

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 63/64 (1914)  
**Heft:** 18

## **Inhaltsverzeichnis**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern. — Wettbewerb für die Ueberbauung des Berneck- und Dreilinden-Gebietes in St. Gallen. — Miscellanea: Das Tata-Kraftwerk bei Khopoli (Indien). Einheitliche Regelung des Schiedsgerichtswesens. Simplon-Tunnel II. Wasserwirtschaftliche Auskunftsstelle für Deutschland. Schmalspurbahn Thusis-Andeer-Mesocco. Der XIII. Tag für Denkmalspflege Augsburg 1914. Die badische Jubiläums-Ausstellung Karlsruhe 1915. Schifffahrt auf dem

Oberrhein. Mont d'Or-Tunnel. Die Belastungsprobe der verstärkten Kirchenfeldbrücke in Bern. — Konkurrenzen: Stadthaus in Solothurn. — Nekrologie: François Delisle-Julius Stizenberger. — Literatur: Handbuch der Architektur. Handbuch für Eisenbetonbau. Literarische Neuigkeiten. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Gesellschaft ehemaliger Studierender: Stellenvermittlung. — Submissions-Anzeiger.

Band 63.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 18.

## Ueber die Schwingungen von Dampfturbinen-Laufrädern.

Von Professor A. Stodola, Zürich.

Die Schwierigkeiten der sogenannten kritischen Umlaufzahl sind bekanntlich vom praktischen Turbinenbau durch immer sorgfältigere Auswuchtung der rotierenden Teile in so weitgehendem Masse überwunden worden, dass ein Uebergang über den kritischen Wert der Geschwindigkeit stellenweise ohne jede wahrnehmbare Erschütterung vor sich geht, ja, dass Turbinen schon dauernd auf der kritischen Drehzahl in Betrieb erhalten werden konnten. Mit der Steigerung der Einheitsgrösse und der fortschreitenden Erhöhung der Umlaufzahlen hat sich indessen hin und wieder eine andere Störung rein dynamischer Natur eingestellt, indem die Laufrad-Scheiben quer zur Achse in Schwingung geraten. Die Auslenkungen können so erheblich werden, dass der Scheibenrand an den festen Scheidewänden zum Streifen kommt. Dass hierbei die streifenden Teile im Nu auf Gluttemperatur erhitzt werden und ein gefährdender Zustand eintritt, ist selbstverständlich. Nachdem neuerdings auf dem europäischen Festland die Dampfturbinenbau-Firmen mindestens als erste Turbinenstufe sozusagen ausnahmslos ein Scheibenlaufrad zu verwenden pflegen, erhält die Frage nach dem Grund der Schwingungen und ihren kritischen Werten ein allgemeines praktisches Interesse.

Den Hauptgrund für die Entstehung der Schwingungen bildet die teilweise Beaufschlagung oder Fehler in der Ausführung, wenn z. B. der Dampf an gewissen Stellen periodisch gegen den Radkranz oder die Bandage stösst. Die Axialkräfte dieser Strahlsplitter und selbst der gesamte axiale Schub in einem teilweise beaufschlagten Segment eines Rades sind indessen so klein, dass sie an sich keine gefährliche Auslenkung des Rades bewirken könnten. Eine Gefahr besteht nur dann, wenn die Periode der Kraftwirkung zusammenfällt mit einer der möglichen Eigenschwingungszahlen des Rades, d. h. wenn *Resonanz* vorhanden ist.

### I. Die Periode der Kraftwirkung.

Es sei der ungünstigste Fall vorausgesetzt, dass die Beaufschlagung auf einem Bogen vom Zentriwinkel  $\varphi_0$  stattfindet, während der Winkel  $2\pi - \varphi_0$  frei bleibt. Ist die axiale Kraft auf die Winkeleinheit bezogen  $a_0$ , so ist ihr Mittelwert auf den ganzen Umfang bezogen  $a_m = a_0 \varphi_0 : 2\pi$ , und man kann die Kraftwirkung zerlegen in den konstanten Bestandteil  $a_m$ , der der Scheibe eine unmerklich kleine und unveränderliche Biegung erteilt und gemäss

