Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67/68 (1916)
Heft: 18

Artikel: Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen
Autor: Stodola, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33096

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen. — Aargauische und schweizerische Eisenproduktion in Vergangenheit und Zukunft. — Verwaltungsgebäude der Bernischen Kraftwerke. — Die Förderung der nationalen Erziehung an den schweizerischen Mittelschulen. — Miscellanea: Hängebrücke System Maynard. Wasserkraftwerk Eglisau. Vom Bau des Mount Royal-Tunnels in Montreal. Schweizerische Eisenzentrale. Verband schweizerischer Sekundärbahnen. Einsturz der Quebec-Brücke. Die XXIX. Generalversammlung des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ing.- und Arch.-Verein. G. e. P.: Stellenvermittlung.
Tafeln 31 und 32: Verwaltungsgebäude der Bernischen Kraftwerke.

Band 68. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 18.**

Neuere Beobachtungen über die kritischen Umlaufzahlen von Wellen.

Von Prof. Dr. *A. Stodola*, Zürich.

Bei der Beobachtung der kritischen Winkelgeschwindigkeit von glatten Wellen wunderte ich mich wahrzunehmen, dass die Auslenkungen im kritischen Zustand keineswegs „unendlich“ wurden, sondern endliche Grösse beibehielten, selbst wenn die Welle an einem Ende gänzlich frei, stützpunktlos war. Noch eindringlicher tritt dieses Endlichbleiben in den interessanten Beobachtungen hervor, über die mir die Firma Brown, Boveri & Cie. Mitteilung machte. In Abb. 1 (S. 198) ist eine rotierende schlanke Welle bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit dargestellt. Füllt man den, die Welle umgebenden Trog mit Wasser, so nimmt die Welle bei gleichbleibender Drehzahl die in Abb. 2 (S. 198) veranschaulichte Form an; die ursprünglich vorhandene nicht grosse Auslenkung verschwindet fast vollkommen. In der Abbildung lag die Welle fast im Wasserspiegel; die Beruhigung wird eine noch vollkommenere, wenn sie tiefer eintaucht. Der Versuch beweist, dass man Wellen, die in Flüssigkeiten versenkt sind, beispielsweise die aus dem Schiffskörper hinausragenden Schraubenwellen, ohne Gefahr für grosse Erschütterung bei der kritischen Drehzahl laufen lassen darf; er weist aber auch den Weg der Erklärung für die eingangs erwähnte merkwürdige Erscheinung. Offenbar wird die Auslenkung durch die Zähigkeit des die Welle umgebenden Mediums beeinflusst. Man könnte sich auch vorstellen, dass eine gewisse Menge Flüssigkeit an der Welle haftet, daher mitrotieren muss, und die kritische Drehzahl herabsetzt.

Der Sachverhalt wird vollends aufgeklärt durch die interessanten Mitteilungen von Dr. Ing. *O. Föppl* [1]), wonach bei einer einzelnen schweren Scheibe der Schwerpunkt, der Wellen-„Durchstosspunkt“ und der Schnittpunkt der durch die Lagermittel gelegten geometrischen Axe nicht in einer Geraden gelegen sind, wie das die Theorie bisher annahm. Eine Abweichung von der Geraden kann aber nur zustande kommen, wenn die widerstehenden Kräfte eine im Verhältnis zu den Flieh- und Wellenkräften nicht mehr verschwindend kleine Grösse besitzen; dies muss also bei der Drehung von Turbinenscheiben auch in freier Luft, bezw. in Dampf der Fall sein.

