

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 63/64 (1914)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern  
**Autor:** Stodola, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31461>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

wir uns auf die Wiedergabe der äussern Erscheinung beschränken.

Alt ist, wie bereits gesagt, der östliche Baukörper unter dem Giebeldach (Tafel 46). Dieser Teil des Hauses enthält die Wohnräume für Familie und Gäste. In einem westlichen Anbau, unter einem niedrigeren Zeltdach, sind vereinigt worden: einmal ein grosser Speisesaal mit anschliessender offener Loggia (untere Bilder auf Tafeln 46 bis 48), sodann Küchen- und Wirtschaftsräume, Heizkeller usw., sowie noch einige Schlafzimmer im Dach. Um diesen Bauteil als untergeordneten Anbau zu kennzeichnen, ist er im Verhältnis zum Hauptfirst möglichst niedrig gehalten. Auch sind die Fenster jenen des alten Hauses entsprechend bemessen, beim hohen Speisesaal in geschickter Weise unter Verwendung ovaler Oberlichter, die mit den zugehörigen Fenstern durch Hausteignumrahmung nach aussen passend zusammengefasst sind.

Grosse Sorgfalt ist dem architektonisch geformten Garten gewidmet, dessen Durchbildung von Kunstmärtner P. Schädlich in Zürich stammt (Abb. 1). Der alte Bestand an mächtigen Windschutzbäumen (Laubholz, Tannen und Lärchen) im Nordwesten und Nordosten des alten Hauses ist weiter entwickelt worden durch einen Kranz von Lärchengruppen, der sich um den grossen, ebenen Terrassengarten vor der Südwestfront legt. Zwischen diesen Baumgruppen hindurch und durch sie eingeraumt bieten sich vom Hause aus wechselvolle Bilder auf den See, das Hochgebirge und den Waldrücken des Albis von ganz hervorragender Schönheit. Der Eindruck wird noch gesteigert dadurch, dass naheliegende Bodenwellen jenseits der neuen Strasse den Mittelgrund abdecken, sodass man tatsächlich Fernsicht geniesst. Gegen den See ist eine Pergola an der Böschungskante vorgesehen, von deren vorgeschobenem Rondell man das ungeteilte Panorama betrachten kann, und ungefähr parallel zur alten Strasse zieht sich ein langer Blumenweg hin, dessen Farbenpracht an heller Sonne wohl an südliche Vegetationsbilder erinnert. Zwischen ihm und der alten Strasse selbst liegt, etwa 4 m unter dem Terrassengarten, ein von einer Hecke umschlossener, vertiefter Rasen-Spielplatz (Tafel 46 oben), und nördlich von diesem der „Kindergarten“ mit Laube. In den einspringenden, nach Süden geöffneten Winkel des Hauses wurde der Rosen- garten verlegt mit einem Sitzplatz an der äussern Ecke, von dem aus die Frau des Hauses ihr weites Blumenreich überblicken kann, bis hinunter und hinüber zum Obst- und Gemüsegarten, nach den Stallungen und Gewächshäusern jenseits der alten Strasse. Nach Südosten dehnt sich über die Wiesen ein Obstbaumwald bis an das Wohnhaus des Gutspächters, der den umfangreichen Landwirtschaftsbetrieb führt. Das Stallgebäude enthält im südwestlichen Längsflügel den geräumigen Pferdestall samt prachtvoller Sattelkammer, im kurzen Flügel die Wagenremisen und gegen die alte Strasse hin die Autogarage; im Obergeschoss befinden sich Personal-Wohnräume. Den nordöstlichen Fuss des Hügels beleben Birken und andere Laubhölzer in freier Bepflanzung längs einem natürlich sich hinziehenden Bächlein. Sehr wirkungsvoll ist die Anfahrt zum Hause geführt: von Norden her, aus der Tiefe dem Hause auf der alten Strasse sich nähernd, sieht man es der Reihe nach von Norden, Westen und Süden, bis man auf dem im Bogen von Südosten her die grosse Terrasse ersteigenden Anfahrtsweg die Höhe gewinnt, von der sich, am Ziele angelangt, die volle Schönheit der Lage dem überraschten Auge erschliesst.

Die Gartenbauwerke sind in rauhem Bruchsteinmauerwerk unter Verwendung roter Melserplatten für Stufen und Abdeckplatten ausgeführt (Tafel 48 unten) und in den Terrassenmauern sind zahlreiche Nischen ausgespart, aus denen Schlingpflanzen sprossen, bestimmt, dereinst alles zu umgrünen.

So ist hier durch die Kunst der Architekten und des Gärtners ein Sitz geschaffen worden, auf dem Bauwerk und Natur zu einer Einheit von seltener Schönheit sich verweben. (Schluss folgt.)

# Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern.

Von Professor *A. Stodola*, Zürich.

(Schluss von Seite 255.)

## V. Das Verfahren von Rayleigh<sup>1)</sup>.

Auch hier ist für die Form der verbogenen Mittelfläche ein der Wirklichkeit voraussichtlich möglichst nahe kommender, den Einspannungsbedingungen genügender, sonst willkürlicher Ausdruck aufzustellen, mit welchem die potentielle und die kinetische Energie der Scheibe als Funktionen der benützten Parameter darzustellen sind. Die Gesamtenergie der isoliert gedachten schwingenden Scheibe wird nun periodisch aus der kinetischen Form in die potentielle umgewandelt, und umgekehrt. Es sei die Schwingungsform

$$w = v \cos \lambda t,$$

dann wird für  $\lambda t = \pi/2$ , wo die Mittelfläche eben ist, und wenn wir von der *unveränderlichen* Dehnung durch die stets gleichen Fliehkräfte absehen, nur kinetische Energie von der Form  $K_0 \lambda^2$  vorhanden sein. In dem Augenblicke, wo alle Teilchen die äusserste Stellung erreicht haben und sich in Ruhe befinden, verschwindet die kinetische Energie; statt dessen ist erstens eine potentielle Energie vorhanden in Gestalt der aufgenommenen Formänderungs-(Biegsungs-)Arbeit  $\Phi_0$  und ferner eine potentielle Energie  $F_0$  der Fliehkräfte, weil deren Angriffspunkte wie beim schwingenden Pendel gegen die Welle hin zurückgeschoben worden sind. Nun muss die Gesamtenergie des Systemes konstant bleiben, also ist

$$\Phi_0 + F_0 = K_0 \lambda^2,$$

woraus sich

ergibt, und da  $\lambda T = 2\pi$  die volle Periode bedeutet, so ist die *Schwingungsdauer*

