Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67/68 (1916)
Heft: 19

Artikel: Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen
Autor: Stodola, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33100

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen. — Ideen-Wettbewerb für einen Bebauungsplan der Gemeinde Bözingen. — Aargauische und schweizerische Eisenproduktion in Vergangenheit und Zukunft. — Der Montageunfall beim Bau der St. Lawrence-Brücke bei Quebec. — Reale Aufgaben. — Schweizerischer Elektrotechnischer Verein und Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke. — Miscellanea: Schweizer Muster-Messe in Basel. Eidgenössische Technische Hochschule. Die nationale Erziehung an der Mittelschule. Eine Petroleumrohrleitung von 65 *km* Länge. Hilfswerk der schweizer. Hochschulen. — Konkurrenzen: Neue Rheinbrücke in Eglisau. Orgelgehäuse für die St. Theodorskirche in Basel. — Literatur: Bericht über den Schutz elektrischer Anlagen gegen Ueberspannungen. Die Verwendung von Aluminium für Freileitungen. Graphischer statistischer Verkehrsatlas der Schweiz. Literarische Neuigkeiten. — Vereinsnachrichten: G. e. P.: Stellenvermittlung.

Band 68. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 19.**

Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen.

Von Prof. Dr. *A. Stodola*, Zürich.

(Schluss von Seite 199.)

Die Stabilität des Gleichgewichtes über der kritischen Geschwindigkeit.

Mit der Stabilität der gestörten Bewegung einer rotierenden Scheibe bei reibungsfreiem Medium hat es eine eigene Bewandtnis. Die äusserst subtile mathematische Untersuchung von *Behrens* [1]) schliesst gerade die der stationären Gleichgewichtslage benachbarten Gebiete aus. Die Methode der kleinen Schwingungen führt aber auf das eigentümliche Ergebnis, dass die stationäre Bewegung, bei der die Punkte *O S W* (vergl. die Abbbildung 5 auf Seite 198 in letzter Nummer) in eine Gerade fallen, ein unstabiles, dynamisches Gleichgewicht darstellt. In der von mir gegebenen Entwicklung [2]) verschwindet nämlich, worauf mich Herr Prof. A. Föppl aufmerksam machte, die Konstante b'' im partikulären Integral $\varepsilon = b' + b''t$ nicht [3]), und so besteht eine Labilität *nicht bloss über, sondern ebenso unter der kritischen Geschwindigkeit.* Dieses der Anschauung vollkommen widersprechende Ergebnis veranlasst uns, auf den Fall näher einzugehen. Die Erörterungen des Herrn Dr. Ing. O. Föppl haben viel zur Veranschaulichung der Vorgänge beigetragen; in mathematischer Hinsicht gewinnt man volles Verständnis auf folgendem Wege:

Statt den Flächensatz auf die Bewegung des Schwerpunktes allein anzuwenden, betrachten wir vielmehr die Gesamtbewegung. Das Impulsmoment (der Drall) der Schwerpunktsbewegung um den Anfangspunkt ist in den benützten Berechnungen („Die Dampfturbinen", Seite 627) $= m\,\varrho^2\,\varphi^{\bullet}$, jenes der Drehbewegung um den Schwerpunkt $= \Theta\,\psi^{\bullet}$; die Ableitung hievon nach der Zeit [4]) ist gleich dem äusseren Kraftmoment, das hier verschwindet, da die Kraft stets durch den Anfangspunkt geht. Daher ist

$$m\,\varrho^2\,\varphi^{\bullet} + \Theta\,\psi^{\bullet} = \text{konst.}$$

und bildet das erste Integral der Differentialgleichungen des Problemes. Setzen wir wieder $\varrho = \varrho_0 + z$; $\varphi = \omega t + \varepsilon$ und $\psi = \omega\,t + \vartheta$, wo $\vartheta = \tau + \varepsilon$, so können wir obige Gleichung nach $z\,\varepsilon\,\vartheta$ entwickeln, und finden:

$$m\,\varrho_0^2\,\omega_0 + \Theta\,\omega_0 + m\,(2\,\varrho_0\,\omega_0\,z + \varrho_0^2\,\varepsilon^{\bullet}) + \Theta\,\vartheta^{\bullet} = \text{konst.} \quad (1)$$

