Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 69/70 (1917)

Heft: 17

Artikel: Berechnung statisch unbestimmter Eisenbetonkonstruktionen mit Berücksichtigung der Torsionsspannungen

Autor: Kasarnowsky, S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33867

Die im vorjährigen Bericht erwähnte Linienverlegung im Gebiete des Sevisteins auf der Südrampe der *Lötschbergbahn* ist im Berichtjahre vollendet worden und konnte am 18. April 1916 in Betrieb genommen werden. (Forts. folgt.)

Appenzell A.-Rh. Kantonalbank in Herisau.

Abb. 15. Buchhaltung und Spedition.

Berechnung statisch unbestimmter Eisenbetonkonstruktionen mit Berücksichtigung der Torsionsspannungen.

Von *S. Kasarnowsky*, Ingenieur, Zürich.

(Schluss von Seite 160.)

IV. *Einfluss der Wind- und Fliehkräfte auf den eingespannten Bogen.*

Wird der eingespannte Bogen durch ausserhalb der Bogenmittelebene liegende Kräfte angegriffen, so treten nebst Normal- und Biegungsspannungen auch Torsions-Spannungen auf.[1]). In diesem allgemeinen Belastungsfall entstehen in jedem Widerlager sechs Reaktionen, nämlich drei Kräfte und drei Momente. Zwischen diesen zwölf Reaktionen bestehen sechs Gleichgewichtsbedingungen. Sechs Reaktionen sind überzählig. Der eingespannte Bogen ist also im allgemeinen sechsfach statisch unbestimmt.

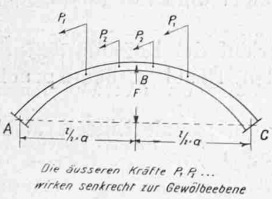


Abb. 9

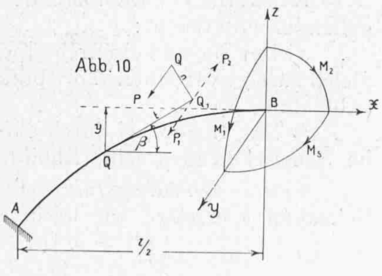


Abb. 10

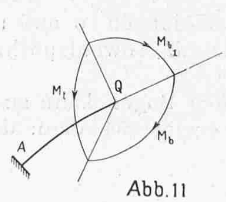


Abb. 11

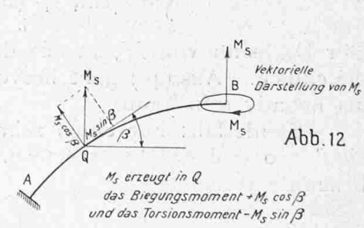


Abb. 12

Die folgenden Entwicklungen beschränken sich auf den symmetrischen Bogen (Abbildung 9), der durch symmetrische, senkrecht zur Bogenmittelebene wirkende Kräfte beansprucht ist (z. B. durch Wind- oder Fliehkräfte).

Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht aus zwei Kragträgern AB (Abbildung 10) und BC. Im Scheitel greifen im allgemeinen sechs statisch unbestimmte Grössen an: Die Kräfte X, Y, Z und die Kräftepaare M_1, M_2, M_S. Aus Symmetriegründen werden die Querkräfte Y und Z, sowie das Torsionsmoment M_1 zu null. Bei Belastung durch Kräfte senkrecht zur Bogenmittelebene zeigt es sich, dass auch die Reaktionen M_2 und X verschwinden.

[1]) Diese Aufgabe kann auch als eine Verallgemeinerung des im ersten Abschnitt behandelten Balkonträgers aufgefasst werden.

Das in einem Punkte der Gewölbeaxe wirkende Moment kann wie folgt in drei Komponenten zerlegt werden (Abbildung 11):

in ein Biegungsmoment M_{b_1} in der Gewölbeebene,

in ein Biegungsmoment M_b senkrecht zur Gewölbeebene,

in ein Torsionsmoment M_t.

Das Biegungsmoment M_{b_1} ergibt sich nach Abbildung 10 aus

$$M_{b_1} = X \cdot y + M_2 \quad . \quad . \quad (38)$$

Das Biegungsmoment M_b kann zusammengesetzt werden aus dem Moment M_b^0 der äusseren Kräfte P, und dem Biegungsmoment verursacht durch M_S. Analog setzt sich M_t zusammen aus M_0^t, dem Torsionsmoment der Kräfte P und dem Torsionsmoment verursacht durch M_S.

Das statische Moment einer Kraft P inbezug auf einen Punkt Q der Bogenaxe (Abb. 10) lässt sich folgenderart in ein Biegungs- und Torsionsmoment zerlegen:

Fällt man vom Angriffspunkt Q_2 der Kraft P ein Lot auf die Tangente QQ_1 und bringt in Q_1 zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte $P_1 = P_2 = P$ an, so erhält man $P \cdot t$ und $P \cdot n$ als Beiträge der Kraft P an das Biegungs- und Torsionsmoment in Q.

