Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 63/64 (1914)

Heft: 2

Artikel: Die graphische Untersuchung des kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Stützen

Autor: Ritter, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31412

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Spiel; die beiden mittleren Kuppelachsen sind starr im Rahmen gelagert, die beiden äusseren mit je 40 *mm* Seitenspiel, während die Drehzapfen der Drehgestelle selbst sich um 78 *mm* aus der Mittelaxe seitlich verschieben können.

Die Motoren befinden sich nunmehr im Lokomotivrahmen eingebaut, sodass die Drehgestelle und Triebräder deren Last nicht mehr ungefedert zu tragen haben.

Diese Maschine hat sich auch effektiv als ein ausgezeichneter Kurvenläufer erwiesen, der auch Weichen mit Radien von 115 *m* anstandslos befährt.

Die *Hauptverhältnisse* der Lokomotive sind folgende:

Länge über Puffer	16 *m*
Totaler Radstand	11,34 „
Starrer Radstand	4,5 „
Triebrad-Durchmesser	1350 *mm*
Laufrad-Durchmesser	850 „
Zahnrad-Uebersetzungsverhältnis	1 : 2,23
Gewicht des mechanischen Teiles	48 *t*
Gewicht des elektrischen Teiles	59 „
Gesamtgewicht	107 „
Adhäsionsgewicht	80 „
Gewicht eines Motors einschliesslich Zahnrad-Uebersetzung	14 „
Gewicht eines Transformators	7,5 „
Maximaler Achsdruck	16,5 „
Geschwindigkeit bei $1^1/_2$-Stundenleistung	50 *km/std*
$1^1/_2$-Stundenleistung	2500 *PS*
Entsprechende Zugkraft am Rad	13500 *kg*
Maximale Zugkraft beim Anfahren	18000 „
Maximale zulässige Geschwindigkeit	75 *km/std*

(Forts. folgt.)

Die graphische Untersuchung des kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Stützen.

Von Diplom-Ingenieur *A. Ritter*, Kilchberg bei Zürich.

Die beiden Fälle des kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment und desjenigen auf elastisch drehbaren Stützen sind einzeln von Professor W. Ritter in seinen „Anwendungen der graphischen Statik" (III. Band, Seite 104 bis 146) ausführlich behandelt worden. Die vorliegende Abhandlung bezweckt, den Vorgang zu schildern, der bei einer genauen graphischen Untersuchung eines kontinuierlichen Balkens vorzunehmen ist, welcher sowohl veränderliches Trägheitsmoment besitzt, als auch mit seinen Stützen elastisch verbunden ist.

Es ist dies ein bei Brückenbauten oft vorkommender Fall und zwar sowohl bei Fachwerksbrücken, wie auch bei vollwandigen, speziell bei Eisenbetonbrücken. Besonders häufig findet sich dieser Fall aber bei Deckenkonstruktionen aus Eisenbeton, bei denen die Träger mit den Säulen fest verbunden sind und die ersteren durch Anordnung von Vouten ein sich stark änderndes Trägheitsmoment besitzen. Dass die genaue Untersuchung einer solchen Konstruktion wesentlich andere Resultate liefert als eine angenäherte Berechnung derselben als kontinuierlicher Balken mit konstantem Trägheitsmoment und freier Stützenlagerung, ist in der Literatur schon oft genug festgestellt worden.

Für den Fall des Trägers auf elastisch drehbaren Stützen wird nach oben genanntem Werk aus der Gleichung

$$\frac{e}{e'} = \frac{\varepsilon\, l_1}{2\, EJ}$$

die Lage der „Elastizitätslinie" gerechnet, welch letztere zur Konstruktion der Fixpunkte gebraucht wird. Diese Gleichung kann für den Fall veränderlichen Trägheitsmomentes nicht mehr ohne weiteres angewendet werden, und es soll in Folgendem eine entsprechende Gleichung abgeleitet werden, welche auch für veränderliches Trägheitsmoment gültig ist. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die beiden diesbezüglichen Kapitel des oben genannten Werkes bekannt sind.

