

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 69/70 (1917)  
**Heft:** 14

**Artikel:** Berechnung statisch unbestimmter Eisenbeton-Konstruktionen mit Berücksichtigung der Torsionsspannungen  
**Autor:** Kasarnowsky, S.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33856>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dienstingang ist die Einfüllung zum Eisschrank (E), davor die Speisekammer, anschliessend Dienst-Klosett, Besenraum und Küche. In dieser ist ein freistehender Herd eingebaut worden (Abb. 10, S. 158); unter die Hallentreppe geschoben ist eine raumsparende Sitznische mit Tisch (T in Abb. 3). Ein Speisenaufzug bedient den obern Stock (Abb. 4) vom Office her, wo u. a. die Silberspültröge und ein Silberschrank eingebaut sind.

Wie die Grundrisse zeigen, erfuhren die Gesellschaftsräume (Abb. 3) eine wesentliche Umformung im Sinne axialer Orientierung. Weniger geändert wurde die Einteilung im III. Stock. Im Dachstock schuf der Architekt zwei von einander getrennte Raumgruppen: die eine, für die Herrschaft und ihre Gäste, liegt an dem kleinen, recht stimmungsvollen Korridor (Tafel 22 oben); die andere ist für die Dienerschaft bestimmt (Abb. 5).

Sowohl Halle wie Gesellschaftsräume sind durchweg von grossen Abmessungen und in der Ausstattung, wenn auch nicht prunkvoll, doch von einer gewissen Eleganz und Gediegenheit, wie aus den Tafeln und den Abbildungen 7 bis 9 zu sehen. Es ist klar, dass wie das verwendete Material, so auch die Installationen durchweg erst-

und Heizkammer (mit Dunstgefäss und Befeuchtungs-Düsen) hindurch dem Raume zu. Im Sommer dient die Heizkammer zur Abkühlung der Luft. Aus der Halle wird die verbrauchte Luft durch einen zweiten Ventilator abgesaugt und je nach Bedarf entweder durch den

Wäsche-Tröckne-Raum oder direkt über Dach abgeführt. Die Temperaturregelung dieser Lüftungsanlage erfolgt automatisch. Toilette, W. C. und Bad haben einen besonderen Ventilator.

Der gesamte Umbau konnte in der bemerkenswert kurzen Zeit vom 1. April bis 1. Oktober 1913 durchgeführt werden. Diese Leistung, wie überhaupt die ganze, geschickte Lösung der komplizierten Aufgabe durch den Architekten, dürfte auch in Fachkreisen berechnete Anerkennung finden.

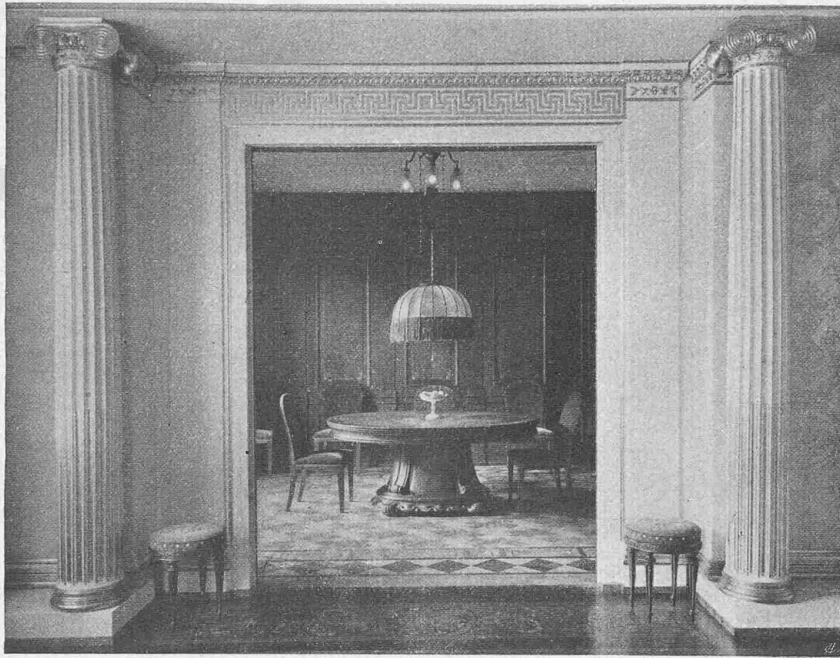


Abb. 9. Blick aus dem neuen Salon ins Esszimmer.

### Berechnung statisch unbestimmter Eisenbetonkonstruktionen mit Berücksichtigung der Torsionsspannungen.

Von S. Kasarnowsky, Ingenieur, Zürich.

(Fortsetzung von Seite 144.)

III. Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen.  
1. Allgemeines. Der grösste Teil der im Eisenbetonbau gebräuchlichen durchgehenden Träger sind Balken auf

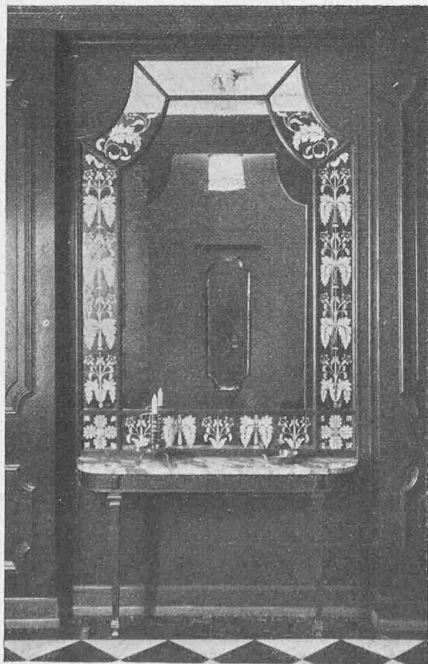


Abb. 7. Wandspiegel im Entree (II. Stock).



Abb. 8. Garderobe-Toilette (II. Stock).

klassig sind. Insbesondere betrifft dies die durch Gebrüder Sulzer (Winterthur) eingerichtete Heizung und Pulsionslüftung der Halle. Ein Ventilator saugt die frische Luft an der Südseite des Daches an und führt sie durch Stofffilter

elastisch drehbaren Auflagern. Die technische Literatur der letzten Jahre weist eine ganze Reihe von Arbeiten auf, die sich mit der Statik des mit seinen Stützen starr verbundenen kontinuierlichen Balkens, des sogenannten kontinuierlichen







Abb. 11. Verkaufsladen für Porzellan- und Kristallwaren (vergl. Seite 156).

$\varphi_1, \varphi_2 \dots$  Funktionen aller Kopfmomente  $\mu_1, \mu_2 \dots$ ) Wir erhalten:

$\varphi_1 = -\Theta_1 \mu_1, \varphi_2 = -\Theta_2 \mu_2, \varphi_3 = -\Theta_3 \mu_3$  usw. (29) Die Koeffizienten  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \dots$  sind die  $J_0 E$ -fachen Verdrehungen der Auflager (Säulen oder Querträger) entsprechend einem Kopfmoment  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$  usw.

4. Berechnung der Koeffizienten  $\delta$  und  $\Theta$ . Ist für jedes Auflager die  $r$ -Linie aufgetragen, so kann man die Neigungswinkel  $\delta$  in  $B$  aus der bekannten Gleichung

$$\delta = \frac{l}{6} \cdot \frac{J_0}{J} \cdot (2 M_B + M_C)$$

oder mit  $\alpha = \frac{J_0}{J} \quad \delta = \alpha \frac{l}{6} (2 M_B + M_C) \dots (30)$  bestimmen. Es bedeuten hier:  $M_B$  und  $M_C$  die Auflagermomente eines Balkens  $BC$ ,  $l$  seine Spannweite und  $J$  sein Trägheitsmoment. Man erhält z. B. aus Abbildung 7 mit

$$\alpha_2 = \frac{J_0}{J_2} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{J_0}{J_1}$$

$$\delta_{23} = \alpha_2 \frac{l}{6} (2 C' C'' - B B') \quad \text{und} \quad \delta_{33} = -\alpha_1 \frac{l}{3} B B'$$

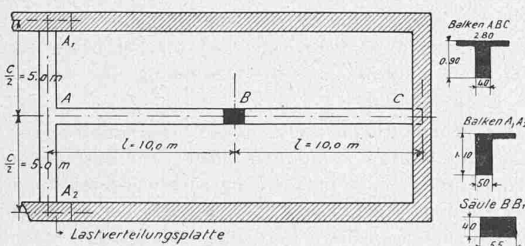


Abb. 8

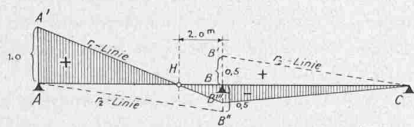


Abb. 8<sup>a</sup>

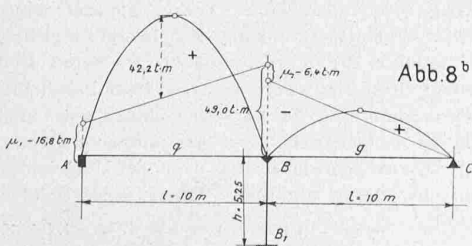


Abb. 8<sup>b</sup>

Zur Kontrolle kann man  $\delta_{23}$  auch aus  $\delta_{23} = \alpha_2 \frac{l}{6} (2 B B' - C' C'')$  berechnen.

Die Koeffizienten  $\Theta$  werden für drei verschiedene Auflagerbedingungen bestimmt.

a) Die Stütze sei eine am Fusse eingespannte Säule mit dem konstanten Trägheitsmoment  $J'$  und der Höhe  $h$ ; aus Gleichung (30) folgt dann mit Berücksichtigung der Abbildung 6

$$\Theta = \frac{J_0}{J'} \frac{h}{4} \dots (31)$$

b) Die Stütze sei durch ein festes Gelenk gestützt. Mit den gleichen Bezeichnungen wie vorher, erhalten wir aus Gleichung (30)

$$\Theta = \frac{J_0}{J'} \frac{h}{3} \dots (32)$$

c) Die Auflagerung erfolge durch einen Querträger, der gegen Verdrehungen senkrecht zu seiner Axe auf beiden Lagern eingespannt ist (Abbildung 6a).

Wirkt in  $C$  ein Torsionsmoment  $= 1$ , so entstehen in  $C_1$  und  $C_2$  zwei Auflagermomente  $m_1$  und  $m_2$ , deren Summe  $= 1$

ist. Der Punkt  $C$  erleidet eine Verdrehung  $\Theta$ , die sich auf zwei Arten bestimmen lässt. Die Strecke  $C_1 C$  ist durch ein Torsionsmoment  $m_1$  beansprucht, das in  $C$

eine Drehung  $\Theta = \frac{J_0}{T} \cdot \frac{E}{G} \cdot m_1 c_1$  erzeugt. Analog erhält

man  $\Theta = \frac{J_0}{T} \cdot \frac{E}{G} m_2 c_2$ . Aus diesen beiden Gleichungen

folgen  $m_1 c_1 = m_2 c_2$  und mit  $m_1 + m_2 = 1$

$$m_1 = \frac{c_2}{c} \quad \text{und} \quad \Theta = \frac{c_1 c_2}{c} \cdot \frac{J_0}{T} \cdot \frac{E}{G} \dots (33)$$

5. Aufstellung der Gleichungen für die statisch unbestimmten Größen  $\mu_1, \mu_2 \dots$ . Aus den Gleichungen (28) und (29) ergeben sich:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 (\Theta_1 + \delta_{11}) + \mu_2 \delta_{12} + \mu_3 \delta_{13} + \mu_4 \delta_{14} + \dots &= -\varphi_{01} \\ \mu_1 \delta_{21} + \mu_2 (\Theta_2 + \delta_{22}) + \mu_3 \delta_{23} + \mu_4 \delta_{24} + \dots &= -\varphi_{02} \\ \mu_1 \delta_{n1} + \mu_2 \delta_{n2} + \mu_3 \delta_{n3} + \dots + \mu_n (\Theta_n + \delta_{nn}) &= -\varphi_{0n} \end{aligned} \right\} (34)$$

Die Aufgabe der Berechnung des Trägers  $ABC \dots$  ist im Prinzip gelöst, der Gleichungssatz (34) liefert für jeden Belastungszustand die zugeordneten Momente  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_n$ .

Die langwierige Auflösung eines solchen Gleichungssystems kann in den meisten Fällen vermieden werden. Wie leicht einzusehen ist, sind die unterstrichenen Koeffizienten bedeutend grösser, als alle anderen Koeffizienten derselben Gleichung. Man erhält daher gute Näherungswerte für die Momente  $\mu_1, \mu_2 \dots$ , wenn man die nicht unterstrichenen Glieder vernachlässigt.

$$\mu_1' (\Theta_1 + \delta_{11}) = -\varphi_{01}; \quad \mu_2' (\Theta_2 + \delta_{22}) = -\varphi_{02} \text{ usw. } (35)$$

Um anzudeuten, dass die Gleichungen (35) nur Näherungswerte liefern, sind  $\mu_1, \mu_2 \dots$  durch  $\mu_1', \mu_2' \dots$  ersetzt. Will man die Momente  $\mu_1, \mu_2 \dots$  genauer berechnen, so setze man

$$\mu_1 = \mu_1' + \Delta \mu_1; \quad \mu_2 = \mu_2' + \Delta \mu_2 \dots (36)$$

Man erhält dann mit Hilfe von Gleichung (34)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mu_1 (\Theta_1 + \delta_{11}) &= -[\mu_1' \delta_{12} + \mu_3' \delta_{13} + \dots] \\ \Delta \mu_2 (\Theta_2 + \delta_{22}) &= -[\mu_1' \delta_{21} + \mu_3' \delta_{23} + \dots] \end{aligned} \right\} (37)$$

usw.

Durch diese Rechnung wird die schwerfällige Determinantenauflösung vermieden.

Zahlenbeispiel. Es sei ein Tragwerk nach Abbildung 8 zu berechnen. Mit Hilfe der Winkler'schen Tabellen erhält man folgende Momente im Hauptsystem:

1. Ständige Last  $g = 2,00 \text{ t/m}^2$ 

Grösstes positives Moment

$$M_0^+ = 0,07 \cdot 2 \cdot 10^2 = +14,0 \text{ mt}$$

Auflagermoment

$$M_0^- = 1,25 \cdot 2 \cdot 10^2 = -25,0 \text{ mt}$$

2. Bewegliche Last  $p = 4,00 \text{ t/m}^2$ 

Grösstes positives Moment

$$M_0^+ = 0,095 \cdot 4 \cdot 10^2 = +38,0 \text{ mt}$$

Auflagermoment bei Belastung eines Feldes

$$M_0^- = -0,0625 \cdot 4 \cdot 10^2 = -25,0 \text{ mt}$$

Mit Hilfe dieser Momente können die Träger und Säulen provisorisch dimensioniert werden. Wir erhalten für den Träger  $ABC$  den Querschnitt  $90/40$  und das Trägheitsmoment  $J_0 = 4250000 \text{ cm}^4$ , für den Träger  $A_1 A_2$  den Querschnitt  $110/50$  und die Torsionsziffer  $T = 3350000 \text{ cm}^4$ , für die Säule  $BB_1$  den Querschnitt  $55/40$  und das Trägheitsmoment  $J' = 550000 \text{ cm}^4$ . Es ergeben sich dann

$$\frac{J_0}{J'} = \frac{4250000}{550000} = 7,7 \quad \text{und mit } \frac{E}{G} = 2,20$$

$$\frac{J_0 E}{T G} = \frac{4250000}{3350000} \cdot 2,20 = 2,8$$

Was die  $r$ -Linien anbelangt, so ergibt sich die  $r_1$ -Linie ohne weiteres, wenn man aus  $A'$  durch den Festpunkt  $H$  den Geradenzug  $A'B''C$  zieht. Die  $r_2$ -Linie besteht in unserem Falle aus Symmetriegründen aus zwei Geraden  $AB''$  und  $B'C$ , wobei  $B'B = B''B = \frac{1}{2}$  sind (Abbildung 8 a).

Die Koeffizienten  $\delta$  und  $\Theta$  lassen sich wie folgt bestimmen. Aus der Abbildung 8 a ergeben sich:

$$\delta_{11} = \frac{l}{6} (2 - 0,25) = \frac{10}{6} \cdot 1,75 = 2,92 \text{ m}$$

$$\delta_{21} = -\frac{l}{6} (1 - 2 \cdot 0,25) = -\frac{10}{6} \cdot 0,5 = -0,83 \text{ m}$$

$$\delta_{22} = \frac{l}{6} 2 \cdot 0,50 = 1,67 \text{ m}$$

$$\delta_{12} = \frac{l}{6} (-0,50) = -0,83 \text{ m (Probe)}$$

Aus der Gleichung (33) erhält man mit  $c_1 = c_2 = \frac{c}{2}$

$$\Theta_1 = \frac{J_0 E}{T G} \cdot \frac{c_1 c_2}{c} = \frac{c}{4} \cdot \frac{J_0 E}{T G} = \frac{10}{4} \cdot 2,8 = 7,0 \text{ m}$$

