Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67/68 (1916)
Heft: 11

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Berechnung eines rechteckigen Eisenbetonreservoirs auf elastischer Unterlage. — Der Waldfriedhof im „Rheinhard", Schaffhausen. — Die Schleusen des Panama-Kanals. — Ueber Windstärke. — Miscellanea: Neue 1-E Güterzugslokomotiven der preussisch-hessischen Staatseisenbahnen. Simplontunnel II. Die deutschen technischen Hochschulen im Winter 1915/16. Zur Erhaltung der Obergrundallee in Luzern. Eidg. Techn. Hochschule. — Konkurrenzen: Kollegienhaus der Universität Basel. Primarschulhaus im Länggass-Quartier Bern. — Literatur: Die L. v. Roll'schen Eisenwerke und die jurassische Eisenindustrie. Die baulichen und wirtschaftlichen Grundlagen der Geschäftsstadt Berlin. Elektrotechnische und mechanische Masseinheiten. Deutsche Heldenhaine. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. — G. e. P.: Stellenvermittlung.

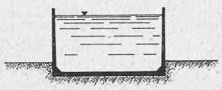
Band 67. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 11.**

Berechnung eines rechteckigen Eisenbeton-Reservoirs auf elastischer Unterlage.

Von *S. Kasarnowsky*, Dipl.-Ing. E. T. H, Zürich.

Ein rechteckiges Reservoir oder ein offener Kanal nach Abbildung 1, dessen Sohle den Baugrund auf der ganzen Grundrissfläche belastet, kann als ein Balken auf elastischer Unterlage betrachtet werden. Die Beanspruchung eines durch eine elastische Unterlage stetig unterstützten Stabes wurde zuerst von E. Winkler in seiner „Lehre von der Elastizität und Festigkeit" Prag 1867, untersucht. Später wurde diese Theorie von Zimmermann für die Berechnung des Eisenbahnoberbaues angewendet. Der Vollständigkeit halber soll hier die Differentialgleichung der elastischen Linie eines auf einer elastischen Unterlage liegenden Stabes abgeleitet werden.

Abb. 1



Reservoir oder Kanalquerschnitt

Denkt man sich aus dem Reservoir einen Streifen ausgeschnitten, und bezeichnet mit E den Young'schen Modul, J das Trägheitsmoment, y die Durchbiegung, M das Biegungsmoment und z die Belastung des Stabes pro Längeneinheit (in unserem Falle den Widerstand der Unterlage), so werden:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{JE} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 M}{d x^2} = z$$

Setzt man ein konstantes Trägheitsmoment voraus, so erhält man durch zweimaliges Differenzieren

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = -\frac{d^2 M}{d x^2}\,\frac{1}{JE} = -\frac{z}{JE}$$

Nimmt man an, dass der Widerstand der Unterlage z proportional ist zur Einsenkung y des Stabes, so wird $z = E_o\, y$ (E_o = Bettungsziffer). Die Differentialgleichung unseres Problems lautet jetzt

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = -\frac{E_o}{JE}\, y \tag{1}$$

(Siehe: Winkler: Vorträge über Brückenbau; Zimmermann: die Berechnung des Eisenbahnoberbaues; Müller-Breslau: Graphische Statik, Bd. II, zweite Abt.; Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik III). In der folgenden Untersuchung beschränken wir uns auf den praktisch wichtigsten Fall einer symmetrischen Belastung.

Setzt man $s = \sqrt[4]{4\,\frac{E}{E_o}\,J}$ und $\frac{x}{s} = \varphi$, so wird das allgemeine Integral der Gleichung 1

$$y = (A_1\, e^{\varphi} + A_2\, e^{-\varphi}) \cos\varphi + (B_1\, e^{\varphi} + B_2\, e^{-\varphi}) \sin\varphi \tag{2}$$

Wählt man den Koordinatenursprung in der Stabmitte, so werden, weil der Balken AB symmetrisch beansprucht ist:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \quad \text{und} \quad B_1 = -B_2 = \frac{B}{2}$$

Werden nun die Hyperbelfunktionen

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{e^{+\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Sin}\varphi = \frac{e^{+\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

eingeführt, so vereinfacht sich die Gleichung 2 auf

$$y = A \operatorname{Cos}\varphi \cos\varphi + B \operatorname{Sin}\varphi \sin\varphi \tag{3}$$

Das Biegungsmoment des Balkens AB berechnet sich aus der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M}{JE}$$

Durch zweimaliges Differenzieren findet man

$$M = \frac{2\,JE}{s^2}\left[A \operatorname{Sin}\varphi \sin\varphi - B \operatorname{Cos}\varphi \cos\varphi\right] \tag{4}$$

Wird berücksichtigt, dass die Querkraft $Q = -\frac{dM}{dx}$ ist, so erhält man durch nochmaliges Differenzieren der Gleichung 3

$$Q = -\frac{2\,JE}{s^3}\Big[A\,(\operatorname{Cos}\varphi \sin\varphi + \operatorname{Sin}\varphi \cos\varphi) + B\,(\operatorname{Cos}\varphi \sin\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \cos\varphi)\Big] \tag{5}$$