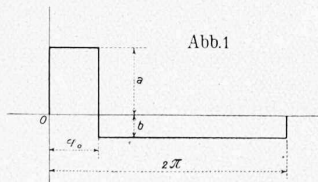


Abbildung 1 in einen periodischen Bestandteil  $+a$  für den Winkel  $\varphi_0$  und  $-b$  für den Winkel  $2\pi - \varphi_0$ , wobei  $a \varphi_0 = (2\pi - \varphi_0) b$  sein muss (und  $b = a_m$  ist). Drücken wir diese aus zwei Geraden bestehende Funktion nach den Regeln der Infinitesimalrechnung durch eine Fouriersche Reihe aus, so erhalten wir:

$$f(\varphi) = \frac{2b}{\varphi_0} \left[ \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \dots - \sin(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{3} \sin 3(\varphi - \varphi_0) - \dots \right]$$

Betrachten wir nun einen Punkt des Scheibenumfanges, der zur Zeit  $t = 0$  auf demjenigen Halbmesser liegt, der im Sinne der Drehung um den *festen* Winkel  $\varphi$  gegen den Anfang des Zeitradssegmentes geneigt ist. Dieser Halbmesser wird zur Zeit  $t$  den Winkel  $\varphi + \omega t$  mit der Anfangslage bilden, wo  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Demnach ist die axiale Kraft, die auf jenen Punkt wirkt

$$f(\varphi + \omega t) = \frac{2b}{\varphi_0} \left[ \sin(\varphi + \omega t) + \frac{1}{2} \sin 2(\varphi + \omega t) + \dots - \sin(\varphi + \omega t - \varphi_0) - \frac{1}{2} \sin 2(\varphi + \omega t - \varphi_0) - \dots \right]$$

Lösen wir das allgemeine Glied auf als  $\sin k(\varphi + \omega t) = \sin k\varphi \cdot \cos k\omega t + \cos k\varphi \sin k\omega t$ , so erkennen wir (da  $\varphi$  hier einen Festwert bedeutet, der den betreffenden Umfangspunkt kennzeichnet), dass die von diesem Gliede stammende Teilkraft aus zwei mit der Zeit periodisch wechselnden, stehenden Feldern besteht, deren Summe das in Wahrheit rotierende Kraftfeld ausmacht.

Das ganze Kraftfeld setzt sich aus einer Summe von Gliedern zusammen, in welchen  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sin 2\omega t$ ,  $\cos 2\omega t$ ,  $\sin 3\omega t$ ,  $\cos 3\omega t$  ... die Faktoren sind. Die sekundlichen Schwingungszahlen der Kraftwirkung sind also  $\frac{\omega}{2\pi}$ ,  $\frac{2\omega}{2\pi}$ ,  $\frac{3\omega}{2\pi}$  ... Diejenige davon, welche mit einer natürlichen Eigenschwingung zusammenfällt, wird gesteigert und ruft Resonanz hervor. Die nächste Aufgabe besteht daher in der Ermittlung der Eigenschwingungszahlen der Turbinenscheiben.

### II. Die Kirchhoff'schen Ergebnisse.

Ueber die Eigenschwingungen einer kreisrunden Platte liegt eine klassische Untersuchung vor von Kirchhoff in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, 40. Band, 1850, Seite 51 u. f., über die er abgekürzt in seiner „Mechanik“, zweite Auflage, Seite 460 u. f. berichtet. Kirchhoff findet für die Zahl der Vollschrwingungen in der Sekunde die Formel

$$N_{\text{sek}} = \beta \frac{h'}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \dots \dots \dots 1$$

worin  $\beta$  die aus nachstehender Zahlentafel zu entnehmende Beizahl,

$R$  den Halbmesser der Scheibe,

$h'$  die halbe Dicke der Scheibe,

$E$  den Elastizitätsmodulus,

$\mu$  die Masse der Volumeneinheit

bedeuten (Einheiten beliebig, z. B. für  $kg$ ,  $cm$ ,  $sek$  ist für Stahl  $E = 2200000$ ;  $\mu \cong 8 \cdot 10^{-6}$ ).

Die Scheiben schwingen so, dass sich entweder eine Anzahl gleiche Winkel einschliessender Durchmesser oder einige konzentrische Kreise oder beide zugleich als Knotenlinien ausbilden. Diesen „Klangfiguren“ entsprechend erhält die Beizahl  $\beta$  folgende Werte:

Zahlentafel 1. Die Beizahl  $\beta$ .

Anzahl der Knotendurchmesser $k =$	0	1	2	3
Anzahl der Knotenkreise				
0	—	—	0,5114	1,1902
1	0,8840	1,998	3,432	5,153
2	3,751	5,830	—	—

Hierbei ist das Verhältnis der Knotenkreis-Halbmesser zum Halbmesser der Scheibe das folgende: