

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 63/64 (1914)  
**Heft:** 18

**Artikel:** Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern  
**Autor:** Stodola, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31458>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern. — Wettbewerb für die Ueberbauung des Berneck- und Dreilinden-Gebietes in St. Gallen. — Miscellanea: Das Tata-Kraftwerk bei Khopoli (Indien). Einheitliche Regelung des Schiedsgerichtswesens. Simplon-Tunnel II. Wasserwirtschaftliche Auskunftsstelle für Deutschland. Schmalspurbahn Thusis-Andeer-Mesocco. Der XIII. Tag für Denkmalpflege Augsburg 1914. Die badische Jubiläums-Ausstellung Karlsruhe 1915. Schiffahrt auf dem

Oberrhein. Mont d'Or-Tunnel. Die Belastungsprobe der verstärkten Kirchenfeldbrücke in Bern. — Konkurrenz: Stadthaus in Solothurn. — Nekrologie: François Delisle-Julius Stizenberger. — Literatur: Handbuch der Architektur. Handbuch für Eisenbetonbau. Literarische Neuigkeiten. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Gesellschaft ehemaliger Studierender: Stellenvermittlung. — Submissions-Anzeiger.

## Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern.

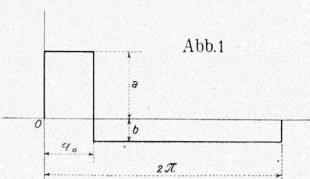
Von Professor A. Stodola, Zürich.

Die Schwierigkeiten der sogenannten kritischen Umlaufzahl sind bekanntlich vom praktischen Turbinenbau durch immer sorgfältigere Auswuchtung der rotierenden Teile in so weitgehendem Masse überwunden worden, dass ein Uebergang über den kritischen Wert der Geschwindigkeit stellenweise ohne jede wahrnehmbare Erschütterung vor sich geht, ja, dass Turbinen schon dauernd auf der kritischen Drehzahl in Betrieb erhalten werden konnten. Mit der Steigerung der Einheitsgrösse und der fortschreitenden Erhöhung der Umlaufzahlen hat sich indessen hin und wieder eine andere Störung rein dynamischer Natur eingestellt, indem die Laufrad-Scheiben quer zur Achse in Schwingung geraten. Die Auslenkungen können so erheblich werden, dass der Scheibenrand an den festen Scheidewänden zum Streifen kommt. Dass hierbei die streifenden Teile im Nu auf Gluttemperatur erhitzt werden und ein gefährlicher Zustand eintritt, ist selbstverständlich. Nachdem neuerdings auf dem europäischen Festland die Dampfturbinenbau-Firmen mindestens als erste Turbinenstufe sozusagen ausnahmslos ein Scheibenlaufrad zu verwenden pflegen, erhält die Frage nach dem Grund der Schwingungen und ihren kritischen Werten ein allgemeines praktisches Interesse.

Den Hauptgrund für die Entstehung der Schwingungen bildet die teilweise Beaufschlagung oder Fehler in der Ausführung, wenn z. B. der Dampf an gewissen Stellen periodisch gegen den Radkranz oder die Bandage stösst. Die Axialkräfte dieser Strahlsplitter und selbst der gesamte axiale Schub in einem teilweise beaufschlagten Segment eines Rades sind indessen so klein, dass sie an sich keine gefährliche Auslenkung des Rades bewirken könnten. Eine Gefahr besteht nur dann, wenn die Periode der Kraftwirkung zusammenfällt mit einer der möglichen Eigenschwingungszahlen des Rades, d. h. wenn *Resonanz* vorhanden ist.

### I. Die Periode der Kraftwirkung.

Es sei der ungünstigste Fall vorausgesetzt, dass die Beaufschlagung auf einem Bogen vom Zentriwinkel  $\varphi_0$  stattfindet, während der Winkel  $2\pi - \varphi_0$  frei bleibt. Ist die axiale Kraft auf die Winkeleinheit bezogen  $a_0$ , so ist ihr Mittelwert auf den ganzen Umfang bezogen  $a_m = a_0 \cdot \varphi_0 : 2\pi$ , und man kann die Kraftwirkung zerlegen in den konstanten Bestandteil  $a_m$ , der der Scheibe eine unmerklich kleine und unveränderliche Biegung erteilt und gemäss Abbildung 1 in einen periodischen Bestandteil  $+a$  für den Winkel  $\varphi_0$  und  $-b$  für den Winkel  $2\pi - \varphi_0$ , wobei  $a \varphi_0 = (2\pi - \varphi_0) b$  sein



muss (und  $b = a_m$  ist). Drücken wir diese aus zwei Geraden bestehende Funktion nach den Regeln der Infinitesimalrechnung durch eine Fourriersche Reihe aus, so erhalten wir:

$$f(\varphi) = \frac{2b}{\varphi_0} \left[ \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \dots \right] - \sin(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{3} \sin 3(\varphi - \varphi_0) - \dots$$

Betrachten wir nun einen Punkt des Scheibenumfangs, der zur Zeit  $t = 0$  auf demjenigen Halbmesser liegt, der im Sinne der Drehung um den festen Winkel  $\varphi$  gegen den Anfang des Zeitsegmentes geneigt ist. Dieser Halbmesser wird zur Zeit  $t$  den Winkel  $\varphi + \omega t$  mit der Anfangslage bilden, wo  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Demnach ist die axiale Kraft, die auf jenen Punkt wirkt

$$f(\varphi + \omega t) = \frac{2b}{\varphi_0} \left[ \sin(\varphi + \omega t) + \frac{1}{2} \sin 2(\varphi + \omega t) + \dots - \sin(\varphi + \omega t - \varphi_0) - \frac{1}{2} \sin 2(\varphi + \omega t - \varphi_0) - \dots \right]$$

Lösen wir das allgemeine Glied auf als  $\sin k(\varphi + \omega t) = \sin k\varphi \cdot \cos k\omega t + \cos k\varphi \sin k\omega t$ , so erkennen wir (da  $\varphi$  hier einen Festwert bedeutet, der den betreffenden Umfangspunkt kennzeichnet), dass die von diesem Gliede stammende Teilkraft aus zwei mit der Zeit periodisch wechselnden, stehenden Feldern besteht, deren Summe das in Wahrheit rotierende Kraftfeld ausmacht.

