Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 69/70 (1917)

Heft: 9

Artikel: Neuere Beobachtungen über die kritische Winkelgeschwindigkeit von Wellen

Autor: Stodola, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33839

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Band 69. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 9

Neuere Beobachtungen über die kritische Winkelgeschwindigkeit von Wellen.

Von Prof. Dr. *A. Stodola*, Zürich.

1. Einzelscheibe mit endlichen Relativauslenkungen.

Die Forsetzung der in dieser Zeitschrift[1]) beschriebenen Versuche führte alsbald zur Erkenntnis, dass die relativen Auslenkungen der Welle gegenüber der „stationären" Bewegung keineswegs unendlich klein sind, sondern mit der Weite der stationären Auslenkung vergleichbare Grösse haben. Dieser Umstand bedeutet eine grosse Erschwerung für die Theorie der Erscheinungen, die zu wesentlichen Vereinfachungen gezwungen wird. In einem Falle sind endliche Ausschläge zulässig, wenn wir nämlich die Annahme machen, das Trägheitsmoment der Scheibe sei so gross, dass die Winkelgeschwindigkeit ω_0 ihrer Drehung um den eigenen Schwerpunkt unveränderlich bleibt. Wir betrachten nun die relative Bewegung der Scheibe inbezug auf einen mit der Geschwindigkeit ω_0 um die geometrische Axe der Welle rotierenden Raum.

Um uns kurz fassen zu können, verweisen wir auf die Ableitung, die *V. Blaess* in der „Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure" 1914, S. 185 gab, dessen Gleichungen Nr. VI jedoch durch die Aufnahme der Schwerkraftkomponenten $-G \sin \omega t$, $-G \cos \omega t$ (d. h. die Schwerkraft senkrecht nach abwärts im ruhenden Raum wirkend gedacht) zu vervollständigen sind. Mit der Bezeichnung $\Delta = \omega^2 - \omega_k^2$; $G = mg$, und wenn ξ, η die relativen Auslenkungen bedeuten, erhält man[2])

$$\left.\begin{aligned} \xi^{\cdot\cdot} &= \Delta\,\xi + 2\,\omega\,\eta^{\cdot} - g \sin \omega t \\ \eta^{\cdot\cdot} &= \Delta\,\eta - 2\,\omega\,\xi^{\cdot} - g \cos \omega t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Der Ansatz $\xi = u + X \sin \omega t$; $\eta = v + Y \cos \omega t$ führt auf

$$\left.\begin{aligned} u^{\cdot\cdot} &= \Delta u + 2\,\omega\,v^{\cdot} \\ v^{\cdot\cdot} &= \Delta v - 2\,\omega\,u^{\cdot} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\text{a})$$

und auf die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} (2\,\omega^2 - \omega_k^2)\,X - 2\,\omega^2\,Y - g &= 0 \\ -2\,\omega^2\,Y + (2\,\omega^2 - \omega_k^2)\,Y - g &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

deren Determinante $D = -\,\omega_k^2\,(4\,\omega^2 - \omega^{k2})$ ist. Hiernach wären scheinbar unendlich grosse Lösungen $X\,Y$ vorhanden, wenn $D = 0$, d. h. $\omega = \omega_k/2$ ist. In Wirklichkeit ist

$$X = \frac{g\,(4\,\omega^2 - \omega_k^2)}{D}\ ;\quad Y = \frac{g\,(4\,\omega^2 - \omega_k^2)}{D}$$

und man kann mit dem Faktor $4\,\omega^2 - \omega_k^2$ in Zähler und Nenner kürzen, sodass die Grenzwerte $X = Y = -g/\omega_k^2$ übrig bleiben. Rechnet man von vornhinein mit $\omega = \omega_k/2$ die Beizahlen in Gleichung (1) [Bd. LXVIII, S. 210] aus, so werden beide Gleichungen identisch, und man findet, dass nur die Summe $X + Y$ bestimmt ist. Das Verschwinden der Determinante D ist also hier kein vollwertiges Kriterium für eine kritische Geschwindigkeit, bildet aber doch ein wichtiges Anzeichen dafür, da D der Grenzwert der Determinante des vollständigen Problemes ist, die im früheren als Gleichung (5) angeführt war, und im Grenzfalle $e = 0$ in der Tat die kritische Geschwindigkeit ω_1 gegen den Wert $\omega_k/2$ konvergieren lässt.