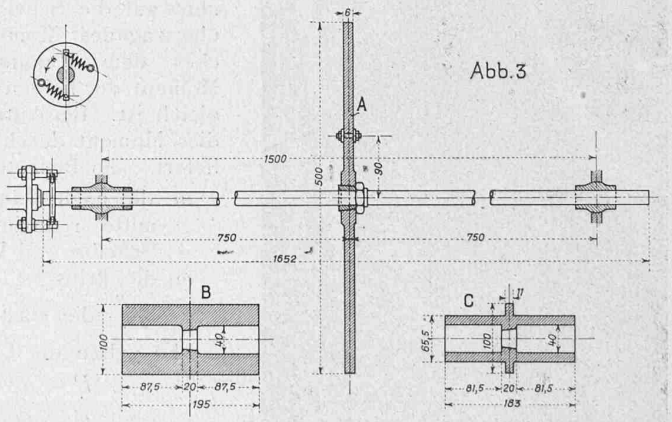
Um die wichtigen Konsequenzen, die hieraus für das kritische Verhalten von Wellen fliessen, ableiten zu können, musste die von Föppl ohne nähere Angaben mitgeteilte Winkeländerung der erwähnten drei Punkte *quantitativ* festgelegt werden. Zu diesem Behufe wurden im Maschinenlaboratorium der E. T. H. eine Scheibe von 500 *mm* Durchmesser, 6 *mm* Dicke, 9,545 *kg* Gewicht, ein grosser Zylinder von 100 *mm* Durchmesser bei 195 *mm* Länge, 9,512 *kg* Gewicht, und ein kleiner Zylinder von 66,5 *mm* Durchmesser bei 183 *mm* Länge, 3,437 *kg* Gewicht, in der Mitte einer 20 *mm* dicken Welle von 1500 *mm* Spannweite, die bei 1652 *mm* Gesamtlänge 4,055 *kg* wog, aufgekeilt und bei verschiedenen Drehzahlen beobachtet. Abbildung 3 zeigt die Anordnung und die genauen Masse der Teile. Die Lagerschalen sind kugelig, die Welle kann als frei gestützt gelten; der Antrieb erfolgte von einer kleinen Dampfturbine her mittelst nachgiebiger Federkupplung. Die Lage des Schwerpunktes wurde durch pendelndes Rollen der Welle auf Linealen festgestellt. Alle Schwungkörper waren mit der Welle gleichachsig abgedreht, sodass bei der Rotation die von einem sanft angedrückten Rotstift am Umfang aufgezeichnete Marke den Punkt der äussersten Auslenkung ergibt. Es bezeichne nun nach Abb. 5 (S. 198):

S den Schwerpunkt des Schwungkörpers
W den Durchstosspunkt der Welle mit der Mittelebene des Schwungkörpers
O den Durchstosspunkt der die Lagermitten verbindenden Geraden
e die Exzentrizität
y die Wellenverbiegung
ϱ den Abstand des Schwerpunktes von der geometrischen Drehaxe
σ den Winkel zwischen e und y.

Die erwähnte Marke liefert, mit W verbunden, die Richtung WO; da WS bekannt ist, erhält man hieraus den Winkel σ. Bei hoch über der kritischen gelegenen Drehzahlen ist $\sigma = o$, bei tief darunter gelegenen $= \pi$, dazwischen ändert sich σ, wie die entsprechend bezeichneten Linien in den Abbildungen 7 bis 9 zeigen, stetig. Die Beobachtungen sind in sorgfältiger Weise von Herrn Ingenieur *Keller* durchgeführt worden; doch zeigt sich, dass insbesondere bei der Verbiegung (die mittelst allmählich genäherten Tasters mit elektrischem Kontakt ermittelt wurde) Störungen nicht auszuschliessen sind, da die Welle, in Uebereinstimmung mit der Theorie von Prof. *A. Föppl* durchaus nicht gezwungen ist, im Kreise zu rotieren, sondern gerne Ellipsen beschreibt. Diese Störungen dehnen sich auf den Winkel σ aus, so dass man für ab- und aufsteigende Drehzahlen wohl auch verschiedene Kurven erhält, wie in Abbildung 8 (Seite 199) angedeutet.

Mit Hilfe dieses Versuchsmaterials lässt sich eine Theorie der Erscheinung aufstellen, zu welchem Behufe wir zuvor eine Formel für den Reibungswiderstand der in zähem Medium exzentrisch rotierenden Scheibe entwickeln.

In Abb. 4 (S. 198) ist r_o der Halbmesser der Scheibe, r der Halbmesser des vom Drehungsmittelpunkt O einbeschriebenen Kreises. Nehmen wir an, dass der Reibungswiderstand jedes Flächenelementes der Scheibenstirnfläche



dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit desselben proportional ist, so liefern die innerhalb des erwähnten Kreises gelegenen Elemente ein reines Moment von gleicher Grösse, wie eine Scheibe mit dem Halbmesser r. Für die ausserhalb gelegenen Flächenteile sei dR der Widerstand des schraffierten Elementes. Bei einer Zerlegung in die Komponenten dX, dY erkennen wir, dass die Summe der dY Null ist, während die Summe der dX den endlichen Wert

$$X = \int dX = \int_o^{2\pi} dR \cos \alpha = \int \Delta r \, r_0 \, d\alpha \, \mu \, (r_0 \, \omega)^2 \cos \alpha$$

liefert. Da aber $\Delta r = r_o - r - y \cos \alpha = y \, (1 - \cos \alpha)$ ist, erhalten wir:

[1]) Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen. 1916. Heft 6 und 7.