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

wie auch die sekundliche *Schwingungszahl*

$$N_{sek} = \frac{1}{T} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 2$$

Von dieser Schwingungszahl beweist Rayleigh, dass sie jedenfalls grösser ist als die tiefste natürliche Schwingungszahl der Scheibe, ihr aber umso näher kommt, je genauer die angenommene Form der Verbiegung mit der tatsächlichen übereinstimmt. Man wird also die von der Annahme der Deformation herstammenden Parameter im Ausdruck von  $N$  so zu wählen haben, dass  $N$  einen Mindestwert erhält. Der Vergleich mit Kirchhoffs Ergebnissen zeigt, dass man auf diese Weise zu einer praktisch brauchbaren Annäherung an die Wirklichkeit gelangt.

### Potentielle Energie der Verbiegung (Formänderungsarbeit).

Es bedeute

$h' = cr^{-\alpha}$  die veränderliche halbe Dicke der Scheibe im Abstande  $r$ ;  $h = 2h'$  die ganze Dicke;

die halbe Dicke am äussern Rand; die Hauptkrümmungsradien der verbogenen Mittel-

fläche im Punkte  $xy$ ;  
die in den *Hauptschnitten* je in der äussersten

Faser herrschenden Biegungsspannungen; das Verhältnis der Querzusammenziehung zur

*w* Längendehnung;  
die von der Mittelebene aus gezählte Verbiegungs-

$r_0$  auslenkung; den Halbmesser der Nabenoerzung;

Der Krümmung  $\varrho_1$  entspricht in der äussersten Faser die Hauptdehnung  $\varepsilon_1 = h'/c_1$ , ebenso ist  $\varepsilon_2 = h'/c_2$  (die Fliehdehnung) und  $\varepsilon_3 = h'/c_3$  (die Längenänderung der Faser).

1) The theory of sound 1894 Seite 112

Daraus folgen die Hauptspannungen, wenn

$$E' = E/(1-\nu^2) \quad \dots \dots \dots 3$$

$$\sigma_1 = E'(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \quad \sigma_2 = E'(\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad \dots \dots \dots 4$$

Schneiden wir zu den Haupt schnitten parallel ein Parallelepiped mit den Seitenlängen  $ds_1 = \varrho_1 da_1$ ;  $ds_2 = \varrho_2 da_2$ , so ist das Moment der Biegungsspannungen in  $ds_2$

$$M_1 = \frac{1}{6} ds_2 (2h')^2 \sigma_1$$

Die Arbeit, die dieses Moment von seiner Entstehung an geleistet hat, ist

$$\frac{1}{2} M_1 da_1 = \frac{1}{2} M_1 \frac{ds_1}{\varrho_1} = \frac{E' h^3}{3} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \nu \frac{1}{\varrho_2} \right) \frac{1}{\varrho_1} ds_1 ds_2 \quad \dots \dots \dots 4a$$

ebenso  $\frac{1}{2} M_2 da_2 = \frac{1}{2} M_2 \frac{ds_2}{\varrho_2} = \frac{E' h^3}{3} \left( \nu \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) \frac{1}{\varrho_2} ds_1 ds_2 \quad \dots \dots \dots 4a$

also ist die Deformationsarbeit für die Flächeneinheit (d. h. nach Division mit  $ds_1 ds_2$ ) im Ganzen

$$= \frac{E' h^3}{3} \left( \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{2\nu}{\varrho_1 \varrho_2} + \frac{1}{\varrho_2^2} \right) = \frac{E' h^3}{3} \left[ \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{\varrho_1 \varrho_2} \right] \quad 5$$

Nun ist bei der vorausgesetzten Kleinheit von  $w$ , also der kleinen Neigung der Biegungsfläche gegen die Mittelfläche der Scheibe, wenn wir mit den Fusszeichen  $x, y$  die betreffenden Ableitungen bezeichnen, bekanntlich (Hütte, 21. Auflage, Seite 122)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} &= w_{xx} + w_{yy} \\ \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} &= w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind in Polarkoordinaten umzurechnen, was man z. B. durch eine Betrachtung von Föppl, Mechanik, Band V, 1. Auflage, Seite 70, abkürzen kann. Bezeichnet man die Ableitung nach  $r$  mit dem Index 1, diejenige nach  $\varphi$  mit 2, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} &= w_{11} + \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2} \\ \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} &= w_{11} \left( \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w_2}{r} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots 6$$

Das Flächenelement der Mittelfläche ist in Polarkoordinaten  $= r dr d\varphi$ , und so ist die potentielle Energie der Scheibe

$$\Phi = \iint \frac{E' h^3}{3} \left[ \left\{ w_{11} + \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2} \right\}^2 - 2(1-\nu) \left\{ w_{11} \left( \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2} \right) - \left( \frac{\partial w_2}{\partial r} \right)^2 \right\} \right] r dr d\varphi \quad \dots \dots \dots 7$$

wobei die Integrationsgrenzen sich nach der Art der Lagerung und den Knotenlinien richten.

#### Wahl des Ansatzes für die Formänderung.

Das Auftreten von  $k$  Knotendurchmessern wird wiedergegeben durch den Ansatz

$$w = u \sin k\varphi \cos \lambda t. \quad \dots \dots \dots 8$$

wo  $u$  nur noch eine Funktion von  $r$  ist. Um eine möglichst innige Anschmiegeung an die wirkliche Formänderung zu erhalten, sollte  $u$  so gewählt werden, dass es allen Grenzbedingungen entspricht.

Für die volle Scheibe ist im Mittelpunkt  $u = 0$  und  $du/dr = 0$  vorzuschreiben. Am Außenrand, sofern der selbe frei ist, müssen die Normal- und die Schubspannungen verschwinden. Für die erstenen haben wir nach Gleich. 4 und 4a

$$\sigma_r = E' h' \left( \frac{1}{\varrho_r} + \frac{v}{\varrho_r} \right)$$

und da angenähert

$$\frac{1}{\varrho_r} = w_{11}; \quad \frac{1}{\varrho_r} = \frac{w_{22}}{r^2} + \frac{w_1}{r}$$

so ist  $\sigma_r = 0$  gleichbedeutend mit

$$w_{11} + v \left( \frac{w_{22}}{r^2} + \frac{w_1}{r} \right) = 0,$$

oder  $\frac{v}{1-\nu} \left( w_{11} + \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2} \right) + w_{11} = 0. \quad \dots \dots \dots 9$

Dies ist die erste der berühmten Kirchhoffsschen Grenzbedingungen.

Die Schubspannungen liefern erstens eine Einzelkraft, die für 1 cm Randbreite den Wert

$$V = \frac{E h^3}{(1-\nu^2) 12} \frac{\partial}{\partial r} \left[ w_{11} + \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2} \right]. \quad \dots \dots \dots 10$$

besitzt, wie man am einfachsten aus den Föpplischen Formeln (104) und (143) in Band V der „Mechanik“ ab-

leiten kann. Das Verschwinden von  $V$  genügt indessen nicht; es muss nach Love, „Lehrbuch der Elastizität“, 1907, Seite 529, noch die Ableitung des Momentes der (horizontalen) Schubkräfte (für 1 cm Randbreite) zu  $V$  hinzugefügt werden. Dieses Moment ist, wie man wieder bei Föppl, Band V, Seite 103, abgeleitet findet,

$$M = \frac{2 G h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

also in Polarkoordinaten, und wenn man  $2 G = E : (1+\nu)$  einsetzt

$$M = \frac{E h^3}{(1+\nu) 12} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \quad \dots \dots \dots 11$$

Die Vorschrift

$$V + \partial M / \partial s = 0. \quad \dots \dots \dots 12$$

führt hiernach bei unveränderlichem  $h$  zur Gleichung

$$\frac{1}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[ w_{11} + \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r} w_{12} - \frac{w_2}{r^2} \right] = 0. \quad \dots \dots \dots 13$$

und dies ist die zweite der Kirchhoffsschen Grenzbedingungen. Wäre ein innerer Rand vorhanden, so müssten zwei ähnliche Gleichungen für diesen aufgestellt werden. Noch schwieriger gestaltet sich der Fall, wenn die Scheibendicke  $h$  veränderlich ist, da dann in Gleich. 12 auch dieses differentiiert werden müsste, und am schlimmsten, wenn die Scheibe mit einer Randverdickung, dem Kranz, versehen ist.

Unter diesen Umständen ist es geboten, sich mit einer Annäherung zufrieden zu geben, als welche

$$w = a(r^s - r_0^s) \sin k\varphi \cos \lambda t. \quad \dots \dots \dots 14$$

gewählt wird. Hierin soll  $r_0$  den Halbmesser der Nabenhöhe (oder die Mitte der Nabewandstärke) bedeuten, sodass für  $r = r_0$  die Verrückung  $w = 0$  wird. Bei vollständiger Einspannung der Nabe müsste auch  $\partial w : \partial r = 0$  werden; in Wahrheit wird die Nabe der Biegung etwas nachgeben, und dies findet in der Formel dadurch einen Ausdruck, dass  $\partial w : \partial r$  nicht verschwindet, jedoch infolge eines stets positiven Wertes von  $\partial^2 w : \partial r^2$  das Vorhandensein eines Einspannungsmomentes dient.

Die Benützung dieses Ansatzes im Verein mit der Annahme, dass die Scheibendicke nach dem Gesetz einer höheren Hyperbel, d. h. nach

$$h' = c r^{-\alpha}$$

abnimmt, liefert nach Gleich. 7 folgenden Ausdruck der potentiellen Energie für ein Segment vom Zentriwinkel  $\pi : k$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \frac{E h'^3}{k 3 (1-\nu^2)} \left[ \frac{A_1}{\tau_1} (1 - \zeta^{\tau_1}) + \frac{A_2}{\tau_2} \zeta^s (1 - \zeta^{\tau_2}) + \frac{A_3}{\tau_3} \zeta^{2s} \left( \frac{1}{\zeta^{\tau_3}} - 1 \right) \right] a^2 R^{2s-2} \cos^2 \lambda t. \quad \dots \dots \dots 15$$

mit den Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (s^2 - k^2)^2 + 2(1-\nu)(s-1)[k^2(2s-1) - s^2] \\ \tau_1 &= 2s - 3a - 2 \\ A_2 &= k^2 [2(s^2 - k^2) + 2(1-\nu)(s-1)(2-s)] \\ \tau_2 &= s - 3a - 2 \\ A_3 &= k^2 [k^2 + 2(1-\nu)]; \quad \zeta = \frac{r_0}{R} \\ \tau_3 &= 3a + 2 \end{aligned} \right\} \quad 16$$

#### Die kinetische Energie.

Bezeichnet  $v$  die Schwingungs-Geschwindigkeit eines Massenelementes  $dm$ , so ist die kinetische Energie

$$K = \frac{1}{2} \int dm v^2. \quad \dots \dots \dots 17$$

Hierin ist  $dm = \mu 2h' r dr d\varphi$  und  $v = dw : dt$ , somit erhält man für ein Segment vom Zentriwinkel  $\pi : k$

$$K = \frac{\pi}{2} \mu h'^3 \left[ \frac{1}{\tau_1} (1 - \zeta^{\tau_1}) - \frac{2}{\tau_2} \zeta^s (1 - \zeta^{\tau_2}) + \frac{1}{\tau_3} \zeta^{2s} (1 - \zeta^{\tau_3}) \right] a^2 k^2 R^{2s-2} \sin^2 \lambda t. \quad \dots \dots \dots 18$$

mit den Bezeichnungen

$$\sigma_1 = 2s - \alpha + 2; \quad \sigma_2 = s - \alpha + 2; \quad \sigma_3 = -\alpha + 2. \quad \dots \dots \dots 19$$

#### Die Arbeit der Fliehkräfte.

Gemäss Abbildung 3 leistet die an einem Zwischenpunkte  $B$  angreifende Fliehkraft  $Q$  beim Uebergang in die gestreckte Lage  $OB_0$  die Arbeit  $\xi Q$ , wobei  $\xi$  als Unterschied der Länge  $O_1 B_0$  und der Projektion des Bogens  $O_1 B$  berechnet werden kann. Von einer Änderung der Längen-

dehnung während der Biegung kann abgesehen werden; auf alle Fälle kann sie nur kleine Bruchteile des Weges  $\xi$  ausmachen. Es ist mithin

$$\xi = r - r_0 - \int_{r_0}^r dr \cos \psi = \int_{r_0}^r dr (1 - \cos \psi)$$

oder da man wegen der Kleinheit von  $\psi$

$$1 - \cos \psi = \frac{1}{2} \psi^2 \text{ und } \operatorname{tg} \psi \cong \psi \cong \partial w : \partial r$$

setzen kann:

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{r_0}^r dr \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{s^2}{2s-1} \left[ r^{2s-1} - r_0^{2s-1} \right] \sin^2 k\varphi \cos^2 \lambda t \quad 20$$

Die gesamte Arbeit der Fliehkraft für ein Segment vom Zentriwinkel  $\beta = \pi : k$  ist nun

$$F = \int dm r w^2 \xi = \int_{r_0}^R \int \mu z h' r dr d\varphi \xi \quad 21$$

$$= \frac{\pi}{2k} \mu w^2 h' \frac{s^2}{2s-1} \left[ \frac{1 - \zeta^{2s-a+2}}{2s-a+2} - \frac{\zeta^{2s-1} (1 - \zeta^{3-a})}{3-a} \right] a^2 R^{2s+2} \cos^2 \lambda t$$

*Schwingungszahl der Scheibe mit  $k$  Knotendurchmessern ohne Knotenkreise mit  $r_0$  Nabenhälfbmesser.*

Wir schreiben die Werte von  $\Phi$  und  $F$  für den Zeitpunkt  $t = 0$  in der Form

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{\pi}{2k} E h' a^3 A a^2 R^{2s-2} \\ F_0 &= \frac{\pi}{2k} \mu h' B a^2 R^{2s+2} \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad 22$$

und den maximalen Wert von  $K$  für  $\lambda t = \pi : 2$

$$K_0 \lambda^2 = \frac{\pi}{2k} \mu h' C a^2 R^{2s+2} \lambda^2$$

wobei die Bedeutung von  $A, B, C$  aus den Gleich. 16, 18, 21 hervorgeht. Nach dem von Rayleigh aufgestellten Grundsatz muss nun sein

$$K_0 \lambda^2 = \Phi_0 + F_0,$$

woraus

$$\lambda^2 = \frac{A}{C} \frac{h^2 E}{R^4 \mu} + \frac{B}{C} \omega^2 \quad \dots \dots \dots \quad 23$$

folgt. Die sekundlichen und minutlichen Schwingungszahlen sind dann

$$N_{sek} = \frac{\lambda}{2\pi}; \quad N_{min} = \frac{\lambda \cdot 60}{2\pi} \quad \dots \dots \dots \quad 24$$

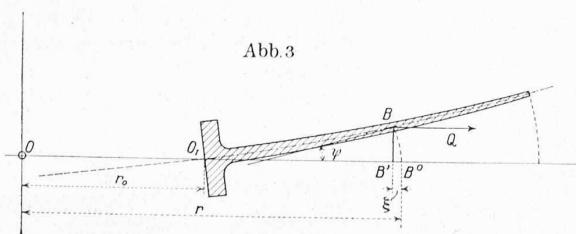
Aus diesen Formeln ist  $a$  herausgefallen; der Exponent  $s$  muss hingegen so bestimmt werden, dass  $\lambda^2$  und damit die  $N$  den *kleinst möglichen Wert* erhalten. Dies geschieht durch Ausrechnung einiger Probewerte.

*Vergleich und Nachprüfung anhand der Kirchhoffschen Zahlen.*

Die Kirchhoffschen Zahlen beziehen sich auf eine ruhende volle Platte von überall gleicher Dicke, d. h. es ist  $\omega = 0$ ,  $a = 0$ ,  $r_0 = 0$  zu setzen. Betrachten wir dabei den praktisch wichtigsten Fall mit zwei Knotendurchmessern ohne Knotenkreise, so ist  $k = 2$  und Gleich. 27 vereinfacht sich zu:

$$\lambda^2 = \frac{1}{3(1-\nu^2)} \frac{s+1}{s-1} \left[ (s^2 - 4)^2 + 2(1-\nu) \left\{ 4(2s-1) - s^2 \right\} \right] \frac{h^2 E}{R^4 \mu} = \psi \frac{h^2 E}{R^4 \mu} \quad \dots \dots \dots \quad 25$$

Abb. 3



Die Nachrechnung ergibt, dass  $\psi$  ein Minimum wird bei  $s = 1,76$ , wenn wir  $\nu = 0,3$  annehmen, und zwar erhält man

$$\lambda^2 = 10,97 \frac{h^2 E}{R^4 \mu}; \quad N_{sek} = 0,527 \sqrt{\frac{E}{\mu}} \quad \dots \dots \dots \quad 26$$

Rechnet man wie Kirchhoff mit  $\nu = 0,333$ , so wird die Beizahl von  $N_{sek} = 0,522$ , während Kirchhoff 0,5114 erhielt. Die Uebereinstimmung ist also eine praktisch befriedigende.