Im übrigen ist noch eine zweite allgemeine Schwingungsart gemäss Gleichung (12 a) möglich. Die Form derselben wird durch den Ansatz

$$u = A\,e^{i\lambda t}\ ;\quad v = B\,e^{i\lambda t}$$

erhalten, der auf $\lambda_1 = \omega_k + \omega$; $\lambda_2 = \omega_k - \omega$; $\lambda_3 = -\lambda_1$; $\lambda_4 = -\lambda_2$, führt, also für u, v die Werte

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 \cos(\omega_k + \omega)\,t + A_2 \sin(\omega_k + \omega)\,t + \\ &\quad + A_3 \cos(\omega_k - \omega)\,t + A_4 \sin(\omega_k - \omega)\,t \\ v &= B_1 \cos(\omega_k + \omega)\,t + \;.\;\;.\;\;. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

liefert. Dabei sind u, v nicht unendlich klein, sondern können von gleicher Grössenordnung sein, wie die Verbiegung durch die Fliehkraft infolge der vorhandenen Exzentrizität.

Die gewonnenen Formeln sind gut geeignet, den Mechanismus der durch die Schwerkraft bewirkten Schwingung zu veranschaulichen. Setzen wir $\omega_k = 2\,\pi\,n_k$; $\omega = 2\,\pi\,n$, wo n_k, n die entsprechenden *sekundlichen* Umlaufzahlen bedeuten, so erkennt man an (14), dass die Eigenschwingung der Scheibe relativ zum mitrotierenden Raum die Frequenzen $n_k + n$ und $n_k - n$ besitzt. Die Schwerkraft trachtet relativ zu diesem Raum eine Schwingung mit der Frequenz n zu erzeugen. Stimmt diese mit der Eigenfrequenz überein, so haben wir *Resonanz*, also Steigerung der Schwingungsweite, und dies findet statt, wenn $n = n_k - n$ oder

$$n = \frac{n_k}{2}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ist. Damit ist also der tiefste Wert der *kritischen Umlaufzahl mit Rücksicht auf das Eigengewicht wieder gefunden*. Freilich erscheint wegen des unendlich grossen Trägheitmomentes gemäss Gleichung (13) die Schwingungsweite endlich und wir haben keine Unstabilität. Diese tritt jedoch sofort auf, sobald das Trägheitsmoment endlich wird, sodass auch die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ins Schwanken gerät, wie die frühere allgemeine Untersuchung [Gleichungen (1) bis (11) auf Seite 210 letzten Bandes] erwiesen hat.

Es mag beigefügt werden, dass man die Form (14) aus den bekannten klassischen Integralen von Föppl (für unendlich grosses Massenmoment) ohne weiteres entwickeln kann, indem man von den absoluten Koordinaten durch die bekannte einfache Transformation auf die relativen Koordinaten übergeht. Die relative Schwingung ihrerseits ist also nichts anderes, als die absolute Schwingung des Schwerpunktes unter der Wirkung einer der Auslenkung proportionalen Kraft.

2. Welle mit vielen, über die ganze Länge verteilten Scheiben.

Wir versuchen es, die Wirkung der Schwerkraft unter ähnlichen vereinfachenden Annahmen anschaulich zu machen, wie oben. Es bedeute

- M die Gesamtmasse aller Scheiben einschliesslich der Welle,
- L die Gesamtlänge der Welle, die in zwei Lagern frei gestützt angenommen wird,
- x die Koordinate in Richtung der Wellenaxe,
- y, z die Koordinaten senkrecht dazu (y wagerecht),
- $m_1 = M : L$ die auf die Längeneinheit entfallende Masse.
- $\Theta_y = \Theta_z$ das Massenträgheitsmoment einer Scheibe bezogen auf einen Durchmesser,
- l_1 der Abstand zweier Scheiben,
- $\Theta_1 = \Theta_y : l_1$ das auf die Längeneinheit entfallende Trägheitsmoment,
- J, E Querschnitts-Trägheitsmoment der Welle und Elastizitätsmodul,
- S Schubkraft in einem Querschnitt,
- M Biegungsmoment in einem Querschnitt.

Wir setzen voraus, dass die Scheiben-Exzentrizität streng $= 0$ sei, und schneiden ein Element von der Länge dx aus der Welle heraus, für welches $m_1\,dx$ die Masse, $\Theta_1\,dx$ das Trägheitsmoment bedeuten. Wir erhalten für die Bewegung in der YOX Ebene, relativ zu einem

[1]) Band LXVIII, S. 197 u. 209, insbesondere S. 210 (3. Nov. 1916).

[2]) Die die Ableitungen nach der Zeit bezeichnenden Punkte sind aus typographischen Gründen *seitlich* oben gesetzt.

mit ω rotierenden Raum die Schwerpunktsgleichung (16)

$$(m_1\,dx)\,y^{\bullet\bullet} = m_1\,dx\,\omega^2 y + 2\,m_1\,dx\,\omega\,z^{\bullet} + dS - m_1\,g\,dx \sin \omega t$$

wo rechts die Zusatzkräfte der Relativbewegung und die Zunahme der Schubkraft, sowie das Eigengewicht als beschleunigende Kräfte auftreten. Ferner erhalten wir die Drehungsgleichung um die zur Z-Axe parallele Axe, wenn $\tau = \partial y : \partial x$ die Neigung der elastischen Linie darstellt.[1])

$$(\Theta_1\,dx)\,\tau^{\bullet\bullet} = dM_y + S\,dx - \Theta_1\,dx\,\tau\,\omega^2 \quad . \quad . \quad (17)$$

Darin bedeutet dM die Zunahme des Biegungsmomentes zwischen Anfangs- und Endquerschnitt des Elementes, $S\,dx$ das Moment der Schwerkraft, und $\Theta_1\,dx\,\tau\,\omega^2$ das geraderichtende Moment der Zentrifugal-Zusatz-Kräfte. Es ist in Schwingungsaufgaben wichtig, das letztere nicht zu übersehen.

Endlich lautet die stets gültige Biegungsgleichung:

$$J E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Indem wir M_y aus (18) in (17), dann hieraus S in (16) einsetzen und für die Koordinate z ähnlich verfahren, entsteht:

$$\left.\begin{aligned} m_1\,y^{\bullet\bullet} &= m_1\,\omega^2 y + 2\,m_1\,\omega\,z^{\bullet} - \\ &\quad - J E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \Theta_1 \frac{\partial^2 y^{\bullet\bullet}}{\partial x^2} + \Theta_1\,\omega^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - m_1\,g \sin \omega t \\ m_1\,z^{\bullet\bullet} &= m_1\,\omega^2 z - 2\,m_1\,\omega\,y^{\bullet} - \\ &\quad - J E \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \Theta_1 \frac{\partial^2 z^{\bullet\bullet}}{\partial x^2} + \Theta_1\,\omega^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - m_1\,g \cos \omega t \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Wir betrachten die durch die Schwere hervorgerufene Schwingung, die, wie leicht einzusehen, durch den Ansatz

$$y = Y \sin \omega t \qquad z = Z \cos \omega t \quad . \quad . \quad (20)$$

gewonnen wird, worin Y, Z zu bestimmende Funktionen von x sind. Das Einsetzen in (19) liefert, wenn wir mit Y^{IV} Z^{IV} die vierten Ableitungen nach x bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} 2\,m_1\,\omega^2 Y - 2\,m_1\,\omega^2 Z - J E Y^{IV} - m_1\,g = 0 \\ -\,2\,m_1\,\omega^2 Y + 2\,m_1\,\omega^2 Z - J E Z^{IV} - m_1\,g = 0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Es ist also der Trägheitswiderstand der Drehungsschwingung stets gleich dem Moment der Zentrifugalkräfte, und das Trägheitsmoment Θ_1 fällt aus den Formeln heraus. Zur Bestimmung von Y und Z scheint der einfachste Weg zu sein, die Gleichungen (21) zu addieren und zu subtrahieren. Es treten dann die Summe $U = Y + Z$ und die Differenz $V = Y - Z$ wie folgt auf:

$$\left.\begin{aligned} J E\,U^{IV} &= -\,2\,m_1\,g \\ J E\,V^{IV} &= \quad 4\,m_1\,\omega^2 V \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Die erstere kann unmittelbar integriert werden und liefert für U eine ganze Funktion 4. Grades in x. Für die zweite Gleichung ist der Ansatz $V = a\,e^{hx}$ mit

$$h = \sqrt[4]{\frac{4\,m_1\,\omega^2}{J E}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

zu benutzen und liefert in bekannter Weise das Integral

$$V = a\,e^{hx} + a'\,e^{-hx} + b \cos hx + b' \sin hx \quad . \quad (24)$$

Dann wird endlich

$$Y = \tfrac{1}{2}(U + V); \; Z = \tfrac{1}{2}(U - V) \quad . \quad . \quad (25)$$

Die Konstanten werden durch die Grenzbedingungen bestimmt, die z. B. für die frei aufliegende Welle von der Länge L die folgenden sind: Für $x = 0$ und $x = L$; $Y = 0$; $Z = 0$; $Y'' = 0$; $Z'' = 0$. Diese Bedingungen ausgeschrieben, lassen erkennen, dass die gleiche Vorschrift auch für U und V gilt. Nur die für V hat für vorliegende Aufgabe Interesse und führt, wie man leicht nachrechnet, auf die Werte

$$a = 0 \quad a' = 0 \quad b = 0 \quad b' \sin h L = 0 \quad . \quad (26)$$

Soferne h d. h. ω einen beliebigen Wert besitzt, wird also nur der dem Gewicht entsprechende Biegungsanteil U vorhanden sein, während $V = 0$ ist. Sobald jedoch $h L = \pi$ oder 2π, 3π, ... usw, ist $\sin h L = 0$, und man darf b' einen beliebigen Wert zuschreiben; daher auch der Biegungsanteil V gemäss (24)

$$V = b' \sin h x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

eine beliebige Grösse annehmen kann. Die entsprechenden ω bilden dann die Reihenfolge der durch das Gewicht hervorgerufenen kritischen Winkelgeschwindigkeiten.

[1]) Vorzeichen wie in Fig. 258 in „Dampfturbinen", IV. Auflage, S. 299.

Zur Bestimmung der gewöhnlichen kritischen Umlaufzahl derselben Welle dient bei Ausserachtlassung des Schiefstellens der Scheiben die Gleichung

$$J E Y^{IV} = m_1\,\omega^2\,y$$

und liefert mit $k^4 = m_1\,\omega^2 / J E$ die Reihenfolge der kritischen Umlaufzahlen

$$k L = \pi \qquad 2\pi \qquad 3\pi \; . \; . \; . \; . \quad . \quad . \quad (28)$$

Vorhin war $\quad h L = \pi \qquad 2\pi \qquad 3\pi \; . \; .$

Zu jeder gewöhnlichen kritischen Geschwindigkeit ω_k gehört also eine durch das Gewicht hervorgerufene ω_g, die aus der Bedingung $h^4 = k^4$ oder $4\,m_1\,\omega_g^2 = m_1\,\omega_k^2$ sich zu

$$\omega_g = \frac{1}{2}\,\omega_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

ergibt. Eine strengere Theorie[1]), die mit endlicher Exzentrizität arbeitet, und die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit der Scheiben berücksichtigt, würde, wie wir das bei der einfachen Scheibe gezeigt haben, die Abhängigkeit der ω_g vom e und Θ nachzuweisen haben. Wegen der ungewöhnlichen Weitschweifigkeit einer solchen Theorie ziehen wir es vor, den Weg des Versuches zu beschreiten.