Aus der Gleichung (31) folgt mit  $h = 5,25 \text{ m}$

$$\Theta_2 = \frac{J_0 E}{J' G} \cdot \frac{h}{4} = 7,7 \cdot \frac{5,25}{4} = 10,1 \text{ m}$$

Es können nun die Gleichungen für die Momente  $\mu_1, \mu_2$  aufgestellt werden:

$$(2,92 + 7,0) \mu_1 - 0,83 \mu_2 = -\varphi_{01}$$

$$-0,83 \mu_1 + (1,67 + 10,1) \mu_2 = -\varphi_{02}$$

Die Verdrehungen des Hauptsystems  $\varphi_{01}$  und  $\varphi_{02}$  werden für zwei Belastungsfälle ermittelt:

Erster Belastungsfall: für totale Belastung des Trägers  $ABC$  mit  $q = 2 + 4 = 6 \text{ t/m}^2$ . Man erhält

$$\varphi_{01} = \frac{q l^3}{24} - \frac{q l^2}{8} \cdot \frac{l}{6} = \frac{q l^3}{48} = \frac{6 \cdot 10^3}{48} = 125 \text{ m}^2$$

$$\text{und } \varphi_{02} = 0$$

Zweiter Belastungsfall: Feld  $AB$  total, Feld  $BC$  mit  $g = 2,0 \text{ t/m}^2$  belastet. Man erhält

$$\varphi_{01} = 2 \cdot 125 - 50 \cdot \frac{10}{6} = 167 \text{ m}^2$$

$$\varphi_{02} = 2 \cdot 125 + 50 \cdot \frac{2 \cdot 10}{6} = -84 \text{ m}^2$$

Mit Benutzung der Gleichungen (35) bestimmen sich  $\mu_1', \mu_2'$  zu

Erster Belastungsfall: Zweiter Belastungsfall:

$$\mu_1' = -\frac{125}{9,92} = -12,6 \text{ mt} \quad \mu_1' = -\frac{167,0}{9,92} = -16,8 \text{ mt}$$

$$\mu_2' = 0 \quad \mu_2' = \frac{+82}{11,77} = +6,4 \text{ mt}$$

Die genaue Rechnung liefert für den 1. Belastungsfall

$$\Delta \mu_1 = 0 \quad \Delta \mu_2 (1,67 + 10,1) = +0,88 \cdot 12,6$$

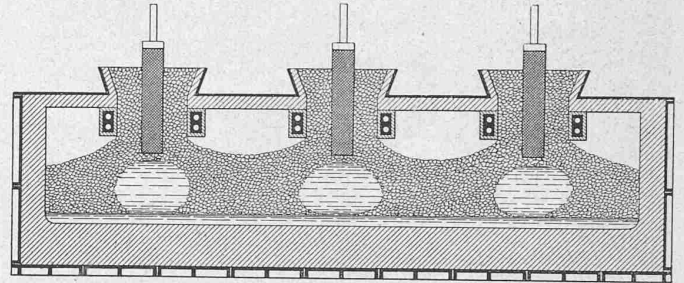
oder

$$\Delta \mu_2 = \mu_2 = +0,94 \text{ mt}$$

In der Abbildung 8 b ist die Momentenlinie für den zweiten Belastungszustand eingezeichnet. Man erhält für das grösste positive Moment den Wert  $+42,2 \text{ mt}$  statt  $14 + 38 = 52 \text{ mt}$  der ersten Rechnung. (Schluss folgt.)

