muss der Schwerpunkt des Viereckes auf der Resultierenden der drei gleich grossen, parallelen Kräfte CD, BP, ER liegen. Ebenso muss die Resultierende der drei parallelen, unter einander gleichen Kräfte CE, AQ, DR durch den Schwerpunkt des Viereckes gehen. Nun liegen die Ecken aller sechs Dreiecke auf beiden Gruppen der parallelen Kräfte und folglich schneiden sich die zwei Resultierenden der zwei Kräftegruppen im gemeinsamen Schwerpunkt aller Dreiecke, der also zugleich der Schwerpunkt des Viereckes ist. Uebrigens geht die Resultierende von CD und ER durch O' und verhält sich zu BP wie 2 : 1; die Resultierende von allen drei Kräften CD, ER, BP teilt also OO' im Verhältnis von 2 : 1. Ebenso geht die Resultierende von CE und DR durch O' und verhält sich zu AQ wie 2 : 1; die Resultierende der drei Kräfte CE, DR, AQ teilt also ebenfalls OO' im Verhältnis von 2 : 1, d. h. der Punkt S, der OO' im Verhältnis 2 : 1 teilt, und welcher der Schwerpunkt der Dreiecke OCR, ODE und damit auch der andern vier Dreiecke ist, ist zugleich der Schwerpunkt des Viereckes $ABQP$. *Hebt man von den neun Punkten die vier Punkte C, D, R, E speziell hervor, so müssen die Linien von ihnen nach den Mitten M_2, M_4, M_1, M_3 der Seiten des Viereckes $ABQP$ durch seinen Schwerpunkt S gehen*; dieser spezielle Fall drückt den bekannten Satz von *Edmond Henry* über den Schwerpunkt des Viereckes aus.[3]) Zieht man von O' die Parallelen zu den Diagonalen AQ, BP des Viereckes, so werden die Diagonalen in M_5, M_6 halbiert; $O'O$ und $M_5 M_6$ halbieren sich gegenseitig und es ist $OM : MS = 3 : 1$. Als Mitte von $M_5 M_6$ ist M der Schwerpunkt der vier Punkte A, B, Q, P und daher auch die Mitte von $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$. *Der Schwerpunkt eines Viereckes wird gefunden, indem man den Schnittpuukt O seiner Diagonalen mit dem Schwerpunkt M seiner vier Ecken verbindet und diese Linie um $^1/_3$ verlängert.*

Die Abbildung 1 weist noch andere Vierecke von der Eigenschaft des Viereckes $ABQP$ auf; die Ecken dieses Viereckes liegen auf den Seiten des Parallelogramms $CDRE$, das von vier der sechs Tripelgeraden gebildet wird. Die zwei andern Tripelgeraden schneiden die Gegenseiten des Parallelogramms in den Gegenecken des Viereckes und bilden seine Diagonalen. Betrachtet man eine Seite des Viereckes und die umgekehrte Gegenseite, AP und BQ, oder AB und PQ, als Kräfte, so ist ihre Resultierende die eine oder andere Diagonale CR oder DE des Parallelogramms. Der Schwerpunkt des Viereckes ist der ausgezeichnete Punkt S. Diese Eigenschaften gelten in gleicher Weise für jedes der neun Parallelogramme, die von je vier

[1]) Schweiz. Bauzeitung, Bd. 43, Nr. 6 (vom 6. Februar 1904).

[2]) Man kann noch andere derartige Dreiecke angeben. Z. B. die Dreiecke über jeder der 18 Seiten der neun Parallelogramme als Grundlinien; die Spitzen dieser 18 Dreiecke fallen auf die sechs Tripelgeraden und entstehen dort durch Vertauschen der Abschnitte. Ferner Dreiecke, von denen zwei Seiten auf je zwei Tripelgeraden, oder auf je zwei Diagonalen fallen.

[3]) *Gysel, J.*, Zur Konstruktion des Schwerpunktes einer ebenen Vielecksfläche, Beilage zum Jahresbericht des Gymnasiums Schaffhausen für 1894/95. S. 6.