Das Impulsmoment der gestörten Bewegung kann nun dem Drall der stationären Bewegung gleich, oder davon verschieden sein. In letzterem Falle erhält man mit $\Theta = mq^2$

$$2\,\varrho_0\,\omega_0\,z + \varrho_0^2\,\varepsilon^{\bullet} + q^2\,\vartheta^{\bullet} = k_0 \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Im ersteren Falle ist $k_0 = 0$. Mit dieser Gleichung verbinden wir die erste und dritte des Systemes (9) in „Dampfturbinen", Seite 628, unter Einführung der Bezeichnung $\Delta = \omega_0^2 - \omega_k^2$, welche die Abkürzungen $\delta\omega_0^2 = \Delta$; $(1 - \delta)\,\omega_0^2 = \omega_k^2$; $(1 - \delta)^2\,\omega_0^2 : \delta = \omega_k^4 : \Delta$ erlaubt

$$z^{\bullet\bullet} - \Delta\,z - 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\varepsilon^{\bullet} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\Theta\,\vartheta^{\bullet\bullet} + a\,e\,\varrho_0\,(\varepsilon - \vartheta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Um die Konstante k_0 wegzubringen, müssen wir

$$z = z_0 + z_1\,; \quad \varepsilon = \varepsilon^{\bullet}_0 t + \varepsilon_1\,; \quad \vartheta = \varepsilon^{\bullet}_0 t + \vartheta_1 \quad (4)$$

setzen, wo $z_0\ \varepsilon^{\bullet}_0$ Konstante sind, über die wir so verfügen, dass beim Einsetzen in (1) und (2)

$$2\,\varrho_0\,\omega_0\,z_0 + (\varrho_0^2 + q^2)\,\varepsilon^{\bullet}_0 = k_0$$
$$-\Delta\,z_0 - 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\varepsilon^{\bullet}_0 = 0$$

sei. Darum ergibt sich abgekürzt:

$$z_0 = a_0\,k_0\,; \quad \varepsilon^{\bullet}_0 = b_0\,k_0$$

und es bleiben die auf Null reduzierten rechten Seiten der Gleichungen 1 bis 3 übrig, jedoch mit $z_1\ \varepsilon_1\ \vartheta_1$ als den Variablen. Die Integration erfolgt durch die gleichen Ansätze wie in „Dampfturbinen", Seite 628, und führt auf eine charakteristische Gleichung bloss 5. Grades in λ. Dabei ist nur eine Wurzel $\lambda_1 = 0$, und so stellen sich die vollständigen Integrale nach (4) in folgender Form dar:

$$\left.\begin{aligned} z &= k_0\,a_0 + k_1\,a_1 + k_2\,a_2\,e^{\lambda_2 t} + k_3\,a_3\,e^{\lambda_3 t} + \ldots \\ \varepsilon &= k_0\,b_0 t + k_1\,b_1 + k_2\,b_2\,e^{\lambda_2 t} + \ldots \\ \vartheta &= k_0\,c_0 t + k_1\,c_1 + k_2\,c_2\,e^{\lambda_2 t} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Hiemit sind $k_0\,k_1\,k_2\,\ldots$ als die willkürlichen Konstanten gedacht, während $a_1\,b_1\,c_1$; $a_2\,b_2\,c_2$; ... die Unterdeterminanten der charakteristischen Determinante bedeuten. Man erkennt, dass *Instabilität unter allen Umständen vorhanden ist, falls der anfängliche Drall des Systemes vom Drall der stationären Bewegung abweicht*, und dies ist selbstverständlich, denn wir haben es mit einer Zentralbewegung zu tun, da die Wellenkraft stets nach dem Drehpunkt gerichtet ist. Auch *unter der kritischen* Geschwindigkeit wird der Körper *nicht* um die Gleichgewichtslage der ursprünglichen stationären Bewegung pendeln, sondern eine neue Gleichgewichtslage suchen, die dem veränderten Werte des Dralls entspricht. Diese Lage kann mittels Gleichung (1) gefunden werden, wenn man die Anfangswerte $z_0\ \varepsilon^{\bullet}_0\ \vartheta^{\bullet}_0$ einsetzt und für die rechte Seite $m\,\varrho_0'^2\,\omega_0' + \Theta\,\omega_0'$ schreibt, sodass mit $\varrho_0' = \omega_k^2\,e\,(\omega_0'^2 - \omega_k^2)$ die Gleichung nach ω' und ϱ_0' aufgelöst werden kann. Benützt man nun die neuen Variablen $\varrho = \varrho_0' + z'$; $\varphi = \omega_0' t + \varepsilon'$; $\psi = \omega_0' t + \vartheta'$, so transformieren sich (2) und (3) unverändert; in (3) aber verschwindet k_0 und damit die Instabilität der ersten Glieder in Gleichung (5). So behält die Mathematik ihr Recht, und die Anschauung sieht ihre Forderung erfüllt, dass es für den gestörten Körper eine gewisse Gleichgewichtslage geben muss, um die herum er pendeln kann. *Ueber der kritischen* Geschwindigkeit ist jedoch das Zustandekommen dieser Pendelung an die Bedingungen geknüpft, die in „Dampfturbinen", Seite 628 entwickelt worden sind. Auch die hier in etwas veränderter Form aufgestellten Gleichungen führen für die Nachbarschaft der kritischen Umlaufzahl zu der gleichen Forderung wie „Dampfturbinen", Seite 628, Gleichung (14)

$$\delta^3 > 4\,\frac{e^2}{q^2}$$

oder ausgeschrieben

$$q^2 > \frac{4\,e^2}{\left[1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2}\right]^3}$$

Das Trägheitsmoment muss also, damit Stabilität in dem nun definierten Sinne eintritt, umso grösser sein, je mehr wir uns der kritischen Geschwindigkeit nähern. Hinzugefügt werden kann, dass *unter der kritischen* Geschwindigkeit (δ negativ) die Stabilität von selbst erfüllt ist, bei noch so kleinem Trägheitsmoment, insbesondere selbst für eine punktförmige Masse.

Gehen wir zur Bewegung im widerstehenden Mittel über, so werden die Verhältnisse wegen der neu hinzutretenden, der Auslenkung proportionalen Dämpfungskraft, wesentlich verwickelter. Jedenfalls ist zu erwarten, dass die Schwingungen rasch abnehmen. Dies wurde durch einen, wenn auch primitiven Versuch bestätigt. Nachdem

---

[1]) Ein mechanisches Problem aus der Theorie der Laval-Turbine. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 59. 1911. Seite 337.

[2]) «Die Dampfturbinen». IV. Auflage. Seite 628.

[3]) Der Grund für die Verwechslung liegt in dem eigentümlichen Umstande, dass von den a. a. O. zitierten partikulären Integralen nicht die Gruppen $z = a'$; $\varepsilon = b'$; $\tau = c'$ und $z = a''t$; $\varepsilon = b''t$; $\tau = c''t$ zusammengehören, sondern speziell $z = a'$; $\varepsilon = b''t$; $\tau = c'$ deren Einsetzung nur $c' = 0$ fordert. Man erkennt dies am leichtesten, wenn man $\varepsilon^{\bullet}$ als besondere Variable einführt, was für λ eine Gleichung bloss 5. Grades und nur eine einfache Wurzel $\lambda_0 = 0$ ergibt. Durch Integration der Gleichung $\varepsilon^{\bullet} = b''c^0 + b_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots$ folgt dann $\varepsilon = b' + b''t + b_1 e^{\lambda_1 t}/\lambda_1 + \ldots$ also Instabilität.

[4]) Diese Ableitungen werden hier mit einem Punkt bezeichnet, der leider aus typographischen Gründen *seitlich* oben angebracht werden musste.

die Turbine durch eine Bremse auf eine bestimmte Drehzahl eingestellt war, leitete man durch rasches Lüften der Bremse einen neuen Beharrungszustand ein. Während des Ueberganges nahm man in bestimmten Zeitabschnitten Streifmarken mit Rotstift am Umfang und notierte nachher die entsprechenden Stellungen. Sie passten gut in das Bild von gedämpften Schwingungen hinein; *in keinem Falle konnten Anzeichen einer Instabilität wahrgenommen werden.*

Eine neue, von der Schwerkraft herrührende, kritische Umlaufzahl. [1])

Es bedeute in Abbildung 10 neben schon erklärten Zeichen, G das Gewieht der Scheibe, das senkrecht nach abwärts wirkt. Die elastische Wellenkraft P werde in einem solchen Masstabe aufgetragen, dass sie der Strecke WO gleich sei. Wir zerlegen P in eine mit G gleiche und entgegengesetzte Komponente $-G$ und die Kraft P', dann ist $-G$ durch $O'O$ und P' durch WO' dargestellt und es geht P' bei jeder Lage der Scheibe durch den Punkt O' hindurch. Diesen wählen wir zum Koordinatenanfang. Die wirkenden Kräfte sind jetzt P' und $-G$ in W, und $+G$ in S. Die Lage der Scheibe ist definiert durch die Grössen ϱ, φ, ψ. Wir setzen $\varrho = \varrho_0 + z$; $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon$; $\psi = \omega_0 t + \vartheta$, wo z, ε, ϑ kleine Grössen sind.

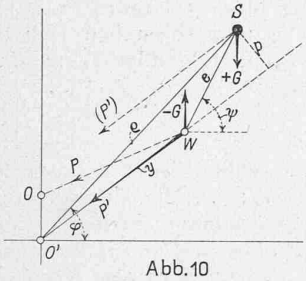

Abb. 10

Indem wir die Bewegungsgleichungen analog wie in „Dampfturbinen", Seite 627 aufstellen und höhere Potenzen der kleinen Grössen z, ε, ϑ vernachlässigen, erhalten wir der Reihe nach für die Schwerpunktsbewegung in einem radialen Schlitz, für das Impulsmoment des Schwerpunktes inbezug auf O', für die Drehung der Scheibe um S, wenn wir durch Punkte die Ableitungen nach der Zeit darstellen, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} & z^{\cdot\cdot} - \Delta z - 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\varepsilon^{\cdot} = 0 \\ & 2\,\varrho_0\,\omega_0\,z^{\cdot} + \varrho_0^2\,\varepsilon^{\cdot\cdot} - \omega_k^2\,\varrho_0\,e\,(\vartheta - \varepsilon) = 0 \\ & q^2\,\vartheta^{\cdot\cdot} + \omega_k^2\,e\,\varrho_0\,(\vartheta - \varepsilon) = -g\,e\cos\omega\,t \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

wobei wie oben ω_k die normale, kritische Winkelgeschwindigkeit bedeutet und die Abkürzungen

$$\Delta = \omega_0^2 - \omega_k^2; \quad \Theta = m\,q^2; \quad \varrho_0 = -\frac{\omega_k^2\,e}{\Delta} \qquad (2)$$

eingeführt worden sind. In der Drehungsgleichung der Scheibe ist auf der rechten Seite das Drehmoment $G\,e\cos\psi$ durch $G\,e\cos\omega\,t$ ersetzt worden, was als Näherung fast immer zulässig sein wird. Die Integrale des Systemes (1) setzen sich zusammen aus den Integralen der auf Null reduzierten rechten Seiten der Differential-Gleichungen, und aus den partikulären Integralen, die dem Gliede $g\,e\cos\omega_0 t$ entsprechen. Für letztere ist, wie man leicht einsieht, der Ansatz