Das ganze Kraftfeld setzt sich aus einer Summe von Gliedern zusammen, in welchen  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sin 2\omega t$ ,  $\cos 2\omega t$ ,  $\sin 3\omega t$ ,  $\cos 3\omega t$  ... die Faktoren sind. Die sekundlichen Schwingungszahlen der Kraftwirkung sind also  $\frac{\omega}{2\pi}, \frac{2\omega}{2\pi}, \frac{3\omega}{2\pi}, \dots$ . Diejenige davon, welche mit einer natürlichen Eigenschwingung zusammenfällt, wird gesteigert und ruft Resonanz hervor. Die nächste Aufgabe besteht daher in der Ermittlung der Eigenschwingungszahlen der Turbinenscheiben.

### II. Die Kirchhoff'schen Ergebnisse.

Ueber die Eigenschwingungen einer kreisrunden Platte liegt eine klassische Untersuchung vor von Kirchhoff in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, 40. Band, 1850, Seite 51 u. f., über die er abgekürzt in seiner „Mechanik“, zweite Auflage, Seite 460 u. f. berichtet. Kirchhoff findet für die Zahl der Vollschwingungen in der Sekunde die Formel

$$N_{sek} = \beta \frac{h'}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \dots \dots \dots \quad 1$$

worin  $\beta$  die aus nachstehender Zahlentafel zu entnehmende Beizahl,  
 $R$  den Halbmesser der Scheibe,  
 $h'$  die halbe Dicke der Scheibe,  
 $E$  den Elastizitätsmodulus,  
 $\mu$  die Masse der Volumeneinheit bedeuten (Einheiten beliebig, z. B. für  $kg$ ,  $cm$ ,  $sek$  ist für Stahl  $E = 2200000$ ;  $\mu \approx 8 \cdot 10^{-6}$ ).

Die Scheiben schwingen so, dass sich entweder eine Anzahl gleicher Winkel einschliessender Durchmesser oder einige konzentrische Kreise oder beide zugleich als Knotenlinien ausbilden. Diesen „Klangfiguren“ entsprechend erhält die Beizahl  $\beta$  folgende Werte:

#### Zahlentafel 1. Die Beizahl $\beta$ .

| Anzahl der Knotendurchmesser $k =$ | 0      | 1     | 2      | 3      |
|------------------------------------|--------|-------|--------|--------|
| Anzahl der Knotenkreise 0          | —      | —     | 0,5114 | 1,1902 |
| 1                                  | 0,8840 | 1,998 | 3,432  | 5,153  |
| 2                                  | 3,751  | 5,830 | —      | —      |

Hierbei ist das Verhältnis der Knotenkreis-Halbmesser zum Halbmesser der Scheibe das folgende:

Zahlentafel 2. Knotenkreis-Halbmesser.

| Anzahl der Knoten-Durchmesser | Anzahl der Knotenkreise | Halbmesser-Verhältnis |
|-------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 0                             | 1                       | 0,679                 |
| 1                             | 1                       | 0,781                 |
| 1                             | 2                       | 0,497                 |
| 2                             | 1                       | 0,870                 |
| 3                             | 1                       | 0,82                  |
|                               |                         | 0,85                  |

Für den praktisch wichtigsten Fall, dass zwei Knotendurchmesser ohne Knotenkreis auftreten, erhält man hier nach für verschiedene Scheibendurchmesser und -Stärken folgende Zusammenstellung (auf die Minute bezogen):

Zahlentafel 3.  
Minutliche Schwingungszahlen bei zwei Knotendurchmessern.

| Ganze Scheibendicke in mm zu $h' =$ | 3   | 6   | 10  | 15   | 20   | 30   | 60   |      |
|-------------------------------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| Scheiben-Durchmesser in mm          | 700 | 492 | 984 | 1640 | 2460 | 3280 | 4920 | 9840 |
| 1000                                | 241 | 482 | 805 | 1204 | 1609 | 2415 | 4830 |      |
| 1500                                | 106 | 213 | 355 | 533  | 710  | 1065 | 2130 |      |
| 2000                                | 61  | 122 | 202 | 303  | 404  | 606  | 1212 |      |
| 2500                                | 38  | 77  | 128 | 192  | 256  | 384  | 768  |      |
| 3000                                | 27  | 54  | 89  | 134  | 179  | 268  | 532  |      |

Diese Ergebnisse sind für den Turbinenbau indessen leider belanglos<sup>1)</sup>, da sie sich auf Scheiben von *unveränderlicher Dicke* beziehen und die Wirkung der *Fliehkräfte* unberücksichtigt lassen. Wir müssen daher die allgemeinen Gleichungen für das Verhalten der wirklichen Laufscheiben im Betriebe neu ableiten.

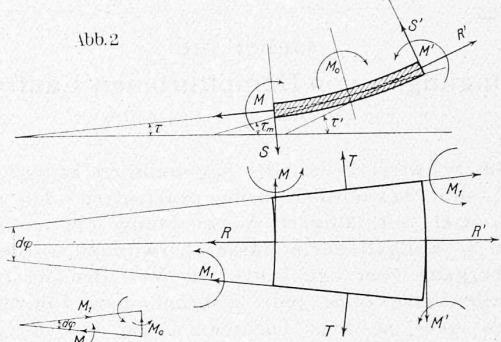
### III. Schwingungsgleichungen mit Berücksichtigung der Flieh- und Randkräfte.