Es sei $A\,B\,C\,D\,E$ (Abbildung 1) ein kontinuierlicher Balken mit elastisch drehbaren Stützen in B, C und D und veränderlichem Trägheitsmoment, dessen zweites Feld irgendwie belastet sei. Die Momentenfläche dieses Balkens hat das in Abbildung 1 dargestellte Aussehen, wo M_s das Moment bedeutet, das in die Stütze B übergeht. Die Momentenfläche teilen wir wie eingezeichnet in die Dreiecke 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 und das Fünfeck 4, betrachten diese Flächen, nachdem wir sie durch $E \cdot J$ dividiert haben, als Belastungsflächen und zeichnen hierzu das Seileck $A_2\, B_2\, N''$... Nach dem Moor'schen Satz stellt dieser Seilzug die Tangenten an die elastische Linie der Balkenaxe dar. Die Lotrechten D, welche durch die Schwerpunkte der durch $E \cdot J$ dividierten Momentendreiecke gehen und mit „Drittelslinien" bezeichnet werden, liegen bei veränderlichem Trägheitsmoment nicht mehr im Drittel der Spannweite. Auch die „verschränkte Drittelslinie" D' erhält man nicht mehr durch Vertauschen der Drittelsabstände, sondern sie ist als Resultierende der Kräfte 1 und 2 aufzufassen.

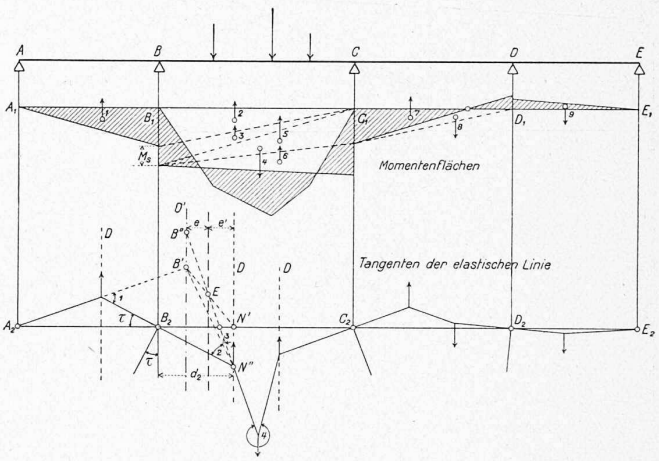

Abbildung 1.

Es ist, wie Abbildung 1 zeigt, auch bei veränderlichem Trägheitsmoment

$$\frac{e}{e'} = \frac{B'\,B''}{N'\,N''}$$

$B'\,B''$ ist eine lotrechte Verschiebung auf der D'-Linie, hervorgerufen durch das Momentendreieck 3. In der bei veränderlichem Trägheitsmoment auszuführenden Konstruktion der Drittelslinien kann diese Verschiebung direkt abgemessen werden.

Um die Erklärung anschaulicher zu machen, ist in Abb. 2 (S. 24) ein Beispiel durchgeführt worden. Es sind dort nach der üblichen Konstruktion, welche zur Ermittlung der Drittelslinien dient, die elastischen Linien $A_2\, B_2\, C_2$ für die Beanspruchung des [1]) Balkens mit der Momentenfläche $A_1\, B_1\, C_1\, B'_1$ gezeichnet.

Der von der ersten und letzten Seillinie des zweiten Feldes auf der verschränkten Drittelslinie D' begrenzte Abschnitt δ ist nun gleichbedeutend der Verschiebung $B'\,B''$ in Abbildung 1, denn beides sind Senkungen auf derselben Linie B', hervorgerufen durch analoge Momentendreiecke mit der Spitze in C_1. Da diese Dreiecke sich verhalten wie M_s zu m, so ist die Grösse $B'\,B''$ in Wirklichkeit (nicht verzerrt)

$$B'\,B'' = \frac{\delta}{\xi} \cdot \frac{M_s}{m},$$

wo $\xi = \frac{E \cdot J}{H \cdot a \cdot w}$ = Verzerrungsverhältnis.

Es wurde nun in Abbildung 2 zur Aufzeichnung der Seilecke $A_2\, B_2\, C_2$ die veränderliche Polweite $w = \frac{E \cdot J}{a}\ mkg$ gewählt und zwar in einem gewissen Masstab μ; im Beispiel ist mit $E = 1\ kg/m^2$: $1\ m = 0{,}005\ mkg$, also $\mu = \frac{1\ m}{0{,}005\ mkg} = 200\ \frac{1}{kg}$.