$X = -\pi \mu r_o^3 \omega^2 y$, oder, wenn wir $2\pi \mu r_o^3 \omega^2 = m'$ setzen und $2X$ als die Resultierende der Reibung auf den beiden Stirnflächen der Scheibe fortan mit R bezeichnen:

$$R = -m' y \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

senkrecht zur Verbindungslinie OW gerichtet. In Wirklichkeit wird der geometrische Mittelpunkt einer Scheibe nicht genau mit W zusammenfallen. Dann ist die resultierende Reibung proportional dem Abstand des Mittelpunktes von O. Insbesondere wird, falls der Mittelpunkt mit S zusammenfällt, die Reibung

$$R = -m' \varrho \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Neben der Einzelkraft ergeben die Reibungen ein Moment, dessen Grösse für W als Zentrum angenähert

$$M \cong \int dR\, r_o = \text{Konst.}\, y \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist. Fügen wir im Schwerpunkt die Kräfte $+R$, $-R$ bei, so reduziert sich die Gesamtheit der Reibung auf die Einzelkraft R in S und ein Moment, das aus dem unveränderlichen Grundwert (angenähert die normale Reibung der ganzen zentrischen Scheibe) und einem zu y proportionalen Zusatzmoment besteht.

Bei der untersuchten Scheibe und bei normalen Turbinenrädern kann man die Reibung der Mantelfläche vernachlässigen, nicht aber bei den zylindrischen Schwungkörpern. Da für diesen Widerstand die Formeln der geradlinigen Bewegung eines Zylinders nicht in Frage kommen können, setzen wir die Reibung dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit proportional, und erhalten bei Vernachlässigung von Δr^2 gegen $\Delta r \cdot r_o$ ein vollkommen gleichartiges Resultat wie oben. Es kann mithin bei veränderter Bedeutung des m' die Formel (1) als Gesamtwert der Reibungs-Einzelkraft gelten.

Das *Gleichgewicht der Kräfte* bei einer beliebigen Drehzahl wird durch Abbildung 5 veranschaulicht. Von der Wirkung der Schwere sehen wir ab, in der Annahme,