Die Integrationskonstanten A und B lassen sich wie folgt aus den Randbedingungen bestimmen: Das Moment in A ist $M_a = M_1 + H \cdot h + \frac{\gamma h^3}{6}$, wenn γ das spezifische Gewicht der Füllungsflüssigkeit bedeutet, die Querkraft in A: $Q_a = P$ (siehe Abbildung 2). Der Einfluss des vertikalen Flüssigkeitsdruckes und des Eigengewichts der Bodenplatte wird hier nicht berücksichtigt, weil eine gleichmässig verteilte Belastung des Baugrundes in der Reservoirsohle weder Momente, noch Querkräfte erzeugt. Bezeichnet man mit λ das Verhältnis $\frac{a}{s}$ (a halbe Spannweite) so lauten die Randbedingungen:

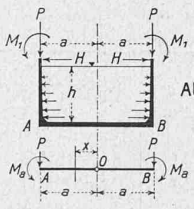


Abb. 2

$$M_a = +\frac{2\,JE}{s^2}\Big[A \operatorname{Sin}\lambda \sin\lambda - B \operatorname{Cos}\lambda \cos\lambda\Big]$$

$$Q_a = -\frac{2\,JE}{s^3}\Big[A\,(\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda + \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda) + B\,(\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda - \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda)\Big]$$

Mit $r = \frac{2\,JE}{s^2}$ ergibt sich die Nennerdeterminante:

$$\Delta_n = -\begin{vmatrix} \operatorname{Sin}\lambda \sin\lambda & -\operatorname{Cos}\lambda \cos\lambda \\ (\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda + \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda) & (\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda - \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\,(\operatorname{Sin} 2\lambda + \sin 2\lambda)$$

und

$$A\, r\, \Delta_n = \begin{vmatrix} M_a & -\operatorname{Cos}\lambda \cos\lambda \\ s \cdot Q_a & -(\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda - \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -M_a\,(\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda - \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda) + s\, Q_a \operatorname{Cos}\lambda \cos\lambda$$

$$B\, r\, \Delta_n = \begin{vmatrix} \operatorname{Sin}\lambda \sin\lambda & M_a \\ -(\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda + \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda) & Q_a \cdot s \end{vmatrix}$$

$$= M_a\,(\operatorname{Cos}\lambda \sin\lambda + \operatorname{Sin}\lambda \cos\lambda) + s\, Q_a \operatorname{Sin}\lambda \sin\lambda$$

Werden die beiden letzten Gleichungen mit $\frac{1}{\operatorname{Cos}\lambda \cos\lambda}$ multipliziert, und schreibt man $\varepsilon = \frac{2 \operatorname{Cos}\lambda \cos\lambda}{\operatorname{Sin} 2\lambda + \sin 2\lambda}$, so findet man für die gesuchten Integrationskonstanten:

$$A = \frac{\varepsilon}{r}\Big[M_a\,(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{Tg}\lambda) - s\, Q_a\Big]$$

$$B = -\frac{\varepsilon}{r}\Big[M_a\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{Tg}\lambda) + s\, Q_a \operatorname{Tg}\lambda \operatorname{tg}\lambda\Big] \tag{6}$$

Diese Werte für A und B in die Gleichungen 3 und 4 eingesetzt ergeben:

$$y = \frac{\varepsilon}{r}\Big\{\Big[M_a\,(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{Tg}\lambda) - s\, Q_a\Big] \operatorname{Cos}\varphi \cos\varphi - \Big[M_a\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{Tg}\lambda) + s\, Q_a \operatorname{Tg}\lambda \operatorname{tg}\lambda\Big] \operatorname{Sin}\varphi \sin\varphi\Big\} \tag{7}$$

und

$$M = \varepsilon\Big\{\Big[M_a\,(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{Tg}\lambda) - s\, Q_a\Big] \operatorname{Sin}\varphi \sin\varphi + \Big[M_a\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{Tg}\lambda) + s\, Q_a \operatorname{Tg}\lambda \operatorname{tg}\lambda\Big] \operatorname{Cos}\varphi \cos\varphi\Big\} \tag{8}$$

Es empfiehlt sich, das Moment M in zwei Teile zu zerlegen $M = M' + M''$, worin M' das Moment im Punkte P infolge M_a und M'' das Moment im Punkte P infolge Q_a bedeuten. Man erhält dann aus Gleichung 8

$$M' = \varepsilon\,[(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{Tg}\lambda) \operatorname{Sin}\varphi \sin\varphi + (\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{Tg}\lambda) \operatorname{Cos}\varphi \cos\varphi]\, M_a \tag{9}$$

$$M'' = \varepsilon\,[\;-\operatorname{Sin}\varphi \sin\varphi + \operatorname{Tg}\lambda \operatorname{tg}\lambda \operatorname{Cos}\varphi \cos\varphi]\, s\, Q_a \tag{10}$$

Aus den vorliegenden Formeln findet man das Moment M_0 in Balkenmitte, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird. Es folgen $\operatorname{Sin} 0 = 0$; $\operatorname{Cos} 0 = 1$; $\cos\varphi = 1$ und

$$M_0' = \varepsilon\,(\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{Tg}\lambda)\, M_a \tag{11}$$

$$M_0'' = \varepsilon\, \operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{Tg}\lambda\; s \cdot Q_a \tag{12}$$