[1]) über den Stützen aufgeschnitten gedachten.

Deshalb ist $\xi = \frac{E\,J}{H a \cdot \frac{E\,J}{a}\,\mu} = \frac{1}{H \mu}$,

womit folgt $B'\,B'' = \delta\,H\,\mu\,\frac{M_s}{m}$.

H bedeutet die erste Polweite, mit der die Momentenlinie $A_1\,B'_1\,C_1$ (Abbildung 2) gezeichnet wurde. Es ist deshalb

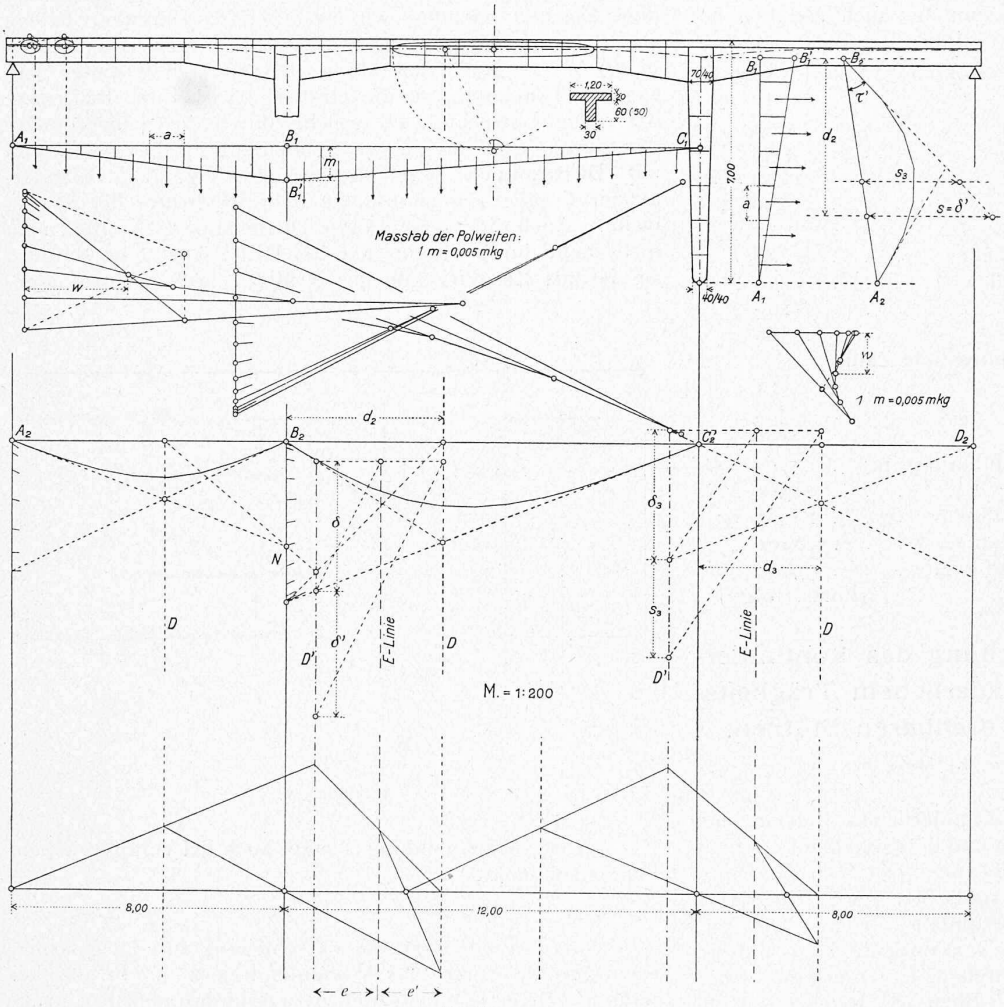

Abbildung 2.