Die Momente M_b^0 und M_t^0 sind dann

$$M_b^0 = \sum_0^x P t \quad \text{und} \quad M_t^0 = \sum_0^x P n \,. \quad (39)$$

Mit Berücksichtigung der Abbildung 12 erhält man weiter

$$\left.\begin{aligned} M_b &= M_b^0 + M_S \cos\beta \\ M_t &= M_t^0 - M_S \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Ist ferner

A die Deformationsarbeit des halben Bogens

δ_2 die Verdrehung des Bogens im Scheitel im Sinne von M_2

δ_S " " " " " " " " M_S

η die horizontale Verschiebung " " " " " X

so werden nach dem Prinzip von Castigliano

$$\delta_2 = \frac{\partial A}{\partial M_2}\,; \quad \delta_S = \frac{\partial A}{\partial M_S}\,; \quad \eta = \frac{\partial A}{\partial X}$$

Aus Symmetriegründen sind hier die Verdrehungen δ_2, δ_S, sowie die Verschiebung η null. Die Castigliano'schen Gleichungen vereinfachen sich zu

$$\frac{\partial A}{\partial M_2} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial M_S} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial X} = 0 \quad . \quad . \quad (41)$$

Die Deformationsarbeit des halben Bogens ist gegeben durch

$$A = \int_0^{l/2} \frac{M_{b1}^2\, ds}{2\, J_1 E} + \int_0^{l/2} \frac{M_b^2\, ds}{2\, J E} + \int_0^{l/2} \frac{M_t^2\, ds}{2\, T G} + \int_0^{l/2} \frac{S^2\, ds}{2\, F E}$$

worin ds das Längenelement des Bogens,

J_1 und J die Trägheitsmomente des Bogens, bezogen auf die horizontale und die normale Schweraxe,

T die Torsionsziffer des Bogenquerschnitts,

F den Bogenquerschnitt und

S die Normalkraft bedeuten.

TABELLE II.

Pfeilverhältnis $\frac{f}{l}$	β_0 in Bogenmass	$\mathrm{I} = \int_0^{\beta_0} \sin\beta\, d\beta = (1 - \cos\beta_0)$	$\mathrm{II} = \int_0^{\beta_0} \cos\beta\, d\beta = \sin\beta_0$	$\mathrm{III} = \int_0^{\beta_0} \sin^2\beta\, d\beta = \frac{\beta_0}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\beta_0$	$\mathrm{IV} = \int_0^{\beta_0} \cos^2\beta\, d\beta = \frac{\beta_0}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\beta_0$	$\mathrm{V} = \int_0^{\beta_0} \sin\beta\cos\beta\, d\beta = \frac{1}{2}\sin^2\beta_0$	$\mathrm{VI} = \int_0^{\beta_0} \beta\sin\beta\, d\beta = \sin\beta_0 - \beta_0\cos\beta_0$	$\mathrm{VII} = \int_0^{\beta_0} \beta\cos\beta\, d\beta = \cos\beta_0 + \beta_0\sin\beta_0 - 1$
0,10	0,395	0,077	0,385	0,020	0,375	0,074	0,020	0,075
0,15	0,583	0,165	0,550	0,062	0,521	0,152	0,064	0,156
0,20	0,761	0,275	0 690	0,131	0,630	0,238	0,139	0,249
0,25	0,927	0,400	0,800	0,223	0,704	0,320	0,244	0,341
0,30	1,081	0,528	0,882	0,333	0,748	0,389	0,374	0,424
0,35	1,221	0,657	0,940	0,450	0,772	0,441	0,522	0,490
0,40	1,349	0,780	0,976	0,568	0,782	0,476	0,679	0,536
0,45	1,466	0,895	0,995	0,681	0,785	0,495	0,841	0,563
0,50	1,571	1,000	1,000	0,785	0,785	0,500	1,000	0,571

Führt man mit J_0 das Trägheitsmoment des Bogenscheitels, bezogen auf die normale Schweraxe ein und bezeichnet mit

$$dw_1 = \frac{J_0}{J_1} ds; \quad dw = \frac{J_0}{J} ds; \quad dw' = \frac{J_0}{T}\frac{E}{G} ds; \quad dn = \frac{J_0}{F} ds$$

so wird

$$J_0 E A = \int_0^{l/2} \frac{M_{b_1}^2\, dw_1}{2} + \int_0^{l/2} \frac{M_b^2\, dw}{2} + \int_0^{l/2} \frac{M_t^2\, dw'}{2} + \int_0^{l/2} \frac{S^2\, dn}{2} \quad (42)$$

Wie aus der Abbildung 10 ersichtlich, ist $S = X \cos\beta$. Aus den Gleichungen (38) und (40) erhält man

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{\partial M_{b_1}}{\partial M_2} = 1 & \frac{\partial M_b}{\partial M_2} = 0 & \frac{\partial M_t}{\partial M_2} = 0 & \frac{\partial S}{\partial M_2} = 0 \\ \frac{\partial M_{b_1}}{\partial M_s} = 0 & \frac{\partial M_b}{\partial M_s} = \cos\beta & \frac{\partial M_t}{\partial M_s} = -\sin\beta & \frac{\partial S}{\partial M_s} = 0 \\ \frac{\partial M_{b_1}}{\partial X} = 0 & \frac{\partial M_b}{\partial X} = 0 & \frac{\partial M_t}{\partial X} = 0 & \frac{\partial S}{\partial X} = \cos\beta \end{array}\right\} (42a)$$

Differenziert man die Gleichung (42) partiell nach M_2, M_s und X, so ergeben sich mit Berücksichtigung von (41) und (42a)

$$M_2 \int_0^{l/2} dw_1 + X \int_0^{l/2} y\, dw_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

$$\int_0^{l/2} (M_b^0 + M_s \cos\beta) \cos\beta\, dw - \int_0^{l/2} (M_t^0 - M_s \beta) \sin\beta\, dw' = 0 \quad (44)$$

$$M_2 \int_0^{l/2} y\, dw_1 + X\left[\int_0^{l/2} y^2 dw_1 + \int_0^{l/2} \cos^2\beta\, dn\right] = 0 \quad . \quad (45)$$

Aus (43) und (45) ersieht man, dass $M_2 = 0$ und $X = 0$ sind. Es folgt dann aus (44) die einzige statisch unbestimmte Grösse M_S

$$M_S = \frac{\int_0^{l/2} M_t^0 \sin\beta\, dw' - \int_0^{l/2} M_b^0 \cos\beta\, dw}{\int_0^{l/2} \cos^2\beta\, dw + \int_0^{l/2} \sin^2\beta\, dw'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)[1]$$

Der Drehsinn von M_S ist aus den Abbildungen 10 und 12 ersichtlich. Aus (46) geht hervor, dass M_S sowohl positiv als negativ sein kann.

Sonderfall: Für einen sehr flachen Bogen kann man $\sin\beta = 0$ und $\cos\beta = 1$ setzen. Es ergibt sich dann die bekannte Beziehung

$$M_S = -\frac{\int_0^{l/2} M_b^0\, dw}{\int_0^{l/2} dw}$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Bogenmittellinie ein Kreisbogen und der Bogenquerschnitt konstant sei. Diese beiden Annahmen erlauben eine approximative Rechnung, die für die meisten Fälle der Praxis genügend genaue Resultate liefert. Bezeichnet man nach Abbildung 13 die Pfeilhöhe des Bogens mit f und mit a die halbe Spannweite, so ergeben sich der halbe Zentriwinkel β_0 und der Krümmungsradius r zu

$$\sin\beta_0 = \frac{2af}{a^2 + f^2}; \quad r = \frac{a^2 + f^2}{2f}$$

[1] Diese Gleichung gilt auch für Zwei- und Dreigelenkbögen.

Die elastischen Gewichte dw und dw' verwandeln sich zu

$$dw = r\, d\beta \text{ und } dw' = \frac{J_0 E}{TG} \cdot r\, d\beta \text{ oder mit } \frac{J_0 E}{GT} = \varrho$$

$$dw' = \varrho\, r\, d\beta$$

Die Gleichung (46) vereinfacht sich zu

$$M_S = \frac{\varrho \int_0^{\beta_0} M_t^0 \sin\beta\, d\beta - \int_0^{\beta_0} M_b^0 \cos\beta\, d\beta}{\int_0^{\beta_0} \cos^2\beta\, d\beta + \varrho \int_0^{\beta_0} \sin^2\beta\, d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (46a)$$

Der Uebersichtlichkeit halber bezeichnen wir die sieben folgenden bestimmten Integrale mit:

$$\int_0^{\beta_0} \sin\beta\, d\beta = (1 - \cos\beta_0) = \mathrm{I}$$

$$\int_0^{\beta_0} \cos\beta\, d\beta = \sin\beta_0 = \mathrm{II}$$

$$\int_0^{\beta_0} \sin^2\beta\, d\beta = \frac{\beta_0}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\beta_0 = \mathrm{III}$$

$$\int_0^{\beta_0} \cos^2\beta\, d\beta = \frac{\beta_0}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\beta_0 = \mathrm{IV}$$

$$\int_0^{\beta_0} \sin\beta\cos\beta\, d\beta = \frac{1}{2}\sin^2\beta_0 = \mathrm{V}$$

$$\int_0^{\beta_0} \beta\sin\beta\, d\beta = \sin\beta_0 - \beta_0\cos\beta_0 = \mathrm{VI}$$

$$\int_0^{\beta_0} \beta\cos\beta\, d\beta = \cos\beta_0 + \beta_0\sin\beta_0 - 1 = \mathrm{VII}$$

Der Nenner der Gleichung (46a) kann jetzt geschrieben werden: $N = \mathrm{IV} + \varrho\, \mathrm{III}$

Die Integrale I bis VII sind für die Pfeilverhältnisse 0,1 bis 0,5 in der Tabelle II ausgerechnet.

Es werden nun folgende zwei Belastungsfälle eingehender untersucht:

a) Der Bogen sei durch einen auf der Bogenmittellinie gleichmässig verteilten horizontalen Druck p beansprucht (Abbildung 13).

b) Der Bogen sei durch eine horizontale Einzelkraft H im Scheitel beansprucht (Abbildung 14).

Erster Belastungsfall. Eine gleichmässig verteilte Belastung p erzeugt, wie leicht einzusehen ist

$$M_b^0 = p r^2 (1 - \cos\beta)$$
$$M_t^0 = -p r^2 (\beta - \sin\beta)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 46a ein, so ergibt sich der Zähler zu

$$-p r^2 \left[\varrho \int_0^{\beta_0} (\beta - \sin\beta) \sin\beta\, d\beta + \int_0^{\beta_0} (1 - \cos\beta) \cos\beta\, d\beta\right]$$
$$= -p r^2 \left[\varrho\, (\mathrm{VI} - \mathrm{III}) + (\mathrm{II} - \mathrm{IV})\right]$$

und

$$M_S = \frac{-p r^2 \left[\varrho\, (\mathrm{VI} - \mathrm{III}) + (\mathrm{II} - \mathrm{IV})\right]}{(\mathrm{IV} + \varrho\, \mathrm{III})} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Für $\beta_0 = 90^0$ erhält man aus (47) als Spezialfall das schon von Koenen abgeleitete Moment $-p r^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)$[1]

[1] *Koenen*, loc. cit.

Zweiter Belastungsfall. Eine Einzellast H im Scheitel erzeugt

$$M_b^0 = \frac{H}{2} r \sin\beta \quad \text{und} \quad M_t^0 = -\frac{H}{2} r (1 - \cos\beta)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 46a ein, so ergibt sich

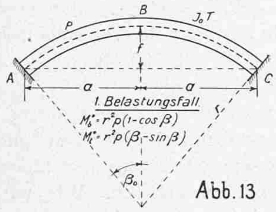
$$M_S = \frac{-\frac{H}{2} r [\varrho(\mathrm{I}-\mathrm{V}) + \mathrm{V}]}{\mathrm{IV} + \varrho\,\mathrm{III}} = -\frac{H}{2} r \frac{[\varrho \cdot \mathrm{I} + \mathrm{V}(1-\varrho)]}{\mathrm{IV} + \varrho\,\mathrm{III}} \quad (48)$$

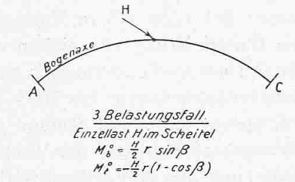
Für flache Bogen, bei denen das Pfeilverhältnis $< 0{,}15$ ist, kann man die Formeln (47) und (48) vereinfachen, indem man $\sin\beta_0 = \beta_0 - \frac{\beta_0^3}{6}$ und $\cos\beta_0 = 1 - \frac{\beta_0^2}{2}$ setzt. Mit $b = \beta_0 r$ und $N' = \left[1 + \frac{\beta_0^2}{2}(\varrho - 1)\right]$ erhält man

$$M_S = \frac{p r^2 \beta_0^2 \cdot \beta_0}{6\,N'} = \frac{p b^2}{6\,N'} \quad \ldots \quad (47a)$$

und

$$M_S = \frac{H}{2} \frac{\beta_0^2 r}{2\,N'} = \frac{H b}{4\,N'} \quad \ldots \quad (48a)$$





Um den Gang der Rechnung zu erläutern, soll hier der Hauptbogen des Gründjetobel-Viadukts der Chur-Arosa-Bahn (Entwurf des Ingenieurbureau J. Bolliger & Cie., Zürich) auf Winddruck untersucht werden. Die Fahrbahn-Konstruktion dieser Brücke wird mittels Säulen auf den Bogen abgestützt und ist durch Fugen von den Hauptpfeilern getrennt. Der Winddruck auf die Fahrbahn und die Fahrzeuge wird zum Teil durch die Säulen, zum Teil von der Fahrbahntafel selbst aufgenommen. Da die etwa 4 *m* breite Fahrbahntafel gegen wagrechte Verschiebungen viel widerstandsfähiger ist, als die schlanken Ständer, wird der grösste Teil des Winddruckes von der Fahrbahntafel selbst aufgenommen und von dieser auf den Bogenscheitel übertragen. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass der gesamte Winddruck auf die Fahrbahn im Bogenscheitel konzentriert ist. Die Hauptabmessungen der Brücke sind $l = 2a = 86\,m$, $f = 18\,m$, Gewölbestärken: im Scheitel 1,40/4,00 *m*, im Kämpfer 2,10/6,00 *m*. Mittlerer Gewölbequerschnitt 170/5,00 *m*. Wir erhalten

$J_0 = \frac{1}{12} \cdot 5{,}00^3 \cdot 1{,}70 = 17{,}7\,m^4$ und mit $k = \frac{1{,}70}{5{,}00} = 0{,}34$ mit Hilfe der Tabelle I (siehe Seite 141 in Nummer 13) $T = 0{,}01016 \cdot 5{,}0^4 = 6{,}3\,m^4$. Setzt man $\frac{E}{G} = 2{,}50$, so wird

$$\varrho = \frac{J_0}{T} \cdot \frac{E}{G} = \frac{17{,}7}{6{,}3} \cdot 2{,}5 = 7{,}03$$

$$r = \frac{f^2 + a^2}{2f} = \frac{18^2 + 43^2}{2 \cdot 18} = 60{,}3\,m$$

Aus Tabelle II erhält man mit $\frac{f}{l} = 0{,}21$

I = 0,300 III = 0,149 V = 0,254
II = 0,712 IV = 0,645 VI = 0,160

woraus zunächst $N = 0{,}645 + 7{,}03 \cdot 0{,}149 = 1{,}695$ folgt.

Es werden nun zwei Belastungsfälle untersucht

1. Winddruck auf das Gewölbe $p = 0{,}10 \cdot 1{,}70 = 0{,}17\,t/m^1$.
2. Einzelkraft im Scheitel $H = 0{,}10 \cdot 1{,}5 \cdot 86 = 12{,}90\,t$.

Für den ersten Belastungsfall erhält man aus (47)

$$M_S = \frac{-0{,}17 \cdot 60{,}3^2 [7{,}03(0{,}160 - 0{,}149) + (0{,}712 - 0{,}645)]}{1{,}695} = -51{,}0\,mt$$

und für den zweiten Belastungsfall aus (48)

$$M_S = \frac{12{,}90 \cdot 60{,}3\,[7{,}03 \cdot 0{,}300 - 6{,}03 \cdot 0{,}254]}{2 \cdot 1{,}695} = -133{,}0\,mt$$

Im Scheitel entsteht also ein Biegungsmoment von $-51{,}0 - 133{,}0 = -184{,}0\,mt$. Im Kämpfer berechnen sich die Momente mit Hilfe der Gleichung (40). Wir erhalten:

$$M_t = M_t^0 - M_S \sin\beta_0 = -\left[p r^2 (\beta_0 - \sin\beta_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{H}{2} r (1 - \cos\beta_0)\right] - M_S \sin\beta_0$$
$$= -\left[0{,}17 \cdot 60{,}3^2 (0{,}794 - 0{,}712 + \frac{12{,}9}{2} \cdot 60{,}3 \cdot 0{,}300\right] +$$
$$+ 184{,}0 \cdot 0{,}712 = -36{,}8\,mt$$

$$M_b = M_b^0 + M_S \cos\beta_0 = +\left[p r^2 (1 - \cos\beta_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{H}{2} r \sin\beta_0\right] + M_S \cos\beta_0$$
$$= \left[0{,}17 \cdot 60{,}3^2 \cdot 0{,}300 + \frac{12{,}9}{2} \cdot 60{,}3 \cdot 0{,}712\right] -$$
$$- 184 \cdot 0{,}700 = +333{,}0\,mt$$

Es ergeben sich folgende Zusatzspannungen

Im Scheitel $\sigma = \frac{184{,}0}{\frac{1}{6} \cdot 4^2 \cdot 1{,}40} = \pm 4{,}90\,kg/cm^2$

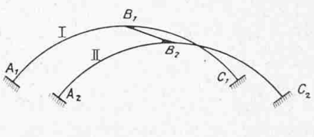
(Zug auf der Leeseite, Druck auf der Luvseite)

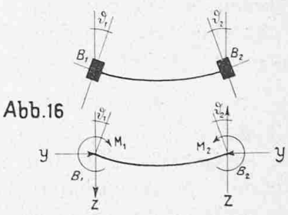
Im Kämpfer $\sigma = \frac{333{,}0}{\frac{1}{6} \cdot 6^2 \cdot 2{,}10} = \pm 2{,}65\,kg/cm^2$

(Zug auf der Luvseite, Druck auf der Leeseite) [1])
Die Torsionspannungen sind unbedeutend.

Anwendungen der Ergebnisse der vorgehenden Entwicklungen auf die aufgelösten Bogenformen. Für die grösseren Spannweiten werden in neuerer Zeit aufgelöste Bogenformen verwendet, die naturgemäss gegen seitlichen Druck viel empfindlicher sind als massive Gewölbe. Besteht das Gewölbe aus vielen Rippen, die durch Traversen versteift sind, so kann man näherungsweise annehmen, der Winddruck verteile sich auf alle Rippen gleichmässig, und dann jede Rippe wie einen unabhängigen Bogen berechnen.

Da die weitgespannten gewölbten Eisenbetonbrücken grösstenteils Zwillingsbögen haben, so erscheint eine genaue Untersuchung eines mit Traversen verbundenen Zwillingsbogens, der als eine Art Vierendeelträger aufgefasst werden kann, besonders wichtig zu sein. Im Folgenden soll vorläufig die Berechnung eines symmetrischen Zwillingsbogens mit einer Scheiteltraverse nach Abbildung 15, einer Anordnung, die z. B. bei einer Brücke mit aufgehängter Fahrbahn vorkommen kann, entwickelt werden.





Nehmen wir an, dass die Traverse $B_1 B_2$ keine direkte Belastung erhält, so entstehen in B_1 und B_2 bei symmetrischer Belastung je drei Reaktionen M_1, Z_1, Y_1 und M_2, Z_2, Y_2. Aus drei Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich (Abbildung 16)

$$Y_1 = Y_2 = Y; \quad Z_1 = Z_2 = Z \quad \text{und} \quad Z \cdot a = M_1 - M_2$$

Wählt man den einfachen eingespannten Bogen als Hauptsystem, so erhält man noch drei unbekannte Reaktionen; d. h. das System ist statisch dreifach überunbestimmt. Mit Benutzung der Resultate und Bezeichnungen der vorherigen Entwicklungen gestaltet sich die Rechnung folgenderweise: Die Verdrehung und horizontale Verschiebung jedes Bogens im Scheitel ist eine lineare Funktion von M_1, beziehungsweise von M_2 und Y. Man kann also schreiben mit Berücksichtigung des Drehsinns (Abbildung 16)

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1 = \vartheta_{01} - \Gamma_1 M_1 - \Gamma_2 Y \\ \vartheta_2 = \vartheta_{02} + \Gamma_1 M_1 + \Gamma_2 Y \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (49)$$

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = \eta_{01} - \gamma_1 M_1 - \gamma_2 Y \\ \eta_2 = \eta_{02} + \gamma_1 M_1 + \gamma_2 Y \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (50)$$

Es bedeuten hier:

ϑ_1 die totale J_0E-fache Verdrehung des Bogens I im Scheitel
ϑ_2 „ „ J_0E- „ „ „ II „ „

[1]) Eine genaue Rechnung ergibt kleinere Spannungen im Scheitel und grössere im Kämpfer.

ϑ_{01} und ϑ_{02} die J_0E-fache Verdrehungen der Bogen I und II infolge Belastung durch die äusseren Kräfte,

Γ_1, Γ_2 die J_0E-fachen Verdrehungen der Bogen I und II infolge der Belastungszustände $M_1 = 1$ und $Y = 1$,

η_1, η_2 die totalen J_0E-fachen horizontalen Verschiebungen im Scheitel der Bogen I und II,

η_{01} und η_{02} die J_0E-fachen horizontalen Verschiebungen der Bogen I und II infolge Belastung durch die äusseren Kräfte,

γ_1, γ_2 die J_0E-fachen Verschiebungen der Bogen I und II infolge der Belastungszustände $M_1 = 1$ und $Y = 1$.

Bezeichnet man ferner mit J' das Trägheitsmoment der Traverse $B_1 B_2$ und mit a ihre Spannweite, so kann man mit $\alpha = \frac{J_0}{J'}$ setzen

$$\vartheta_1 = \alpha \frac{a}{6}(2 M_1 + M_2) \text{ und } \vartheta_2 = -\alpha \frac{a}{6}(M_1 + 2 M_2) \; . \quad (51)$$

Diese Gleichungen sind, streng genommen, nur dann richtig, wenn die beiden Bogen I und II gleiche Senkungen im Scheitel erleiden. Eine Differenz in der Durchbiegung kann in diesem Falle nur von der Reaktion Z erzeugt werden. Die in der Praxis vorkommenden Verhältnisse der Abmessungen sind aber derart, dass der Einfluss der Reaktion Z auf ϑ_1 und ϑ_2 vernachlässigt werden kann. Vernachlässigt man ferner die axiale Deformation der Traverse infolge Y, so werden mit $\eta_1 = \eta_2$

$$\gamma_1 (M_1 + M_2) + 2 \gamma_2 Y = \eta_{01} - \eta_{02} \quad . \quad . \quad (52)$$

Aus (49) und (51) ergeben sich dann

$$M_1 \left(\alpha \frac{a}{3} + \Gamma_1\right) + M_2 \, \alpha \frac{a}{6} + \Gamma_2 Y = \vartheta_{01}$$

$$M_1 \, \alpha \frac{a}{6} + M_2 \left(\alpha \frac{a}{3} + \Gamma_1\right) + \Gamma_2 Y = - \vartheta_{02}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} (M_1 + M_2)\left(\Gamma_1 + \alpha \frac{a}{2}\right) + 2 \Gamma_2 Y = \vartheta_{01} - \vartheta_{02} \\ (M_1 - M_2)\left(\Gamma_1 + \alpha \frac{a}{6}\right) \qquad\qquad = \vartheta_{01} + \vartheta_{02} \end{array}\right\} \; . \quad (53)$$

Aus (52) und (53) kann man für jeden Belastungsfall die Unbekannten M_1, M_2, Y ermitteln.

Sonderfall: Haben die beiden Bogen, wie es bei Winddruck der Fall ist, gleiche horizontale Kräfte aufzunehmen, so werden $\vartheta_{01} = \vartheta_{02}$ und $\eta_{01} = \eta_{02}$. Wie leicht einzusehen ist, werden dann $Y = 0$ und $M_1 + M_2 = 0$. Aus der zweiten der Gleichungen (53) folgt dann

$$\mathrm{M}_1 \left(\Gamma_1 + \alpha \frac{a}{6}\right) = \vartheta_{01} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53a)$$

Die Koeffizienten ϑ_{01}, ϑ_{02}, Γ_1, Γ_2, η_{01}, η_{02}, γ_1, γ_2 werden am einfachsten mit Hilfe des Prinzips von Castigliano bestimmt. Allgemein berechnen sich die Verdrehung ϑ und die horizontale Verschiebung η im Scheitel aus

$$\vartheta = \frac{\partial A}{\partial M_1} = \int_{-a}^{+a} M_b \frac{\partial M_b}{\partial M_1} \, dw + \int_{-a}^{+a} M_t \frac{\partial M_t}{\partial M_1} \, dw'$$

$$\eta = \frac{\partial A}{\partial Y} = \int_{-a}^{+a} M_b \frac{\partial M_b}{\partial Y} \, dw + \int_{-a}^{+a} M_t \frac{\partial M_t}{\partial Y} \, dw'$$

Aus dem Satz von Maxwell folgt weiter

$$\Gamma_2 = \gamma_1$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf die eingehende Bestimmung der Koeffizienten Γ_1 und ϑ_{01} der Gleichung (53a). Wir nehmen an, dass die Bogenmittellinie ein Kreis und der Bogenquerschnitt konstant sei. Mit Hilfe der Gleichung (46a) erhalten wir:

$$M_S = \frac{1}{2N} \mathrm{V} (\varrho - 1) \text{ und } \Gamma_1 = \frac{r}{2}\left[(\mathrm{III} + \varrho\,\mathrm{IV}) - \frac{\mathrm{V}^2 (\varrho - 1)^2}{N}\right]$$

Wirkt auf den Bogen ein über der Bogenmittellinie gleichmässig verteilter horizontaler Druck p, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (47)

$$\vartheta_{01} = p r^3 \left[(\mathrm{I} - \mathrm{V}) - \varrho\,(\mathrm{VII} - \mathrm{V}) + M_S' \, \mathrm{V} \, (\varrho - 1)\right]$$

wobei:

$$M_{S'} = \frac{\varrho\,(\mathrm{VI} - \mathrm{III}) + (\mathrm{II} - \mathrm{IV})}{N}$$

bedeutet.

Die Berechnung eines Zwillingsbogens mit mehreren Traversen wäre nach diesem Verfahren zu umständlich. In einer spätern Arbeit soll auf dieses schwierige Problem zurückgekommen werden.

Bei einer Bogenbrücke mit aufgehängter Fahrbahn mit oder ohne Traversen kann es unter Umständen vorkommen, dass die durch den horizontalen Winddruck und andere horizontale Kräfte erzeugten wagrechten Verschiebungen Nebenspannungen im Bogenscheitel hervorrufen, die das Ausknicken des Bogens zur Folge haben können. Beim Entwurf einer solchen Brücke in Eisen oder in Eisenbeton kann mit Hilfe vorheriger Ausführungen die Knicksicherheit der Bogen geschätzt werden. Eine allgemein befriedigende Theorie der Knickung kann nur mit Hilfe der statistischen Mechanik entwickelt werden.