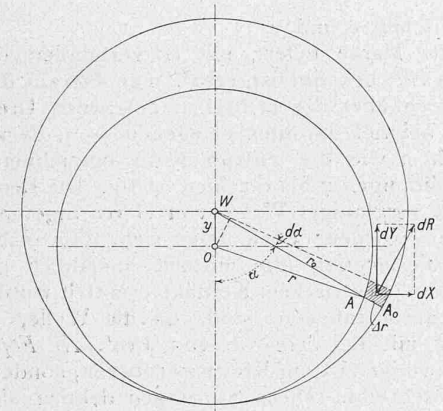


Abb. 4

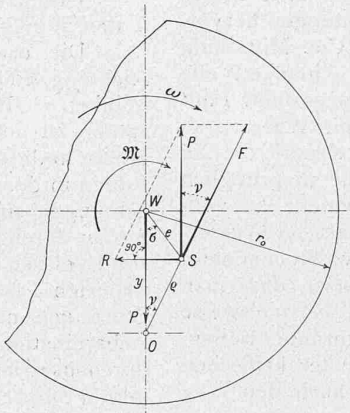


Abb. 5

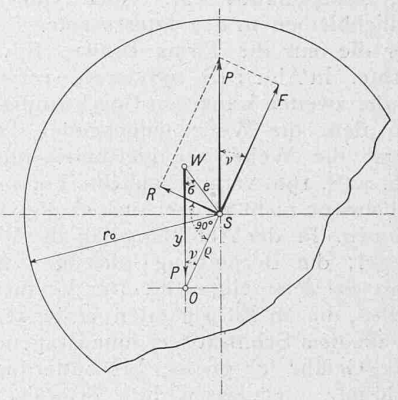


Abb. 6

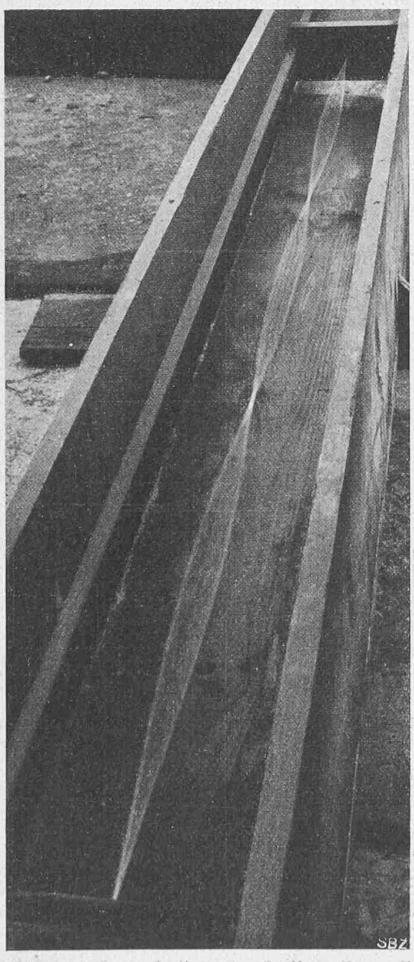


Abb. 1.

dass diese eine unveränderliche Durchbiegung der Welle hervorruft, die den eigentlichen Drehpunkt O entsprechend herabsenkt. Es bleiben dann die elastische Wellenreaktion P, die Fliehkraft F und die Reibung R als Einzelkräfte übrig, deren Gleichgewicht erfordert, dass die Resultierende von F und R in S entgegengesetzt gleich und parallel sei zu P. Ausserdem muss auf die Scheibe ein (durch die Welle übertragenes) Moment $\mathfrak{M}$ einwirken, welches dem Reibungsmoment, und dem Moment der beiden Kräfte $+P$ und $-P$ gleich ist. Bei Antrieb durch Dampf wird dies Moment durch die Umfangskraft geliefert. Es bedeute:

m die nach Dunkerley auf die Wellenmitte reduzierte Gesamtmasse von Scheibe und Welle

ω_k die kritische Winkelgeschwindigkeit

$\alpha = \frac{P}{y}$ die elast. Konstante der Welle.

Es gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} P &= \alpha y = m y \omega_k^2 \\ F &= m \varrho \omega^2 \\ R &= m' y \omega^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Führen wir den von ϱ und y gebildeten Winkel ν ein, so sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$R = F \sin \nu; \quad P = F \cos \nu \quad . \quad (3)$$

daraus folgt

$$tg\, \nu = \frac{R}{P} = \frac{m'}{m} \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \quad . \quad . \quad (4)$$

$$m y \omega_k^2 = m \varrho \omega^2 \cos \nu$$

oder, mit der Abkürzung

$$\frac{\omega_k^2}{\omega^2} = \gamma^2 \quad . \quad (5), \qquad \varrho = \frac{\gamma^2 y}{\cos \nu} \quad . \quad (6)$$

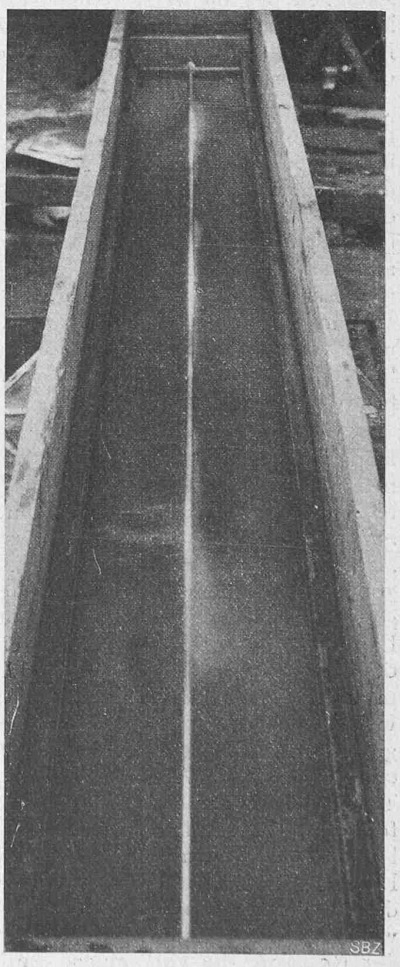


Abb. 2.