das Moment m gleich der Ordinate m multipliziert mit H oder $\frac{m}{H}$ ist gleich der im Längenmasstab gemessenen Ordinate m, welche wir als solche mit $\overline{m}$ bezeichnen wollen. Es ist dann

$$B'\,B'' = \delta\,\mu\,\frac{M_s}{\overline{m}}.$$

Andererseits ist (Abbildung 1) ebenfalls in unverzerrter Grösse

$$N'\,N'' = \tau\,d_2,$$

wo d_2 den Abstand der Drittelslinie und τ die Verdrehung des Säulenkopfes bedeuten. Es ist aber $\tau = \frac{M_s}{\varepsilon}$, wenn unter ε das „Elastizitätsmass" der Stützen verstanden wird, d. h. der reziproke Wert des unter dem Einfluss eines am unverschieblichen Säulenkopf angreifenden Momentes von der Grösse 1 dort entstehenden Verdrehungswinkels. Damit folgt

$$N'\,N'' = \frac{M_s}{\varepsilon}\,d_2$$

und endlich

$$\frac{e}{e'} = \frac{B'\,B''}{N'\,N''} = \frac{\delta\,\mu\,M_s \cdot \varepsilon}{\overline{m} \cdot M_s\,d_2} = \frac{\delta\,\mu\,\varepsilon}{\overline{m}\,d_2}$$

Dieser Ausdruck kann nun bei gegebenem Elastizitätsmass ε der Stützen ausgerechnet (δ, $\overline{m}$ und d_2 sind im Längenmasstab abzulesen) und damit die Lage der Elastizitätslinie oder kurz „E-Linie" bestimmt werden. Die letztere erhält man aber direkt auf graphische Weise sehr einfach folgendermassen:

Man schreibt

$$\frac{e}{e'} = \frac{\delta}{d_2 \cdot \frac{\overline{m}}{\mu\,\varepsilon}} = \frac{\delta}{\delta'}$$

und trägt unter dem Abschnitt δ (Abbildung 2) den mit dem Rechenschieber gerechneten Wert $\delta' = d_2 \cdot \frac{\overline{m}}{\mu\,\varepsilon}$ als Länge im Längenmasstab ab. Zwei Parallele liefern dann die Lage der E-Linie.

Leisten nicht nur die Stützen B, C und D, sondern auch das Endauflager A der Drehung der Balkenachse elastischen Widerstand, so spielt dort die Auflagerlinie die Rolle der verschränkten Drittelslinie, sodass δ durch die Strecke $B_2\,N$ dargestellt wird (Abbildung 2).

Bei sich stark änderndem Trägheitsmoment werden die Kraftecke mit veränderlicher Polweite ihrer Grösse wegen unpraktisch. Man verfährt deshalb besser und genauer, wenn man als Gewichte nicht die Momentenordinaten, sondern die sog. „elastischen Gewichte zweiter Ordnung" $\Delta\,w = \frac{\Delta\,l \cdot x}{E\,J}$ aufträgt[1]). Damit fällt auch das Zeichnen der Momentenfläche $A_1\,B_1\,C_1\,B'_1$ weg. Wählt man die konstante Polweite w gleich der Spannweite l der zugehörigen Oeffnung, so wird einfach $\delta' = \frac{d_2\,\mu}{\varepsilon}$, wo μ den Masstab des Kraftecks bedeutet; wenn z. B.

$$1\ m = 100\ \frac{1}{kg}$$

dann ist $\mu = 0{,}01\ mkg$.

Es wird dann $\frac{e}{e'} = \frac{\delta}{d_2 \cdot \frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\delta}{\delta'}$

Es soll nun Einiges über die Ermittlung des Elastizitätsmasses gesagt werden. Bei den meisten der in der Praxis zu behandelnden Fällen rührt die Elastizität der Stützpunkte einer Drehung gegenüber von der starren Verbindung des Balkens mit den ihn tragenden Säulen her.

Ist das *Trägheitsmoment der Säule konstant*, so wird das Elastizitätsmass ε am schnellsten durch Rechnung gefunden und in die Gleichung für δ' eingesetzt. Die Formeln für ε lauten, wenn h die elastische Höhe der Säule, y_s den Abstand der Säulenmitte von der Balkenaxe und E und J Elastizitätsmodul und Trägheitsmoment der Säule bedeuten:

a) Bei Anordnung eines Fussgelenkes:

$$\varepsilon = \frac{3\,(2\,y_s + h)^2\,E\,J}{4\,h^3}$$

b) Bei fester Einspannung des Fusses:

$$\varepsilon = \frac{(12\,y_s^2 + h^2)\,E\,J}{h^3}$$

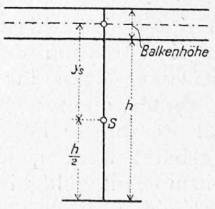

Abbildung 3.