#### Einfluss der Fliehkraft.

Betrachten wir dieselbe Platte wie oben, aber während der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und zwei Knotenkreisen, so führt Gleich. 23 auf

$$\lambda^2 = \psi \frac{h^2 E}{R^4 \mu} + \frac{s^2}{2s-1} \omega^2 \quad \dots \dots \dots \quad 27$$

wobei  $\psi$  dieselbe Bedeutung hat wie in Gleich. 25. Eine unendlich dünne Scheibe ( $h' = 0$ ) oder eine solche aus (gegen Biegung) unendlich nachgiebigem Material ( $E = 0$ ) würde ergeben

$$\lambda^2 \omega = \frac{s^2}{2s-1} \omega^2 \quad \dots \dots \dots \quad 28$$

Die Nachrechnung zeigt, dass  $\lambda^2$  in Gleich. 27 für praktisch in Betracht fallende Werte von  $h' R E$  bei fast demselben Werte von  $s$  zu einem Minimum wird. Bezeichnen wir also  $\lambda$  bei  $\omega = 0$  mit  $\lambda_0$ , so ist

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 + \lambda^2 \omega$$

ebenso dann

$$N_{sek} = \sqrt{N_0^2 + N^2 \omega} \quad \dots \dots \dots \quad 29$$

und es ist insbesondere

$$N_{\omega} = \frac{1,108}{2\pi} \omega \text{ in der Sekunde oder } N'_{\omega} = \frac{1,108}{2\pi} 60 \omega \text{ d. h. } N'_{\omega} = 1,108 n \text{ in der Minute} \quad \dots \dots \dots \quad 30$$

wenn  $n$  die minutliche Umlaufzahl bedeutet. Die Schwingungszahl der Scheibe ist also bei zwei Knotendurchmessern stets höher als die Umlaufzahl; sie ist erheblich grösser für die umlaufende als für die ruhende Scheibe.

#### Scheibe mit Kranz und Schaufelbesatz.

Unter Annahme derselben Form der gebogenen Mittelfläche wie oben bestimmen wir die potentielle und kinetische Energie des Kranzes, wie auch die Arbeit der an ihm angreifenden Fliehkräfte. Es sei:

$J$  das Trägheitsmoment des Kranzquerschnittes, bezogen auf die gegen Biegung widerstandsfähigen Teile desselben und auf die radiale Hauptachse,

$G', M'$  das Gesamtgewicht bzw. die Gesamtmasse des Kranzes und der Schaufeln mit allen Zubehörteilen. Da die Schaufeln mit grösserer Auslenkung schwingen als der eigentliche Kranz, ist ihr Gewicht im Verhältnis des Quadrates dieser Auslenkung vergrössert einzuführen.

*Die potentielle Energie.* Die Gestalt des Kranzes nach der Formänderung ist durch die Gleichung

$$w = a (R^s - r_0^s) \sin k\varphi \cos \lambda t \quad \dots \dots \dots \quad 31$$

mit  $R = \text{konstant}$  bestimmt. Seine Biegung in der Fläche der Scheibe selbst kann vernachlässigt werden; die Biegung senkrecht dazu wird durch den reziproken Wert des Krümmungshalbmessers

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{a^2 w}{k^2 d\varphi^2} = - k^2 a R^{s-2} (1 - \zeta^s) \sin k\varphi \cos \lambda t \quad \dots \dots \dots \quad 32$$

gemessen. Die Biegungsarbeit selbst ist, wenn  $M$  das biegende Moment bedeutet, für das dem Zentriwinkel  $\pi : k$  entsprechende Kranzstück

$$F' = \int \frac{M^2}{2JE} ds = \int_0^{\pi/k} \frac{\pi/2}{2} \frac{J E R d\varphi}{\zeta^2} = \frac{\pi}{4k} J E a^2 (1 - \zeta^s)^2 R^{s-3} k^4 \cos^2 \lambda t = F'_0 \cos^2 \lambda t \quad \dots \dots \dots \quad 33$$

*Die kinetische Energie* ist, wenn  $m_1$  die Masse der Längeneinheit bedeutet,

$$K' = \int \frac{1}{2} m_1 ds v^2 = \int_0^{\pi/k} \frac{1}{2} m_1 R d\varphi \left( \frac{dw}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{M'}{8k} a^2 (1 - \zeta^s)^2 R^{2s} \lambda^2 \sin^2 \lambda t = K'_0 \lambda^2 \sin^2 \lambda t \quad \dots \dots \dots \quad 34$$

*Die Arbeit der Fliehkräfte*, mit Benützung der Auslenkung  $\xi$  für den Rand, nach Gleich. 20

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{a^2 s^2}{2s-1} (1 - \zeta^{2s-1}) R^{2s-1} \sin^2 k\varphi \cos^2 \lambda t$$

$$F' = \int_0^{\pi/k} m_1 R d\varphi \omega^2 \xi = \frac{M'}{8k} \frac{a^2 s^2 \omega^2}{2s-1} (1 - \zeta^{2s-1}) R^{2s} \cos^2 \lambda t = F'_0 \cos^2 \lambda t \quad \dots \dots \dots \quad 35$$

Die Gleichung der Gesamtenergie lautet nun, unter Summation der entsprechenden Energiegrössen

$$(K_0 + K'_0) \lambda^2 = (\Phi_0 + \Phi'_0) + (F_0 + F'_0) \quad \dots \quad 36$$