Bezeichnungen:

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $x, y$                     | rechtwinklige Koordinaten.  |
| $r\varphi$                 | Polarkoordinaten in der Plattenmittelebene mit dem Mittelpunkt als Anfangspunkt.        |
| $h$                        | die Plattendicke.   |
| $h' = \frac{h}{2}$         | die halbe Plattendicke (hier unveränderlich vorausgesetzt).                             |
| $\mu = \gamma : g$         | die Masse der Raumeinheit   |
| $E$                        | der Elastizitätsmodulus.  |
| $\nu = 0,3$                | das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenausdehnung.                                |
| $E' = E : (1 - \nu^2)$     | scheinbarer Elastizitätsmodul.  |
| $R$                        | Aussenhalbmesser der Platte.  |
| $w$                        | die Auslenkung eines Plattenpunktes aus der Mittellage.                                 |
| $\omega$                   | Winkelgeschwindigkeit.  |
| $\varrho_1, \varrho_2$     | Hauptkrümmungsradien der gebogenen Mittelfläche; hier ist $\varrho_2 = \varrho_1 : r$ . |
| $\sigma_r, \sigma_t$       | radiale und tangentiale, gleichmässig verteilte Spannung für die Flächeneinheit.        |
| $\sigma_{b1}, \sigma_{b2}$ | Haupt-Biegungsspannungen.   |
| $t$                        | die Zeit in Sekunden.   |
| $w''$                      | die zweite Ableitung von $w$ nach der Zeit.   |
| $w'''', w''', w''''$       | die 1., 2., 3., 4. Ableitung von $w$ nach $r$ .   |

1) Eine Lücke in der Integrationsmethode von Kirchhoff, die bis anhin nicht bemerkt worden zu sein scheint, da auch Rayleigh die Lösungen von Kirchhoff nur in etwas anderer Form bringt, besteht insofern, als die Schwingung einer im *Mittelpunkte festgehaltenen Platte* mit seinen Integralen nicht erhalten werden kann. Es liegt dies daran, dass er a. a. O. S. 72 die mit  $X_n, Y_n$  bezeichneten partikulären Integrale ausschliesst, weil diese für  $x = 0$  unendlich werden, was allerdings nicht sein darf. Allein Kirchhoff übersieht, wie Professor Hurwitz, dem ich von dieser Sachlage Mitteilung machte, feststellt, dass durch geeignete Verbindung der partikulären Integrale die Schwierigkeit umgangen werden kann. Es ist nämlich leicht einzusehen, dass in einem Integral von der Form  $u = A X + B Y + C (X - Y)$  beispielsweise für  $n = 0$  das Glied mit dem einfachen  $\log x$  herausfällt und nur noch Glieder wie  $x^2 \log x, \dots$  usw.) bleiben, die bei  $x = 0$  nicht mehr unendlich werden (Die Spannungen würden bei Punktstützung begreiflicherweise doch unendlich gross werden). Doch dürfte dieser Weg ziemlich weitschweifig sein, und da wir für das Folgende auch den Einfluss der Fliehkraft berücksichtigen müssen, würden uns die vollständigen Integrale der Kirchhoff'schen Aufgabe doch nichts nützen.

Der Kürze halber beschränken wir uns auf den Fall, dass die Ausschläge vom Winkel  $\varphi$  unabhängig sind. Wir betrachten ein Scheibenelement, Abbildung 2, welches durch zwei axiale Ebenen vom Neigungswinkel  $d\varphi$  und zwei Zylinderflächen vom Halbmesser  $r$  und  $r + dr$  begrenzt ist.



Die Neigung der Tangente an den Meridian der verbogenen Scheibe im Abstand  $r$  sei  $\tau$ , im Abstand  $r + dr$   $\tau'$  und im Abstand  $r + \frac{dr}{2}$   $\tau_m$ . Die wirkenden Kräfte sind: radial  $R$  und  $R'$ , in Richtung des Breitenkreises  $T$ , senkrecht zur Mittelfläche  $S$  und  $S'$ ; die Fliehkraft sei  $F$ , die Biegungsmomente in den zylindrischen Begrenzungsfächen  $M$  und  $M'$ , im Meridianschnitt  $M_1$ . Diese Kräfte werden durch folgende Ausdrücke dargestellt:

$$R = r d\varphi h \sigma_r, \quad R' = r' d\varphi h \sigma'_r, \\ T = dr h \sigma_r, \quad F = (r d\varphi dr h \mu) r \omega^2.$$

Im Abschnitt V leiten wir für die Momente folgende Formeln ab:

$$M = \frac{J}{e} \sigma_{b1} = J E' \left[ \frac{1}{\varrho_1} + \frac{r}{\varrho_2} \right] = \frac{1}{12} r d\varphi h^3 E' \left( w'' + r \frac{w'}{r} \right) \quad (2)$$

$$M_1 = \frac{J_1}{e} \sigma_{b2} = J_1 E' \left[ \frac{r}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right] = \frac{1}{12} dr h^3 E' \left( r w'' + \frac{w'}{r} \right)$$

$$M_o = M_1 d\varphi$$

Das Gleichgewicht dieser Kräfte und Momente wird durch folgende Gleichungen ausgesprochen:

In Richtung der Tangente:

$$R' - R - T d\varphi + F = 0 \quad (3a)$$

In Richtung der Normale:

$$R'(\tau' - \tau_m) + R(\tau_m - \tau) + S' - S + (T d\varphi - F) - dm w''' = 0$$

oder wegen 3a

$$d(R\tau) + dS = dm w''' \quad (3b)$$

Für die Momente mit  $M' - M = dM$ :

$$dM - M_o + S dr = 0 \quad (3c)$$

Daraus folgt

$$dS = - \frac{d^2 M}{dr^2} dr + \frac{dM_1}{dr} d\varphi \quad (4)$$

und wenn man diesen Wert sowie  $dm = r d\varphi dr h \mu$  und die Ausdrücke (2) in Gleich. (3) einsetzt, so ergibt sich

$$\frac{E' h^2}{12} \left[ w''' + 2 \frac{w'''}{r} - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} \right] = \sigma_r \left( w'' + \frac{w'}{r} \right) - w''' \mu + w' \frac{d\sigma_r}{dt} \quad (5)$$

Bei einer einfachen Schwingung kann man setzen

$$w = u \cos \lambda t \quad (6)$$

wo  $u$  nur von  $r$  abhängt. Wir führen noch die Bezeichnungen

$$x = \frac{r}{R}, \quad a = \frac{12 \sigma_r R^2}{E' h^2}, \quad \beta = \frac{12 \mu \lambda^2 R^4}{E' h^2} \quad (7)$$

ein, sodass Gleich. 5 geschrieben werden kann:

$$u'''' + 2 \frac{u''''}{x} - \frac{u''}{x^2} + \frac{u'}{x^3} = a \left( u'' + \frac{u'}{x} \right) + \beta u + \frac{12 R^2}{E' h^2} u' \frac{d\sigma_r}{dx} \quad (8)$$

worin alle Ableitungen nun nach  $x$  statt nach  $r$  gemeint sind. Handelt es sich um eine volle Platte von überall gleicher Dicke und einem freien Rand, die mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert, so ist bekanntlich

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \mu \omega^2 (R^2 - r^2) \quad \dots \quad 9$$

welcher Wert in Gleich. (8) und in  $a$  einzuführen ist.

Zum Zwecke der Integration der so gewonnenen vollständigen Differentialgleichung sind Reihenansätze zu verwenden, die wir zunächst für den

$$\text{Sonderfall } \sigma_r = \sigma_t = \text{konst.} = \sigma$$

aufstellen wollen. Diese Belastungsart bedeutet, dass keine Fliehkraft vorhanden ist, statt dessen am Rande der Scheibe eine überall gleiche Radialspannung angreift. Der Ansatz

$$u = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots \quad 10$$

genügt der Forderung, dass für  $x = 0$   $du : dx = 0$  sein muss. Die Bestimmung der Koeffizienten durch Einführung in Gleich. 8 liefert:

$$u = a_0 \left[ 1 + \frac{\beta}{(2 \cdot 4)^2} x^4 + \frac{\alpha \beta}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} x^6 + \frac{\beta(\alpha^2 + \beta)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} x^8 + \dots \right] \\ + a_2 \left[ x^2 + \frac{\alpha}{4^2} x^4 + \frac{\alpha^2 + \beta}{(4 \cdot 6)^2} x^6 + \frac{(\alpha^3 + 2\alpha\beta)}{(4 \cdot 6 \cdot 8)^2} x^8 + \dots \right] \quad 11$$

Nehmen wir nun an, die Platte sei am Rand so *eingespannt*, dass die Tangente dort horizontal bleibt, so genügt dies Integral mit zwei Konstanten bereits, da wir nur zwei Randbedingungen zu erfüllen haben, nämlich

- 1) die Auslenkung  $u = 0$  für  $r = R$ , d. h.  $x = 1$
- 2) die Neigung der Tangente  $u' = 0$  für  $r = R$ , d. h.  $x = 1$ .

Bezeichnen wir die Werte der beiden Reihen im Ausdruck von  $u$  bei  $x = 1$  mit  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  und ebenso mit  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  die Werte der Faktoren von  $a_0$   $a_2$  in der zu bildenden Ableitung von  $u$  für  $x = 1$ , so lauten die Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} a_0 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 &= 0 \\ a_0 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \quad 12$$

aus welchen die Konstanten  $a_0$   $a_2$  zu bestimmen wären. Da die rechten Seiten = 0 sind, kann hieraus nur das Verhältnis  $a_0 : a_2$  ermittelt werden, welches in beiden Gleichungen dasselbe sein muss und auf die Bedingung

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\Psi_1}{\Psi_2} \text{ oder } \Delta = \Phi_1 \Psi_2 - \Phi_2 \Psi_1 = 0 \quad \dots \quad 13$$

führt, d. h. das Verschwinden der Determinante  $\Delta$  fordert. Diese Determinante enthält die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ , welche ihrerseits durch die Dimensionen der Scheibe und insbesondere  $\sigma$  und  $\lambda^2$  gemäß Gleich. (7) ausgedrückt sind. Es kann also aus  $\Delta = 0$  eine unbekannte, in unserem Falle  $\lambda^2$  bestimmt werden. Dann ist die Schwingungszahl in der Sekunde

$$N_{\text{sek}} = \frac{\lambda}{2\pi}, \text{ in der Minute } N_{\text{min}} = \frac{60\lambda}{2\pi} \quad \dots \quad 13a$$

Im *allgemeinen Fall der rotierenden Scheibe* lautet die Differentialgleichung

$$u''' + \frac{2u'''}{x} - \frac{u''}{x^2} + \frac{u'}{x^3} - a(1-x^2)u'' - a(1-3x^2)\frac{u'}{x} - \beta u = 0 \quad 14$$

worin  $a = \frac{12(3+\nu)}{8} \frac{\mu \omega^2 R^4}{E^2 h^2}$ ,  $\beta = \frac{12 \mu \lambda^2 R^4}{E^2 h^2}$  bedeuten.

Der Ansatz 10 liefert das gleiche Ergebnis wie Ausdruck 11, welchen wir mit  $u_1$  bezeichnen wollen, doch ist darin die Konstante  $a_0 = 0$  zu setzen, da hier der Mittelpunkt der Scheibe festgehalten ist, also für  $r = 0$  auch  $u = 0$  sein muss. Da die eine willkürliche Konstante  $a_2$  nicht genügt, muss ein weiteres Integral gesucht werden, was durch den Ansatz

$$u_2 = A \lg x + B \quad \dots \quad 15$$

gelingt, wo  $A$  die in  $u_1$  auftretende Reihe ist und für  $B$  der Ansatz

$$B = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots \quad 15a$$

zu benutzen ist. Nachdem man durch Einsetzen in Gleich. 14 die Koeffizienten  $b$  bestimmt hat, kann man das allgemeine Integral besser aus den partikulären Integralen  $u_1$  (mit  $a_2 = 1$ ) und  $u_2$  wie folgt zusammensetzen:

$$u = c_1 A + c_2 [A \lg x + B] \quad \dots \quad 16$$

Die beiden willkürlichen Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  genügen, weil auch hier nur zwei Randbedingungen zu erfüllen sind, nämlich:

1. Der Rand ist frei von Biegungsspannungen, also muss gemäß Gleich. (1)  $\sigma_{b_1} = 0$  oder

$$u'' + \nu \frac{u'}{x} = 0, \quad \text{für } x = 1 \quad \dots \quad 17$$

2. Der Rand ist frei von Schubspannungen, d. h.  $S = 0$  oder mit Rücksicht auf Gleich. (4)

$$+\frac{dM}{dr} - M_1 \frac{dq}{dr} = 0$$

$$\text{oder } \frac{d}{dr} r \left( w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) - \left( \nu w'' + \frac{w'}{r} \right) = 0$$

was nach kleiner Umrechnung auf

$$r \frac{d}{dr} \left( u'' + \frac{w'}{r} \right) = 0$$

und endlich mit Einführung von  $u$  und  $x$  zur Bedingung führt:

$$\frac{d}{dx} \left( u'' + \frac{u'}{x} \right) = 0, \quad \text{für } x = 1 \quad \dots \quad 18$$

Das Ergebnis der Rechnung wird sich in der Form

$$C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 = 0$$

$$C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 = 0$$

darstellen und so wird wieder die Gleichung

$$\Delta = \Phi_1 \Psi_2 - \Phi_2 \Psi_1 = 0$$

zur Bestimmung von  $\lambda^2$  dienen. Die Ermittlung kann natürlich nur auf dem Wege des Probierens vor sich gehen.

Wir benutzen diese Methode, um die nachfolgend beschriebenen vereinfachten Verfahren zu kontrollieren. Für den Fall einer Randkraft allein, wobei der Rand der Scheibe die Mittelebene stets berührt, erhält man die Werte

$$\lambda^2 = 15,83 \frac{E^2 h^2}{u R^4}$$

bei einer Randspannung von

$$\sigma = 0,833 \frac{E^2 h^2}{k^2} \text{ kg/cm}^2$$

Die Rechnung im allgemeinen Falle führt auf so verwickelte Ausdrücke, und die Zwischenergebnisse müssen auf so viele Stellen genau sein, damit im Endergebnis keine starken Abweichungen auftreten, dass man gezwungen ist, nach Näherungsmethoden zu suchen. Als solche bieten sich dar die Verfahren von Ritz und Rayleigh.

#### IV. Näherungsverfahren von Ritz.

Das Verfahren von Ritz<sup>1)</sup> beruht auf dem bekannten Lehrsatz der Mechanik, dass die *potentielle Energie eines abgeschlossenen, sich im Gleichgewichte befindlichen Systems einen extremen Wert besitzt, für den Fall stabilen Gleichgewichts insbesondere ein Minimum ist*.

Erleidet nämlich das System eine kleine Verschiebung, so muss die Zunahme der Energie der inneren (elastischen) Kräfte  $\delta \Phi_i$  der Arbeit  $\delta L_a$  gleich sein, welche die äusseren Kräfte leisten. Allein  $\delta L_a$  ist die *Abnahme* der potentiellen Energie der äusseren Kräfte  $-\delta \Phi_a$  und so erhält man  $\delta \Phi_i = -\delta \Phi_a$  oder wenn

$$\delta \Phi = \Phi_i + \Phi_a \quad \dots \quad 19$$

die gesamte Energie bedeutet,

$$\delta \Phi = 0 \quad \dots \quad 20$$

womit der erste Teil des Satzes, auf den es uns ankommt, bewiesen ist. Die potentielle Energie  $\Phi_a$  kann man, wie besonders von Kármán klar auseinandergesetzt hat<sup>2)</sup>, entweder mit den wirklichen Werten der Kräfte rechnen oder mit denjenigen unveränderlichen Werten, welche sie in der Lage des eingetretenen Gleichgewichtes besitzen. Denn in der Gleich. 20 kommt nur das Differential  $\delta \Phi_a$  vor, und dieses ist für eine einzelne Kraft  $= -Q dy$ , ob sie veränderlich oder konstant ist. Wächst die Kraft mit der Einsenkung  $y$  proportionell, so ist nämlich

$$\begin{aligned} \Phi_a &= - \int Q dy = - \int a y dy = - \frac{1}{2} a y^2 + \text{konst.} \\ &= - \frac{1}{2} Q y + \text{konst.} \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\delta \Phi_a = - a y \delta y = - Q \delta y.$$

<sup>1)</sup> Crelles Journal 1908. Dieses Verfahren hat durch die Arbeiten von v. Kármán (Zeitschrift des Ver. deutscher Ingenieure, 1911, Seite 1889), Pöschl (Armierter Beton, 1912) und Lorenz (Zeitschrift des Ver. deutscher Ingenieure, 1913, Seite 543) hervorragende Bedeutung gewonnen. Die Anwendung auf Scheibenschwingungen veranlasst uns, auf die Ableitung des Verfahrens näher einzugehen, da sich zeigt, dass man bei der Benutzung der verschiedenen Formen der potentiellen Energie der äussern Kräfte mit grosser Vorsicht zu Werke gehen muss.