[1]) und die elastische Linie mit konstanter Polweite w konstruiert.

Ist das *Trägheitsmoment der Säule veränderlich*, so kann folgendermassen vorgegangen werden:

a) Bei Anordnung eines Fussgelenkes:

Dieser Fall wurde in dem durchgeführten Beispiel (Abbildung 2) angenommen. Man zeichne die elastische Linie $A_2 B_2$ der Säule für die Belastung derselben mit dem Momentendreieck $A_1 B_1 B'_1$ und zwar analog der Konstruktion beim Balken mit der veränderlichen Polweite $w = \frac{E J}{a}$ (bezw. bei Anwendung der elastischen Gewichte zweiter Ordnung mit konstanter Polweite). Dann zieht man im Abstand d_2 (Entfernung der Drittelslinie von der Auflagerlotrechten) von der Balkenaxe eine Parallele zu dieser. Hat man den Masstab μ der Polweiten w und die Strecke $B_1 B'_1$ gleich wie beim Balken gewählt (was im Beispiel so gemacht wurde), so ist die Strecke s auf der gezogenen Parallelen zwischen Schlusslinie und erster Seillinie gleich dem unter der Strecke δ abzutragenden Abschnitt δ'.

Zum Beweis gehen wir von der Bedeutung der Grösse δ' aus. Es ist nach oben

$$\delta' = \frac{d_2 \, \overline{m}}{\mu \, \varepsilon}$$

und mit $\varepsilon = \frac{M_s}{\tau}$ $\quad \delta' = \frac{d_2 \, \overline{m} \, \tau}{\mu \, M_s}$,

wo τ die wahre Grösse der Säulenkopfverdrehung infolge M_s bedeutet, und

$$\delta' = \frac{d_2 \, \overline{m} \, \tau'}{\mu \, M_s \, \xi},$$

wo τ' die verzerrte Grösse dieser Verdrehung und ξ das Verzerrungsverhältnis ist. Mit $\xi = \frac{1}{H_s \, \mu_s}$ und $M_s = \overline{m}_s \, H_s$ (wie oben, wo aber der Index s die auf die Säule sich beziehenden Grössen bezeichnet) folgt nun

$$\delta' = \frac{d_2 \, \overline{m} \, \tau' \, H_s \, \mu_s}{\mu \, M_s} = d_2 \, \tau' \cdot \frac{\overline{m} \, \mu_s}{\overline{m}_s \, \mu}.$$

Werden nun $\overline{m}_s$ und μ_s bei der Säule so gross wie beim Balken gewählt, so wird

$$\delta' = d_2 \, \tau' = s,$$

womit die Richtigkeit der äusserst einfachen Konstruktion in Abbildung 2 bewiesen ist.

Es ist in diesem Falle also

$$\frac{e}{e'} = \frac{\delta}{s}$$

Die Konstruktion der E-Linie im dritten Feld des Trägers (Abbildung 2) gestaltet sich ganz entsprechend.

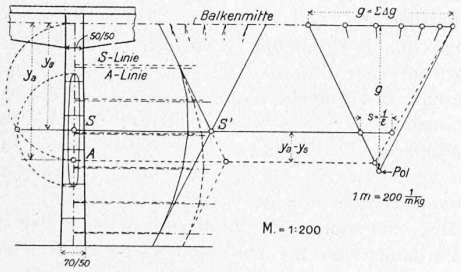

Abb. 4.

b) *Bei fester Einspannung des Fusses*:

Das in Abbildung 4 behandelte Beispiel schliesst sich an das vorhergehende an. Nach dem am Anfang genannten Werk wird das Elastizitätsmass für diesen Fall nach der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{y_a}{g \, (y_a - y_s)}$$

berechnet, wo g die Summe der elastischen Gewichte $\Delta g = \frac{\Delta s}{E J}$, y_a und y_s die Abstände des Antipols und des elastischen Schwerpunktes von der Balkenaxe bedeuten (Abbildung 4). Der Wert $g = \Sigma \Delta g$ wird ausgerechnet, während y_a und y_s aus der Konstruktion zweier Seilecke zu entnehmen sind.