Wir schreiben diese Summen wie folgt

$$\begin{aligned} \Phi_0 + \Phi'_0 &= \eta_p \Phi_0 \\ K_0 + K'_0 &= \eta_k K_0 \\ F_0 + F'_0 &= \eta_f F_0 \end{aligned} \quad \left. \right\} 37$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \eta_p &= 1 + \frac{(1-\lambda^2)(1-\zeta^2)^2 k^4}{2 A} \frac{J}{R h^3} \\ \eta_k &= 1 + \frac{(1-\zeta^2)^2 M^2}{2 C} \frac{M^2}{M_0} \quad \text{wo } M_0 = 2 \pi R^2 h' \mu \\ \eta_f &= 1 + \frac{(1-\zeta^2 s-1)^2 M^2}{2 (s-1) B} \frac{M^2}{M_0} \end{aligned} \quad \left. \right\} 38$$

somit schliesslich

$$\lambda^2 = \frac{\eta_p}{\eta_k} \frac{\Phi_0}{K_0} + \frac{\eta_f}{\eta_k} \frac{F_0}{K_0} \quad \dots \quad 39$$

Ueber den Einfluss des Kranzes erhält man am besten Aufschluss durch die Bestimmung seiner *Eigenschwingungszahl*, wobei seine Formänderung gleich vorauszusehen ist, wie in Verbindung mit der Scheibe. Alsdann folgt aus der Gleichung der Gesamtenergie (36)

$$K'_0(\lambda')^2 = \Phi'_0 + F'_0$$

Nehmen wir an, der Kranz habe (senkrecht zur Radebene) die Höhe  $h_0$  und die (radiale) Breite  $b_0$ , so ergibt die Ausrechnung

$$\lambda'^2 = \frac{k^4 h_0^2 E}{12 \mu R^4} + \frac{s^2}{2(s-1)} \omega^2 \quad \dots \quad 40$$

und

$$N'_{sek} = \frac{\lambda'}{2 \pi}$$

Ist nun  $N'$  grösser als die Schwingungszahl  $N_0$  der Scheibe ohne Kranz, so wird die resultierende Schwingungszahl offenbar grösser sein als  $N_0$ , und umgekehrt.

Beispieleweise ergibt sich für eine Scheibe von 2000 mm Durchmesser und 1500 minutl. Umdrehzahl, deren Dicke am Aussenrande 20 mm beträgt, mit  $a = 1$  und einem Kranze von 100 mm Höhe und 50 mm radialer Stärke  $N' = 6150$ ;  $N_0 = 6300$ ;  $N = 6200$ ; es beeinflusst also der Kranz die Schwingungszahl nur unbedeutend. Ist die Scheibe hingegen schlanker, z. B. mit  $a = 0,5$ , so wird  $N_0 = 3650$ ;  $N' = 6070$ ;  $N = 5170$ . Hier bewirkt der Kranz eine Erhöhung der Schwingungszahl von mehr als 50 %.

#### *Das Auftreten von Knotenkreisen.*

Die Schwingung mit *einem* Knotenkreis ohne Knotendurchmesser entspricht einer phasengleichen Bewegung aller Punkte des Scheibenumfanges. Eine zur Erregung solcher Schwingungen geeignete periodische Kraft kann vorkommen bei einer Regelung mit künstlich eingeleiteten Schwankungen des Dampfdruckes. Doch pflegt die Periode dieser Schwankungen im allgemeinen gross zu sein und dürfte kaum zu Scheibenschwingungen Veranlassung geben. Die Schwingungsformen, bei welchen Knotenkreise und -Durchmesser zugleich vorkommen, liefern aber nach der Zahlentafel von Kirchhoff für die Scheibe gleicher Dicke so hohe Schwingungszahlen, dass praktisch wohl nur die Schwingungen mit Knotendurchmessern allein eine Bedeutung besitzen dürften. Wir unterlassen es daher, das Auftreten von Knotenkreisen näher zu untersuchen.

#### *Die Wirkung der Nabeneinspannung und der Nabeneinspannung.*

Wir vergleichen ein volles Rad mit einem solchen, dessen Nabeneinspannung  $1/5$  des Aussendurchmessers beträgt. Die Schwingung erfolge mit zwei Knotendurchmessern, die minutliche Drehzahl sei 1500. Die Nachgiebigkeit der Nabe, die in unserer Grundformel, wie schon erwähnt, zum Ausdruck kommt, bewirkt, dass die in der Nähe der Nabe gelegenen Scheibenteile eine geringere Formänderung erfahren, als wenn die Nabe eingespannt wäre. Die Folge ist eine verringerte Rückfederung der gebogenen Scheibe und eine Abnahme der Schwingungszahl. Wie gross dieser Betrag ist,

geht aus nachfolgender Zusammenstellung für eine Scheibe von 2000 mm Aussendurchmesser mit 20 mm Wandstärke am Rande hervor.

Hyperbolisches Profil mit $a =$	0,5	1,0
Schwingungszahl der vollen Scheibe i. d. Minute	3650	6300
Schw'zahl der durchbrochenen „ i. d. Minute	3460	5780
Abnahme der Schwingungszahl in %	5,5	9,0

Wäre die Nabe vollkommen eingespannt (was während des Betriebes kaum erreichbar sein dürfte), dann müsste der Schätzung nach die Schwingungszahl höher sein als

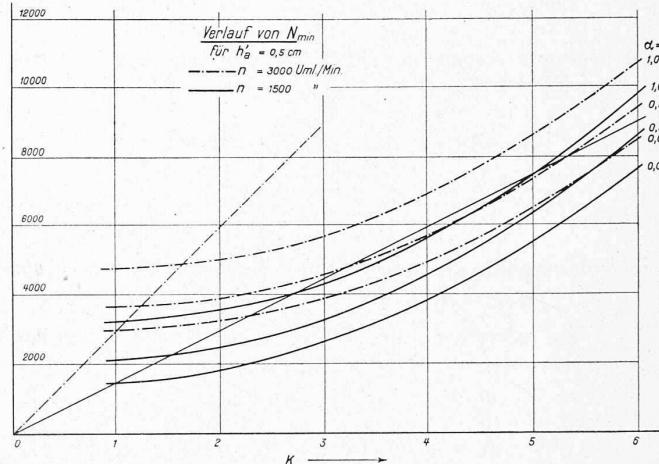


Abb. 4. Graphische Darstellung der Schwingungszahlen.

diejenige der vollen Scheibe. Um in dieser Hinsicht einen Anhaltspunkt zu gewinnen, führten wir ein Rechnungsbeispiel mit Anwendung des *Ritz'schen Verfahrens* durch, welches sich in diesem besonderen Falle weit besser eignet als dasjenige von Rayleigh.