<sup>2)</sup> Physikalische Zeitschr. 1913, Seite 253 u. f.

Ist  $Q$  konstant, so ist  $\Phi_a = -Qy + \text{konst.}$   
beziehungsweise  $\Phi_a = -\sum Qy + \text{konst.}$   
und beide Werte  $\Phi_a$  können im allgemeinen in Gleich. 19 benutzt werden.

Anderseits ist es in der Anwendung auf das Ritz'sche Verfahren keineswegs gleichgültig, welchen Ausdruck von  $\Phi_a$  man wählt, wie aus Nachfolgendem hervorgeht.

Wirkt auf die Platte der konstante spezifische Normaldruck  $p$  (positiv im Sinne der positiven Auslenkung  $w$ ), so ist die äussere potentielle Energie

$$\Phi_a = - \int wp \, df \quad \dots \dots \dots \quad 21$$

ausgedehnt über die Plattenfläche. Die innere Energie, d. h. die Formänderungsarbeit ist, wie wir in Abschnitt IV nachweisen, für rechtwinklige Koordinaten

$$\Phi_i = \int \frac{E' h^3}{3} \left[ (w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2) \right] dx dy \quad 22$$

Man kann die Summe von  $\Phi_a$  und  $\Phi_i$  darstellen als

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_a = \iint F(x, y, w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, p) dx dy \quad \dots \dots \dots \quad 23$$

Damit dieses bestimmte Integral einen ausgerechneten Wert annehme, ist, wie die Variationsrechnung lehrt, die Funktion  $w$  so zu wählen, dass sie der Differentialgleichung  $\dots \dots \dots \quad 24$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = 0$$

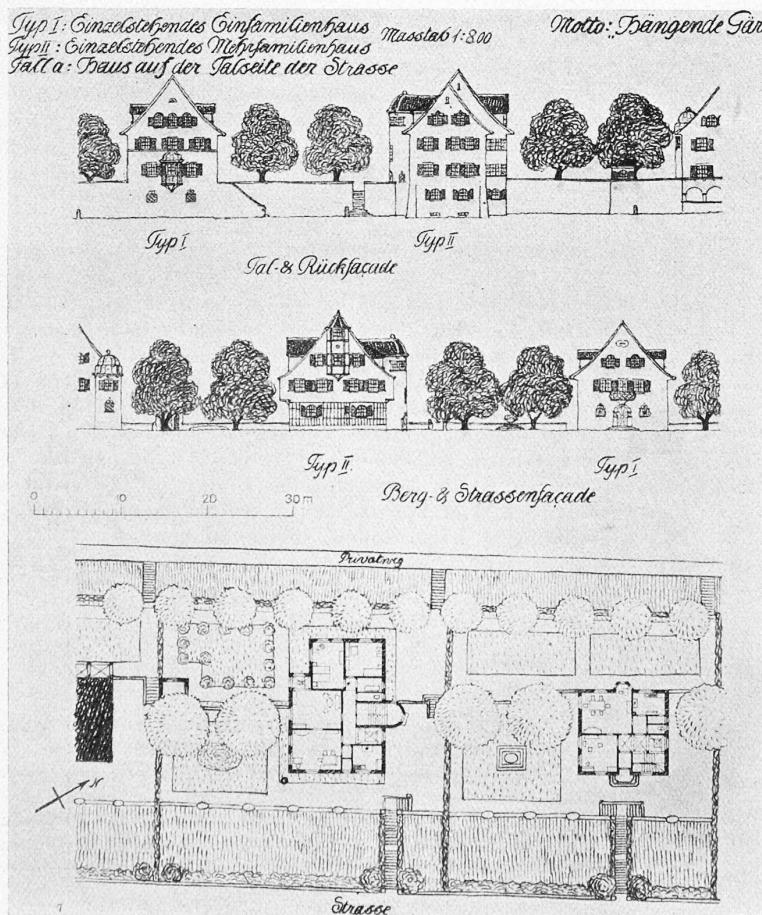
und den besonderen Bedingungen, die für den Plattenrand gelten, genügt. Führt man diese Differentiation aus, so erhält man

$$\frac{E' h^3}{3} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = p \quad \dots \dots \dots \quad 25$$

die wohlbekannte Differentialgleichung der Plattenbiegung.

Hier ist nun zunächst einer Klippe in der Original-Abhandlung von Ritz zu gedenken, indem Ritz als Ausdruck von  $\Phi_i$  nicht Formel 22 benutzt, sondern die mit  $2(1-\nu)$  multiplizierten Glieder weglässt. Es ist nach Ritz

$$\Phi = \iint \left\{ \frac{E' h^3}{3} (w_{xx} + w_{yy})^2 - p w \right\} dx dy \quad \dots \dots \dots \quad 26$$



zu einem Minimum zu machen. Führt man die Operation 24 an diesem  $\Phi$  durch, so gelangt man wohl wieder zu der richtigen Differentialgleichung 25 und so könnte es scheinen, als ob es überflüssig wäre, sich mit dem verwickelten Ausdruck 22 abzugeben. Allein die Sache ändert sich, wenn man mit Ritz an Stelle von  $w$  einen Ausdruck