Den Punkt S', welcher die Lage des elastischen Schwerpunktes bestimmt, wählt man dabei praktisch gleich als Pol des zweiten Kraftecks. Es ist mit obiger Formel für ε leicht einzusehen, dass der Abschnitt s in Abbildung 4 gleich $\frac{l}{\varepsilon}$ ist und zwar im Masstab der elastischen Gewichte, welcher Wert nun in den Ausdruck für $\frac{e}{e'}$ eingesetzt werden kann.

Wählt man, was in Abbildung 4 geschehen ist, den Masstab der elastischen Gewichte gleich dem reziproken Wert des Masstabes μ der Polweiten w beim Zeichnen der elastischen Linien des Balkens, also gleich $1/\mu$, so ist

$$\delta' = d_2 \, \overline{m} \, \overline{s},$$

wo s dann einfach im Längenmasstab abzumessen ist, was wieder durch einen wagrechten Strich angedeutet wurde. Es ist dann

$$\frac{e}{e'} = \frac{\delta}{d_2 \, \overline{m} \, \overline{s}} = \frac{\delta}{\delta'}$$

In dem ausgeführten Beispiel wurde der Elastizitätsmodul $E = 1 \; kg/m^2$ gesetzt, da er als durchweg konstant ohne Einfluss auf die Untersuchung ist. Natürlich ist die zuerst angegebene Gleichung zur Bestimmung der E-Linie auch für verschiedene Werte von E gültig. In dieser Gleichung ist der Elastizitätsmodul des Balkens im Masstab μ enthalten, derjenige der Stütze im Elastizitätsmass ε.

Nach der Festlegung der E-Linien folgt die Konstruktion der Fixpunkte (Abbildung 2) wie üblich. Zur Berechnung der Momente bietet die Kombination der beiden Fälle des veränderlichen Trägheitsmomentes und des Vorhandenseins von elastisch drehbaren Stützen keine Schwierigkeit.

Zum Schluss soll noch bemerkt werden, dass bei vollwandigen Balken die Kräfte zum Zeichnen der Seilecke $A_2 B_2 C_2$ (Abbildung 2), welche gleich sind den mittlern Höhen der Trapeze in der Momentenfläche $A_1 B_1 C_1 B'_1$ streng genommen in den Schwerpunkten dieser Trapeze angreifen oder, was dasselbe ist, in den Antipolen der Auflagerlotrechten $A_1 A_2$ bezüglich der Elastizitätsellipsen der einzelnen Lamellen. Daraus folgt, dass die Drittelslinien stets durch die Antipole der Auflagerlotrechten bezüglich der Elastizitätsellipsen der einzelnen Oeffnungen gehen, was in Abbildung 2 angedeutet wurde.

Ingenieur Arnold Seitz

Geb. 20. Aug. 1846. Gest. 25. Dez. 1913.

† Arnold Seitz.

Mit dem am 25. Dezember 1913 zu St. Gallen verschiedenen a. Vizepräsidenten der Kreisdirektion IV der Schweizerischen Bundesbahnen, Ingenieur Arnold Seitz, ist wieder einer aus dem immer enger werdenden Kreise unserer ältern Vereinsmitglieder dahingegangen, der bis zuletzt treu zu seinen Fachgenossen gehalten hat und bei ihnen in bestem Angedenken fortleben wird. Unser Kollege Seitz wurde als Sohn des angesehenen Arztes Johannes Seitz in St. Gallen am 20. August 1846 geboren und verlebte seine Jugendjahre auf dem schönen Gute bei St. Leonhard ausserhalb der Stadt, in dem sein Vater zuerst eine Heilanstalt für Geisteskranke und später eine allgemeine, viel besuchte Kuranstalt leitete. Nach Besuch der städtischen Schulen in St. Gallen bezog er schon 1864 die Eidg. Techn. Hochschule in Zürich, um an der Ingenieur-Abteilung mit