Bei der Annahme einer hyperbolischen Scheibe  $h = cr^{-1}$  und einer Schwingung mit zwei Knotendurchmessern ist ein brauchbarer Ansatz

$$w = (a(r - r_0)^2 + b(r - r_0)^3) \sin k\varphi \cos \lambda t,$$

welcher in die Formeln des III. Abschnittes eingesetzt, durch Nullsetzen der Determinante der Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$$

bei  $r_0 = 0,2 R$  zu der Auflösung

$$\lambda^2 = 131,5 \frac{E' h'^2}{\mu R^4}$$

als Minimum für die *ruhende* Scheibe führt. Daraus ergibt sich bei  $R = 100 \text{ cm}$ ,  $h' = 1 \text{ cm}$ , die Schwingungszahl in der Minute

$$N = 6020.$$

Für die volle Scheibe gleicher Abmessung liefert das Verfahren von Rayleigh

$$N_0 = 5980.$$

Die Einspannung der Nabe hat also die Schwingungszahl erhöht, aber um einen geringfügigen Betrag. Dies ist auch begreiflich bei der grossen Stärke, welche die Scheibendicke gemäss der Gleichung  $h = cr^{-1}$  in der Nähe der Achse einnimmt. Die Werte von  $s$  in der Verbiegungsgleichung  $u = a r^s$  sind in diesem Falle auch entsprechend

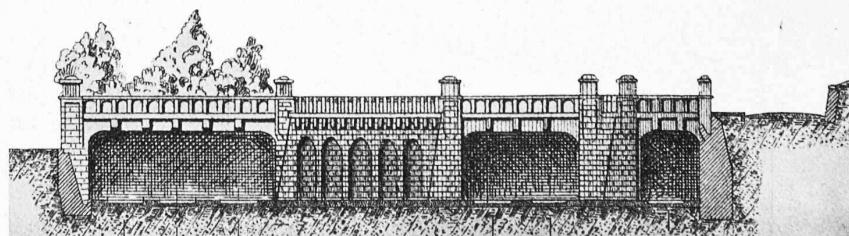


Abb. 10. Querschnitt durch das Südende der Station Enge (gegen Süd). — 1:500.

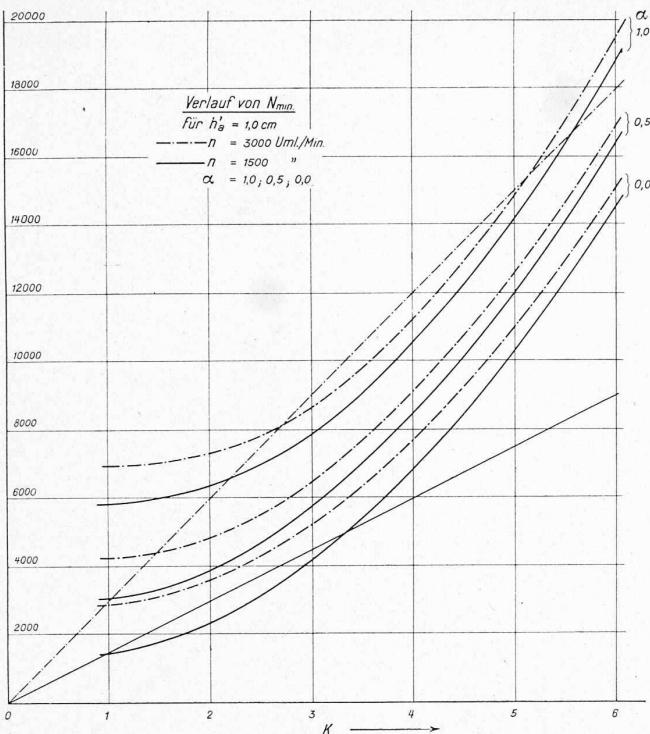


Abb. 5. Graphische Darstellung der Schwingungszahlen.

gross, und so ist die Formänderung in der Nähe der Achse sehr klein, sodass die Scheibe auf eine grössere Ausdehnung (eben bis in die Nähe von  $r = r_0$ ) als fast eingespannt angesehen werden kann. Wir machen uns diesen Umstand zunutze, indem wir im Folgenden annehmen, dass die Schwingungszahl der Scheibe bei eingespannter Nabe bis zu etwa  $r_0 = 0,2 R$  derjenigen gleich ist, die der vollen Scheibe bei gleichem  $\alpha$  entspricht.

#### Graphische Darstellung der Schwingungszahlen.

Indem wir aus dem angegebenen Grunde Schwingungen mit Knotendurchmessern ausschliessen und uns auf volle Scheiben beschränken, werden folgende Formeln anzuwenden sein:

$$\psi = \frac{1}{3} \frac{2s - \alpha + 2}{2s - 3\alpha - 2} \left[ (s^2 - k^2)^2 + 2(1 - \nu)(s - 1) \{ k^2(2s - 1) - s^2 \} \right]$$

$$\lambda^2_0 = \psi \frac{E' h_a^2}{\mu R^4}$$

$$\lambda^2_\omega = \omega^2 \frac{s^2}{2s - 1}$$

$$\lambda^2 = \lambda^2_0 + \lambda^2_\omega$$

$$N_{min} = \frac{60}{2\pi} \lambda$$

wo  $k$  die Zahl der Knotenkreise bedeutet.

Berechnet man zunächst die Werte von  $s$ , für welche  $\lambda^2_0$  ein Minimum wird, so zeigt sich innerhalb nicht zu weiter Grenzen, dass die gleichen Werte auch  $\lambda^2$  zum Minimum machen.