## Miscellanea.

**Der Helfenstein-Ofen in Domnarfvät.** Seit 1. Mai 1913 befindet sich im schwedischen Werk Domnarfvät, das durch die seinerzeitige Durchführung eines Probetriebs mit dem Roheisen-Elektro-Ofen von Grönwall, Lindblad und Stalhane auf dem Gebiete, der elektrischen Eisenerzeugung bahnbrechend vorgegangen ist<sup>1)</sup> auch ein Elektro-Hochofen Bauart *Helfenstein* von 12000 PS in Betrieb. Der in der beigegebenen, „Stahl und Eisen“ entnommenen Abbildung schematisch im Schnitt dargestellte Ofen hat rund 11 m Länge und 4 m Breite; die Höhe bis zur Beschickungsbühne beträgt 5 m; bzw. einschliesslich der rund 6 m hohen Materialsilos



Schematischer Längsschnitt eines Elektro-Hochofens nach Bauart Helfenstein.

sowie der Stromzufuhr- und Regulierungs-Einrichtungen insgesamt 11 m. Jedes Elektrodenbündel führt bei Vollast 30000 bis 40000 A bei einer Spannung von 80 bis 100 V. Ueber die Arbeitsweise des Ofens und die ersten Betriebs-Ergebnisse haben wir bereits auf S. 287 von Band LXV (19. Juni 1915) einige Angaben gemacht. In „Stahl und Eisen“ vom 2. November 1916 gibt nun Dr. Max Oesterreich in Wien darüber nähere Einzelheiten, aus denen insbesondere ersichtlich ist, dass seither der Elektroden-Verbrauch von 7 auf 2 kg pro t Roheisen vermindert werden konnte. Im übrigen zeigen die Ergebnisse, dass der Helfenstein-Ofen, der als Niederschacht-Ofen bezeichnet werden kann, sich in bezug auf elektrischen Energieaufwand und Kohlenverbrauch ungünstiger stellt, als der Hochschacht-Ofen nach Bauart Grönwall. Dieser Nachteil wird jedoch ausgeglichen durch das geringere Anlagekapital, den geringeren Elektrodenverbrauch, den grösseren Heizwert der Abgase, die leichtere betriebstechnische Handhabung des Ofens, die Möglichkeit der Verwendung von unbrikettiertem Schlich und die geringere Arbeiterzahl. Auch lässt sich im Helfenstein-Ofen Koks als Reduktionsmittel verwenden, doch kann darüber bei der kurzen Betriebsperiode mit Koks noch kein abschliessendes Urteil abgegeben werden. Die mit dem Helfenstein-Ofen gemachten Erfahrungen waren im übrigen derart ermutigend, dass gegenwärtig in Norwegen eine Anlage von 6000 bis 8000 PS im Bau ist, die im Laufe dieses Jahres in Betrieb genommen werden soll. Es soll bei dieser Anlage besonderer Wert auf eine rationelle Gewinnung und Ausnutzung der Abgase gelegt werden.

**Der Torsiograph, ein neues Instrument zur Untersuchung von Wellen.** Von den bisher zur Bestimmung der in einer Welle auftretenden Erscheinungen verwendeten Apparaten hat wohl der Torsionsindikator von *Föttinger*, der bei der Untersuchung von Schiffsmaschinenwellen wertvolle Dienste geleistet hat, die grösste Verbreitung gefunden. Für eine allgemeine Untersuchung genügt er jedoch nicht, da man mit ihm die Weg- und Geschwindigkeitsschwankungen der Welle nicht messen und ihn nicht an jeder beliebigen Stelle der Welle anbringen kann. Demgegenüber gestattet der von Dr.-Ing. *Jos. Geiger* in der „Z. d. V. d. I.“ beschriebene „Torsiograph“ die Messung der Winkelabweichung umlaufender Wellen, d. h. der Abweichung, am Wellenumfang, einer ungleichmässig laufenden Welle von einer mit der gleichen Umlaufzahl genau gleichmässig rotierenden Welle. Dieser Apparat zeigt also nicht die Geschwindigkeitsschwankung (Ungleichförmigkeitsgrad) einer Welle an, sondern die Wegschwankung an deren Umfang, eine Grösse, die bei vielen Betrieben, wie z. B. beim Parallelbetrieb von Wechselstrom-Generatoren, bei Papiermaschinen usw. ungleich wichtiger ist, als die erstgenannte. Aus dem aufgenommenen Diagramm der Wegschwankungen lässt sich dann der Ungleichförmigkeitsgrad in einfacher Weise ermitteln. Mittels eines Bandes aus

<sup>1)</sup> Vergl. Bd. LIX, S. 164 (23. März 1912) und Bd. LXI, S. 336 (21. Juni 1913).