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots \dots \dots \quad 27$$

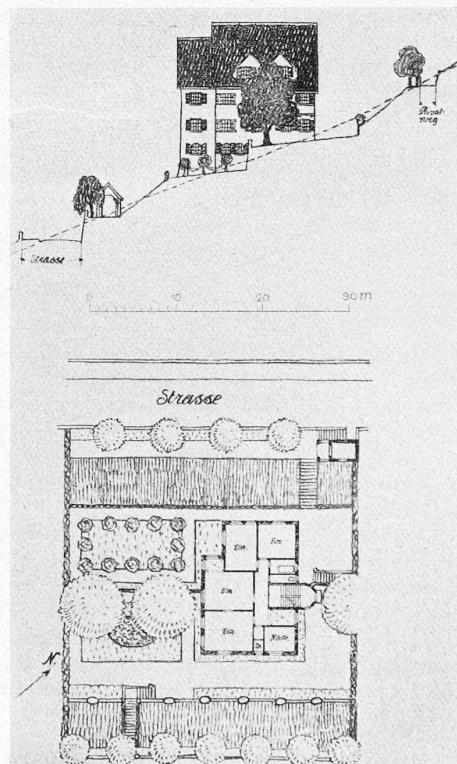
einsetzt, wo  $a_1, a_2, \dots$  konstante,  $w_1, w_2, \dots$  bekannte, sonst willkürliche Funktionen von  $x, y$  sind, die aber den Grenzbedingungen genügen sollen, und wenn man die Bedingungen für die aufstellt, damit  $\Phi$  ein Minimum gewöhnlicher Art werde. In diesem Fall ist die Vernachlässigung des erwähnten Ausdruckes nur dann zulässig, wenn das ihm entsprechende Teilstück  $\iint (w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) dx dy$  den Zahlenwert null liefert. Nun ist der Klammerausdruck nichts anderes als das Krümmungsmass  $1/q_1 q_2$  und das Integral

$$\int \frac{dx dy}{q_1 q_2}$$

die Gesamtkrümmung der Plattenmittelfläche. Diese verschwindet nach einem Satze der Flächentheorie, wenn die Normalen den Plattenrand entlang alle untereinander parallel sind, also insbesondere für die am Rande eingespannte Platte, nicht aber für die frei schwingende Platte, wie es unsere Turbinenräder sind.

Wenn man nämlich aus der Fläche ein Element  $ds_1 ds_2$  ausschneidet, dessen Seiten den Haupt schnitten parallel sind und zu allen Randnormalen vom Mittelpunkte einer Einheitskugel Parallele zieht, so schneiden diese ein Element  $d\sigma_1 d\sigma_2$  aus, sodass  $d\sigma_1 = ds_1/q_1$  und  $d\sigma_2 = ds_2/q_2$ , daher der Inhalt  $d\sigma_1 \cdot d\sigma_2 = ds_1 ds_2 : q_1 q_2$  wird. Die Summe der Flächenelemente auf der Einheitskugel ist also die Gesamtkrümmung, und diese Summe ist offenbar null, wenn die Randnormalen der Flächen untereinander parallel sind.

Der Uebergang zur schwingenden Bewegung wird vollzogen, indem man die Trägheitskräfte als Belastung



Einzelstehendes Mehrfamilienhaus, — 1:800.

Fall b: an der Bergseite der Strasse.

Haustypen zum Entwurf „Hängende Gärten“.

Architekten E. von Ziegler & Balmer, St. Gallen.

einführt und die Scheibenform als statischen Gleichgewichtszustand dieser Belastung und der äussern Kräfte ansieht. Für die einfache Cosinusschwingung wird

$$w = v \cos \lambda t$$

zu setzen sein und es wird die Trägheitskraft für die Flächeneinheit

$$p = -m_1 w'' = 2 h' \mu \lambda^2 v \cos \lambda t \dots \dots \dots 28$$

Würden wir nun

$$\Phi_a = - \int w p \, df = - \int 2 h' \mu \lambda^2 v^2 \cos^2 \lambda t \, df \dots \dots \dots 29$$

setzen, so würde die Variationsbedingung 24 zu *einem unrichtigen Resultat* führen. In Gleich. 23 wird nämlich  $p$  als von  $w$  unabhängig behandelt; man würde also zum richtigen Ergebnis gelangen, wenn man in 29 nur das eine  $v$  in  $v^2$  als variabel betrachten würde, was aber unzulässig ist, oder dann müsste man auch die Ableitung nach  $p$  bilden. Die einfachste Abhilfe ist, hier, wo  $p$  nach Gleich. 28 als dem  $v$  proportional zu gelten hat (da für die betreffende „Gleichgewichtslage“  $t$  konstant zu halten ist), den *wahren Wert* der potentiellen Energie

$$\Phi_a = - \int \frac{1}{2} p w \, df = - \int h' \mu \lambda^2 v^2 \cos^2 \lambda t \, df \dots \dots \dots 30$$

einzuführen, worauf die Variationsbedingung die Gleichung

$$\frac{E' h^3}{3} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = -m_1 w'' \dots \dots \dots 31$$

liefert, wie sein soll.

Es bedeutet dies in der Bezeichnung von Lorenz (Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1913, Seite 543) mit

$$\Phi_i = L_i \text{ und}$$

$$\Phi_a = -L_a = -\frac{1}{2} \sum Qy,$$

dass hier  $J = L_i - L_a$  ein Minimum zu sein habe. Man vermeidet also alle Missverständnisse am besten, wenn man sich an den allgemeinen Satz hält, dass die gesamte potentielle Energie des Systems ein Minimum sein muss, und wenn man für die potentielle Energie der äussern Kräfte ihren *wahren Wert* einführt.

Um die *Wirkung der Fliehkräfte* zu berücksichtigen, müsste vorerst ein Ausdruck für die Arbeit der Fliehkräfte, also für ihre potentielle Energie  $F_0$  während der Schwingung aufgestellt werden, was im nächsten Abschnitt erläutert wird.