Die auf diese Weise berechneten Schwingungszahlen pro Minute sind graphisch in Abbildung 4 und 5 in Abhängigkeit von der Zahl der Knotendurchmesser dargestellt.

Die vollgezogenen Linien beziehen sich auf 1500, die strichpunktierten auf 3000 minutliche Umdrehungen. Der hyperbolische Koeffizient besitzt die Werte 0, 0,5, 1,0. Der Scheibenhalbmesser ist 1000 mm, die ganze Dicke am Außenrande in Abbildung 4 = 20 mm, in Abbildung 5 = 10 mm. In die Abbildungen sind ferner je zwei schräge Gerade hineingezeichnet, welche die Schwingungszahlen der Kraftperiode bei teilweiser Beaufschlagung darstellen. Da die Frequenz der Kraftwirkung, wie wir gesehen haben,  $\frac{\omega}{2\pi}, \frac{2\omega}{2\pi}, \frac{3\omega}{2\pi} \dots$  beträgt, so geht die Linie bei  $n = 1500$  und  $k = 1$  durch den Punkt  $N = 1500$ , bei  $k = 6$  durch  $N = 6 \cdot 1500 = 9000$  usw. hindurch. Resonanz tritt ein, wenn sich die Kurven der Schwingungszahlen und die Gerade der Kraftperioden auf einer der Ordinaten  $k = 1$  bis 6 schneiden. Findet ein Schnitt zwischendrin statt, so dürfte die Schwingung für die beiden angrenzenden Knotendurchmesserzahlen doch gefährlich werden, weil sie der Resonanz nahekommt. So bemerkt man beispielsweise, dass für  $n = 3000$  Uml/min.,  $h_a = 1$  cm,  $\alpha = 1$ , die Schwingung mit zwei Knotendurchmessern fast genau mit der Resonanz zusammenfällt und der Schnitt zwischen  $k = 5$  und  $k = 6$  auch gefährlich werden dürfte. Die Verminderung der Scheibenstärke auf 10 mm setzt gemäss Abbildung 5 die Schwingungszahlen erheblich herab, sodass nun  $\alpha = 1$  für die Drehzahl  $n = 1500$  in der Minute auf die ganze Ausdehnung von  $k = 3$  bis  $k = 5$  gefährlich wird. Bei dieser Umlaufzahl scheinen die dünnen Scheiben für alle Werte von  $\alpha$  gefährdet zu sein. Die Rücksicht auf die Querschwingungen dürfte ein wichtiges Kriterium für die zulässige Mindeststärke der Scheiben werden, in allen Fällen, wo periodische Kraftwirkungen zu befürchten sind.

#### Einführung der linksufrigen Zürichseebahn in den Hauptbahnhof Zürich der S. B. B.<sup>1)</sup>

In seiner Sitzung vom 1. Mai d. J. hat der Verwaltungsrat der S. B. B. dem jüngsten der Entwürfe, dem „Projekt VI vom Mai 1913“ zugestimmt. Dank dem freundlichen Entgegenkommen der Generaldirektion der S. B. B. sind wir in der Lage, unsere Leser im Folgenden mit den Hauptverhältnissen des Projektes bekannt zu machen. Zum Vergleiche mit seinem nun endgültig begrabenen Vorläufer, dem „Projekt VIII von 1910“ mit Station und S-förmigem, tiefem Einschnitt an der Bederstrasse, sei auf dessen Darstellung und Erläuterung in Band LVII, Seite 112 und 156, verwiesen. Auch der Vergleich mit den Verbesserungs-Vorschlägen der Eisenbahnkommission des Zürcher Ingenieur- und Architekten-Vereins, insbesondere dessen Projekt X (Band LVII, S. 298), ist von Interesse weil daraus hervorgeht, in welch hohem Masse sich die Argumente des Zürcher Ingenieur- und Architekten-Vereins als richtig bestätigt und sogar die Behörden zum Eintreten auf seine Vorschläge veranlasst haben.

Für heute beschränken wir uns darauf, die Hauptunterschiede gegenüber dem Projekt VIII ganz kurz aufzuzählen. Diese bestehen in Aussersihl im Freihalten des Raumes für ein drittes Personen-geleise Hauptbahnhof-Wiedikon, in der Station Wiedikon im Ersatz des früher vorgesehenen breiten Mittelbahnsteigs durch zwei schmale Seitenbahnsteige, die dem ersten überlegen seien (Profil Abb. 5). Die Sihlunterfahrung ist fast unverändert beibehalten. In Enge dagegen finden wir die schlanke Linienführung mit Stationslage an der Grüttistrasse und einem gegen die Seestrasse zu offenen

<sup>1)</sup> Vergl. Bd. LX, S. 317; weitere Hinweise ebendaselbst.

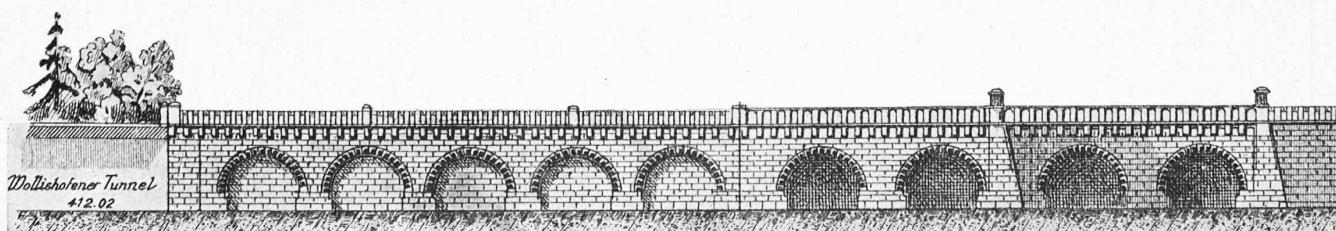


Abb. 9. Längsschnitt durch das Südende der Station Enge, Ansicht der Sihltalbahn-Einmündung unter der verlegten Grüttistrasse (vergl. Abb. 8, S. 276). — 1:500.