$$z = A\sin\omega_0 t; \quad \varepsilon = B\cos\omega_0 t; \quad \vartheta = C\cos\omega_0 t \;.\;.\;. \quad (3)$$

zulässig und führt auf das System

$$\left.\begin{aligned} & -(\omega_0^2 + \Delta)\,A + 2\,\varrho_0\,\omega_0^2\,B = 0 \\ & 2\,\varrho_0\,\omega_0^2\,A + (-\varrho_0^2\,\omega_0^2 + \omega_k^2\,\varrho_0\,e)\,B - \omega_k^2\,\varrho_0\,e\,C = 0 \\ & -\omega_k^2\,e\,\varrho_0\,B + (-q^2\,\omega_0^2 + \omega_k^2\,\varrho_0\,e)\,C = -g\,e \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die hieraus zu rechnenden Werte A, B, C werden unendlich, d. h. wir haben es mit einer kritischen Drehzahl zu tun, sobald die Determinante der Beizahlen A, B, C verschwindet. Ihre Nullsetzung bedeutet, dass

$$(4\,\omega_0^2 - \omega_k^2)\,(\omega_0^2 - \omega_k^2) + (2\,\omega_0^2 + \omega_k^2)\,\omega_k^2\,\frac{e^2}{q^2} = 0 \quad (5)$$

sein müsse. Die Gleichung ist biquadratisch, liefert also *zwei Werte* für ω_0^2. Am einfachsten übersieht man den Grenzfall

$$q = \infty \quad \text{oder} \quad e = o \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (6)$$

Dann sind die beiden kritischen Werte:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\,\omega_k; \quad \omega_2 = \omega_k \;.\;.\;.\;.\;. \quad (7)$$

Im allgemeinen Falle findet man mit der Abkürzung

$$\frac{e}{q} = \xi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (8)$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_1^2 \\ \omega_2^2\end{matrix}\right\} = \frac{\omega_k^2}{4}\left[\frac{5 - 2\,\xi^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{5 - 2\,\xi^2}{2}\right)^2 - 4\,(1 + \xi^2)}\right] \quad (9)$$

Für *kleine* Werte von ξ folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_k^2\left(\frac{1}{4} + \frac{\xi^2}{8}\right) \\ \omega_2^2 &= \omega_k^2\left(1 - \frac{5}{8}\,\xi^2\right) \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (10)$$

Wie gross die Schwankungen beim Eintritt der kritischen Umlaufzahlen schliesslich werden, darüber kann die Methode der kleinen Schwingungen nichts aussagen. Wie ersichtlich, nähern sich ω_1 ω_2 mit wachsendem ξ einem gemeinsamen Wert, der eintritt, wenn die Quadratwurzel in (9) verschwindet. Dies führt auf den Wert

$$\xi_1 = 0{,}507 \quad \xi_2 = 2{,}96$$

Letzterer ist praktisch vollkommen ausgeschlossen und auch ξ_1 kann nur an Modellapparaten verwirklicht werden. Der zu ξ_1 gehörende Wert der kritischen Geschwindigkeit ist

$$\omega_1 = \omega_2 = 0{,}75\,\omega_k \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (11)$$

Praktisch wird man sich bei Turbinen immer in der Gegend $\omega_1 = 0{,}5\,\omega_k$ befinden. Im Gange befindliche Versuche mit verfeinerten Einrichtungen, über die wir in Bälde berichten zu können hoffen, bestätigen mit aller wünschbaren Deutlichkeit die Existenz der neuen kritischen Geschwindigkeit.