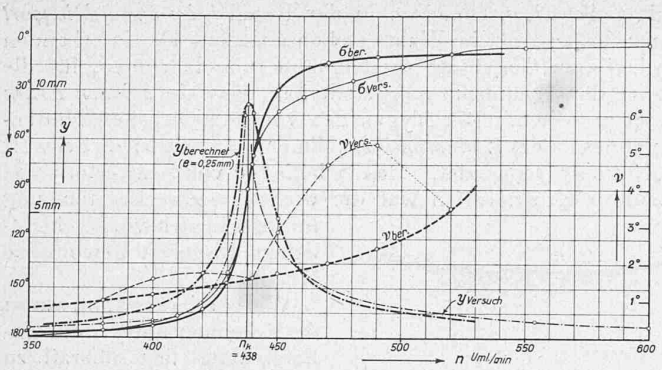


Abb. 7.

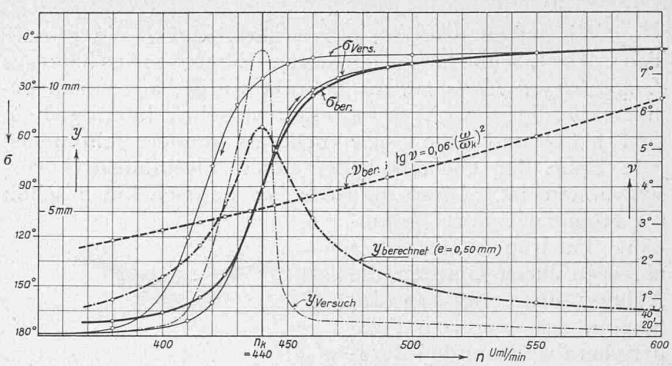


Abb. 8.

Das Dreieck der Strecken $e\,\varrho\,y$ liefert die Gleichung $e^2 = \varrho^2 + y^2 - 2\,\varrho\,y\cos\nu$, und wenn wir ϱ aus Gleichung (6) einsetzen, durch Auflösung

$$y = \frac{e}{\sqrt{\frac{\gamma^4}{\cos^2\nu} - 2\gamma^2 + 1}} \qquad (7)$$

Erreichen wir die kritische Umlaufzahl, so wird $\gamma = 1$, *und* y *keinesfalls unendlich, sondern*

$$y_k = \frac{e}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\nu} - 1}} = \frac{e}{tg\,\nu} = \frac{m}{m'}\,e \qquad (8)$$

Nur wenn die Reibung verschwindet, so dass $tg\,\nu = 0$ wird, folgt auch $y_k = \infty$; anderseits nimmt dann Gleichung (7) die Form

$$y = \frac{e}{\sqrt{\gamma^4 - 2\gamma^2 + 1}} = \frac{e}{\gamma^2 - 1}$$

an, die mit der bislang benützten theoretischen Formel übereinstimmt.

Was den Winkel σ anbelangt, der die gegenseitige Lage der Punkte W und S am besten kennzeichnet, so ergibt sich aus den beiden Beziehungen

$$e\sin\sigma = \varrho\sin\nu$$
$$e\cos\sigma = y - \varrho\cos\nu$$

der Wert $tg\,\sigma = \dfrac{\varrho\sin\nu}{y - \varrho\cos\nu} = \dfrac{tg\,\nu}{\frac{1}{\gamma^2} - 1} = \dfrac{\frac{m'}{m}}{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}}$. (9)

Hiernach ist $tg\,\sigma = \infty$ bei $\omega = \omega_k$, oder es steht e senkrecht zu y, und *der Winkel* σ *ändert sich stetig mit der Umlaufzahl bis zu den kleinsten Werten der Reibung.*

Macht man die andere Grenzannahme, dass der geometrische Mittelpunkt der Scheibe mit S zusammenfällt, so erhält man die in Abb. 6 dargestellten Kräfterichtungen, und es ergibt sich auf gleich einfache Weise:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\nu &= \frac{m'}{m} \\ y^2 &= \frac{e^2}{(\gamma^4 - 2\gamma^2)\cos^2\nu + 1} \\ tg\,\sigma &= \frac{\sin 2\nu}{2\left(\frac{\omega^2}{\omega_k^2} - \cos^2\nu\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

In den Abbildungen 7 bis 9 sind die Ergebnisse der Rechnung für die Scheibe, bezw. den grossen und kleinen Zylinder mit den beobachteten Werten verglichen[1].) Dabei musste für m'/m und für e eine derartige Annahme getroffen werden, dass sich eine möglichst gute Uebereinstimmung ergab. Die Kurven lehren, dass bei den Auslenkungen y die Abweichung stellenweise, z. B. beim grossen Zylinder (Abb. 8) nicht unbeträchtlich ist. Doch beanspruchen die Messungen des y wegen der erwähnten häufig elliptischen Schwingungsform keine grosse Genauigkeit. Was hingegen den uns in erster Linie interessierenden Winkel σ anbelangt, so ist eine sehr befriedigende Uebereinstimmung erzielt worden; für den kleinen Zylinder (Abbildung 9) allerdings am besten, wenn mit den Formeln (10) gerechnet wird.

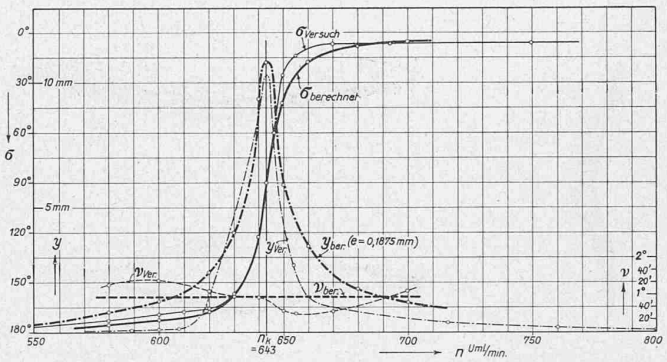


Abb. 9.

Die Theorie der Erscheinung kann hiernach als in den grossen Zügen hinreichend bestätigt angesehen werden. Ihre Uebertragung auf die mit vielen Radscheiben besetzte Welle einer Turbine begegnet erheblichen mathematischen Schwierigkeiten. Es dürfte im Falle gleichmässiger Massenverteilung über die ganze Wellenlänge (wie bei der Bestimmung der kritischen Umlaufzahl selbst), erlaubt sein, die Hälfte der Gesamtmasse in der Lagermitte konzentriert und die Welle als massenlos zu denken. Der Reibungswiderstand wird im Verhältnis der Scheibenzahl vergrössert, und daher erheblich wirksamer als bei der Einzelscheibe. (Schluss folgt.)

[1]) Die beobachtete kritische Drehzahl bei der Scheibe weicht von der theoretischen, die sich zu 427 in der Minute berechnet, um rund 3% ab, worin der Einfluss der Federkupplung zu erblicken ist. Spätere Versuche mit vollkommener Bewegungsfreiheit des Wellenendes ergaben volle Uebereinstimmung.

Aargauische und schweizerische Eisenproduktion in Vergangenheit und Zukunft.

Vortrag gehalten an der XXXIV. Generalversammlung der G. e. P. in Baden von Ing. *A. Trautweiler*, Zürich.

Auf der eidgenössischen Tagsatzung zu Baden am 14. März 1563 kam eine Beschwerde des Standes Zürich zur Verhandlung, dahin gehend, dass die zürcherischen Schmiede- und Schlossermeister, die von Laufenburg ihr Eisen beziehen, von den dortigen Hammerwerken übervorteilt würden. Im bezüglichen „Abschied" wird berichtet:

„Zürich macht die Anzeige, dass seine Schmied- und Schlossermeister sich über Erhöhung des Preises und Verminderung des Gewichtes des Werkeisens beschweren, das sie aus Laufenburg beziehen. Obschon bekannt ist, dass dieses Eisen überall teurer geworden, weil auch das Erz und die Kohlen aufgeschlagen haben, so wird doch an den kaiserlichen Obervogt von Schönau zu Laufenburg geschrieben, er möchte dafür sorgen, dass das Werkeisen im früheren Gewicht fabriziert werde, und möchte seine Meinung darüber nach Zürich melden. Die Sache wird in den Abschied genommen."

Dieses Vorkommnis, das uns zeigt, dass die alte Eidgenossenschaft ein nicht geringes Interesse daran hatte, aus Laufenburg mit Eisen versorgt zu werden, möge als Ausgangspunkt dienen für das, was ich hier über aargauische und schweizerische Eisenproduktion berichten möchte.