Das projektierte Heidsee-Werk, eine Ergänzungs-Anlage zum Albula-Kraftwerk der Stadt Zürich.

Das im Herbste 1909 in Betrieb genommene Albula-Kraftwerk der Stadt Zürich[1]) ist für eine Ausnützung von rund 16 m^3/sek Wasser bei rund 145 m Nutzgefälle gebaut worden, entsprechend einer Dauerleistung von sieben der in der Zentrale Sils installierten acht Drehstrom-Generatoren von $7 \times 2300 = 16\,100$ kW. Da in den Wintermonaten Januar bis März die Wassermenge auf rund 6 m^3/sek zurückgehen kann, so bestand von jeher das Bedürfnis nach Ergänzungskraft während der Wintermonate, um eine höchstmögliche Ausnützung des Albula-Kraftwerks, sowie der ältern und kleinern Wasserkraftanlage im Letten zu Zürich zu erzielen. Wie wir in einem vor $2^1/_2$ Jahren in der „Schweiz. Bauzeitung" erschienenen Aufsatze[2]) geschildert haben, ist die ebenfalls im Letten erstellte kalorische Ergänzungsanlage mit einer, bezw. zwei eigenartigen Momentreserven für die elektrische Beleuchtung der Stadt Zürich in Verbindung gebracht worden. Ausserdem bezieht Zürich schon seit 1903 elektrische Ergänzungs-Energie von auswärts (erst von der A.-G. Motor, nunmehr von den Nordostschweizerischen Kraftwerken). Projekte der Verstärkung der eigenen Ergänzungsanlagen sind jedoch stets verfolgt worden; so hat beispielsweise das Jahr 1913 die Vorlage einer kalorischen Ergänzungsanlage im Guggach zu Zürich gebracht; den Lesern der „Schweiz. Bauzeitung" dürfte die Ablehnung jener Vorlage in der städtischen Volksabstimmung noch in Erinnerung sein.[3])

Nunmehr steht die Abstimmung für eine hydraulische Ergänzungsanlage bevor, der man heute mit umsomehr Befriedigung zustimmen kann, als man 1913 gegen die Guggach-Anlage Bedenken haben musste. Da das heute vorliegende Projekt als tatsächliche Ergänzung der Albula-Anlage anzusehen ist, und zudem eine, für die massgebenden Betriebsstunden zur Zeit der „Lichtspitzen" im Winterhalbjahr ausreichende Steigerung der Akkumulierbarkeit von Betriebswasser für die stadtzürcherischen Kraftanlagen bringt, so ist es auch geeignet, die wirtschaftliche Schwäche der bestehenden Momentreserven für die elektrische Beleuchtung von Zürich zu mildern; auf diese Möglichkeit haben wir übrigens in unserm, oben zitierten Aufsatz bereits hingewiesen.[4])

Die projektierte Ergänzungsanlage zum Albula-Kraftwerk soll die Wasserkraft des Heidbachs zwischen Heidsee und Albula-Stollen, bei 562 m Nutzgefälle einerseits, und über das Albula-Gefälle von 145 m anderseits nutzbar machen, wobei der durch ein Zusatzbecken vergrösserte Heidsee als Akkumulierraum für rund zwei Millionen nutzbare Kubikmeter in Frage kommt. Die in Betracht fallenden Oertlichkeiten sind in der nebenstehenden Abbildung ersichtlich, aus der auch die massgebenden Höhenkoten entnommen werden können. Die projektierte Wasserfassung befindet sich unterhalb des See-Auslaufs, auf Kote 1459,50 m, wo der Einbau eines Wehres in den Heidbach vorgesehen ist. Die Wasserführung vom Wehr zum Wasserschloss, oberhalb Muldain, soll teils in einem offenen Zulaufkanal, teils in einem Stollen erfolgen und ist für ein Quantum von 2,2 m^3/sek bemessen, das im Maximum in den für die Benutzung von Ergänzungskraft massgebenden Betriebsstunden verwertet werden soll. Die Druckleitung, bestehend aus einem obern 540 m langen Teil aus genieteten Rohren und aus einem untern Teil aus geschweissten Röhren von 1241 m Länge, führt zu dem auf dem

[1]) Bd. XLVII, S. 123, 294, 307 (März/Juni 1906), Bd. LVII, S. 239 (29. April 1911).
[2]) Band LXIV, S. 231 und 238 (21./28. Nov. 1914).
[3]) Band LXI, S. 77 (8. Febr. 1913) und 260 (10. Mai 1913).
[4]) Band LXIV, Seite 233 und 239.