Ist auf diese Weise der vollständige Ausdruck von  $\Phi$  als Funktion der Grössen  $a_1, a_2, \dots$  gebildet, so müssen wie beim gewöhnlichen Minimum die Ableitungen

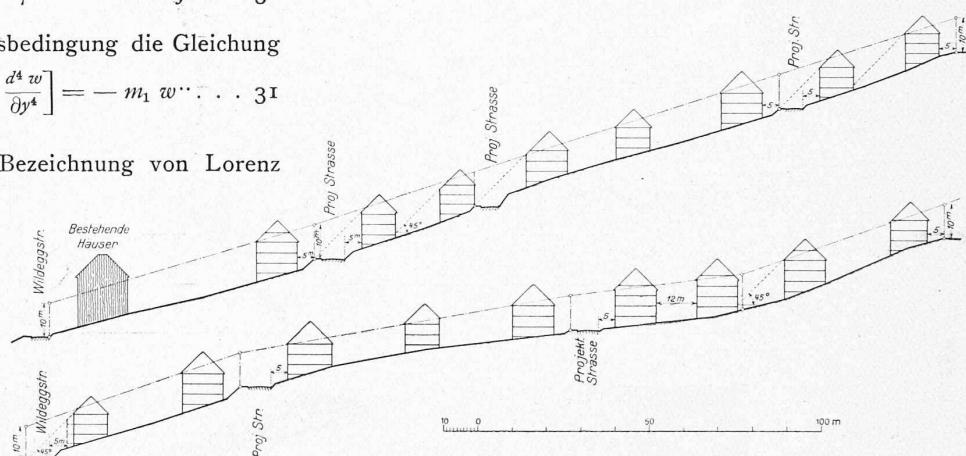
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0 \dots \dots \dots 32$$

verschwinden. Setzt man die Determinante des Koefizienten dieses homogenen linearen Gleichungssystems = null, so liefern deren Wurzeln die Werte von  $\lambda^2$ . Der kleinste entspricht der tiefsten Schwingung. Ein Beispiel der Anwendung dieses Verfahrens bringen wir im Abschnitt über den Einfluss der Nabenhöhrung. (Schluss folgt.)

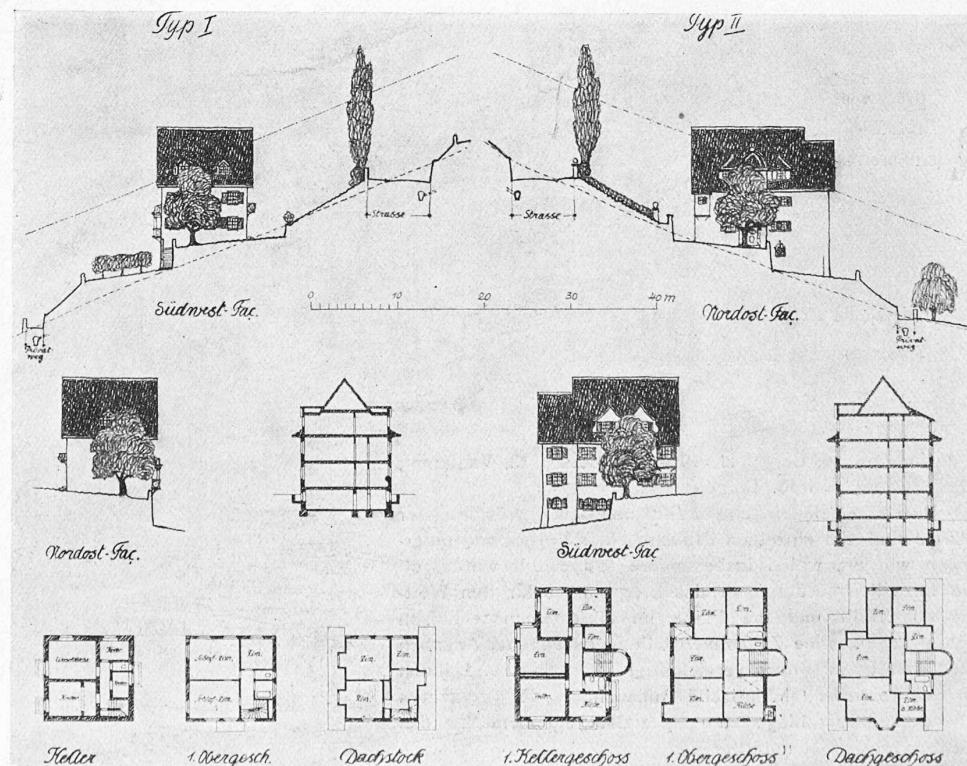
## Wettbewerb für die Ueberbauung des Berneck- und Dreilinden-Gebietes in St. Gallen.

Mit dem „Bericht des Preisgerichts“ verbinden wir auf diesen und den folgenden Seiten die Wiedergabe einiger wichtiger Pläne der beiden an I. und II. Stelle prämierten Entwürfe „Hängende Gärten“ und „Nordhang II“. Die Veröffentlichung der beiden andern prämierten Projekte „Kronberg“ und „Nellus“ dagegen unterbleibt auf besondern Wunsch ihrer architektonischen Mitarbeiter. Die ausschreibende Behörde hat sich mit deren Weglassung einverstanden erklärt, da die beiden Entwürfe von untergeordnetem praktischem Werte sind, wie auch aus ihrer Beurteilung durch das Preisgericht hervorgeht.

Bezüglich der Wettbewerbs-Aufgabe verweisen wir auf deren einlässliche Erläuterung mit Uebersichtsplan in Band 62, Seite 93. Es ist zu beachten, dass die Pläne auf den nachfolgenden Seiten 256/257 umgekehrt orientiert sind, wie jene auf den Seiten 258/259.



Profile zum Entwurf der Hochbauamtes für das Spezial-Baureglement Zone V, — 1:2000.



I. Preis „Hängende Gärten“. — Architekten E. v. Ziegler & Balmer, St. Gallen.