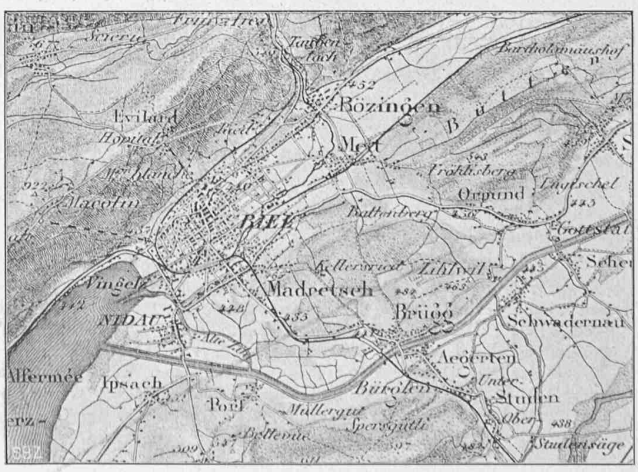

Abb. 1. Uebersichtskarte von Bözingen und Umgebung. — Masstab 1 : 100 000.
Mit Bewilligung der Schweiz. Landestopographie vom 25. Oktober 1916.

[1]) Lassen wir die Welle sich unter dem Einfluss des Scheibengewichtes in der Ruhelage durchbiegen, und versetzen wir die Scheibe in sehr langsame Rotation, so wird die Drehung offenbar um diese elastische Gleichgewichtslage erfolgen. Steigern wir die Drehzahl, so wird sich der Einfluss der Fliehkraft geltend machen und schliesslich zur gewöhnlichen kritischen Geschwindigkeit führen. Daneben kommt das Gewicht der Scheibe dadurch zur Wirkung, dass infolge der Drehung der Exzentrizität die Schwerkraft einmal links, einmal rechts an der geometrischen Drehachse vorbeigeht. Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe muss also grundsätzlich Schwankungen aufweisen, die jedoch im allgemeinen unbemerkbar klein zu sein pflegen, sodass man sich mit dieser Erscheinung bis heute nicht zu beschäftigen brauchte. Vor Jahren schon teilten mir die Siemens-Schuckert-Werke mit, dass sie bei etwa dem halben Betrage der normalen kritischen Drehzahl eine Unruhe des Laufes bemerkt hätten. Die Beobachtung an einem gut ausgewuchteten Schwungkörper lässt nichts hiervon wahrnehmen. In neuerer Zeit glaubte *W. Kerr*, nach einer Mitteilung im „Engineering" (18. Februar und 3., 10. und 17. März 1916) die Schwankung an einer Lavalturbinen-Welle festgestellt zu haben, und gelangte auf theoretischem Wege zur Folgerung, dass die Schwerkraft bei wagrechter Welle beim 0,7-fachen Betrage der normalen kritischen Drehzahl, einen kritischen Zustand hervorbringen müsse. Ich habe in der gleichen Zeitschrift (21. April 1916) nachgewiesen, dass, wenn überhaupt, die neue kritische Geschwindigkeit bei sehr grossem Trägheitsmoment der Scheibe (wie bei Turbinen stets der Fall) beim 0,5-fachen Werte der normalen kritischen Drehzahl auftreten müsste, dass aber in dem, die Auslenkung darstellenden Bruche, mit dem Nenner gleichzeitig auch der Zähler verschwindet. *Carter* gab darauf am gleichen Orte (28. April 1916) die Formeln für ein grosses, aber endliches Trägheitsmoment. Die von ihm angewendete Methode der kleinen Schwingungen benützt noch die Entwickelung der Veränderlichen von der Gleichgewichtslage der ursprünglichen stationären Bewegung aus, was, wie nachgewiesen, auch unterhalb der kritischen Drehzahl zu Instabilität führt. Nachdem wir soeben die Erklärung für diesen eigentümlichen Umstand gegeben haben, kann mit voller Sicherheit über den Sachverhalt geurteilt werden, und zwar auch für endliche, beliebig kleine Schwungmassen.