(Forts. folgt.)

Das „Suvrettahaus" bei St. Moritz.

Ein Beitrag zum Hotelbau-Problem der Gegenwart.

Von Dr. *S. Guyer.*

(Schluss von Seite 87.)

Eingangs erwähnte ich bereits die in breiten Schichten unsrer Gebildeten und z. T. auch in der Presse zu Tage tretende Strömung, die von *grossen Hotelbauten* in unsern Alpengegenden nichts wissen will. Ihre Wünsche und Bestrebungen, die sich zur *Heimatschutzbewegung* kristallisiert haben, haben eine so starke Verbreitung erfahren, dass wir nicht achtlos an ihnen vorübergehen dürfen, uns vielmehr die Frage stellen müssen: wie verhalten sich diese Kreise, die sich doch als die Träger der richtigen ästhetischen Traditionen und Anschauungen fühlen, heute zur Errichtung eines solchen Riesenhotels?

Um mit jemand richtig diskutieren zu können, muss man vorerst seine Meinung gründlich kennen lernen, muss man den Beweggründen nachgehen, die seine Ansichten veranlasst haben. Ich habe daher die Mühe nicht gescheut, mir das, was hie und da in der Zeitschrift für Heimatschutz über dieses Problem geschrieben wurde, etwas anzusehen. Viel ist es gerade nicht, denn eingehendere Kritiken einzelner Hotelbauten fehlen; aber an den oft nur kurzen Bemerkungen mehr allgemeiner Art, besonders zu den Bildern, merkt man zur Genüge, gegen *was* sich die Spitze dieser Kritik richtet.[2]) In wenigen Sätzen lässt sich die Ansicht der Heimatschutzfreunde über das Hotelproblem ungefähr folgendermassen zusammenfassen:

Die Ausgestaltung der Hotels als mehrere Stockwerke hohe, mächtige Kästen mit flachen Dächern, ist unschön. Vor allem wirkt ein solcher Riesenkasten in der unberührten Landschaft entstellend. Inbezug auf die Ausbildung des Einzelnen ist zu sagen, dass die Verwendung nicht bodenständiger, von fremden Stilen entlehnten Formen nicht in unsere Gegend passt. Daher sollen niedrigere, im Grundriss reicher gegliederte, in der Form (Dach, Bauformen, Details) unsere Heimatkunst berücksichtigende Bauten erstrebt werden. — Am klarsten und deutlichsten sind nun all diese Wünsche und Ansichten beim Projekt

[1]) Durch die Einführung des Momentes der Zentrifugal-Ergänzungskräfte in Formel (17) ist obigen Darlegungen übrigens ein höherer Genauigkeitsgrad erteilt worden, als bisher üblich war. Die nächste Wirkung hiervon ist interessanterweise die Folgerung, dass die Erscheinungen, die ich als kritische Umlaufzahl 2. Ordnung in „Dampfturbinen", IV. Aufl., S. 621 beschrieben habe, nicht auftreten können, so plausibel ihre Herleitung auch erscheinen mag. Die hier abgeleitete Schwingungsform ist die einzige, die unter dem Einfluss der Schwerkraft bestehen kann.

[2]) Man vergl. vor allem den Aufsatz von O. v. Greyerz im Jahrgang 1906 des Heimatschutz, Heft 2, S. 9 ff, sowie in Bd. XLVII, S. 120 (10. März 1906) der Schweiz. Bauzeitung, in dem das Problem am eingehendsten behandelt ist.