

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 63/64 (1914)  
**Heft:** 11

**Artikel:** Ueber Triebwerkbeanspruchung bei elektrischen Lokomotiven, mit besonderer Berücksichtigung des Kurbelantriebs  
**Autor:** Kummer, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31438>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



Zwischenglieder zwischen treibender und getriebener Masse die Aufnahme einer, der Widerstandskraft  $R$  gleichen und entgegengesetzt gerichteten elastischen Uebertragungskraft  $K$  zulässt. Solange  $K$  kleiner ist als  $R$ , dient die Antriebskraft  $P$  nur zur anfänglichen Beschleunigung von  $m_1$  und zur Bildung einer zunächst noch ungenügenden Kraft  $K$ . Diese erste Periode des Anlaufvorganges bezeichnen wir in der Folge als den *Vorlauf der treibenden Masse*. Bezeichnet man mit  $\gamma$  den reduzierten Nachgiebigkeitsgrad des elastischen Gliedes und mit  $s_1$  den von der Masse  $m_1$  zurückgelegten Weg, so gilt für den Vorlauf der treibenden Masse:

$$P = m_1 \cdot \frac{d^2 s_1}{dt^2} + K = m_1 \cdot \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{s_1}{\gamma}$$

Nimmt man nun  $P$  als konstant an, was für das Antriebsschema nach Abbildung 3 unter der Voraussetzung eines Motors von konstantem Drehmoment ohne weiteres zulässig ist, so ist das Problem auf das von Pfeleiderer behandelte zurückgeführt. Im Kurbelantrieb gemäss dem Schema nach Abbildung 2 ist jedoch, wie gezeigt werden wird, immer mit periodisch wechselnder Stangenkraft zu rechnen;

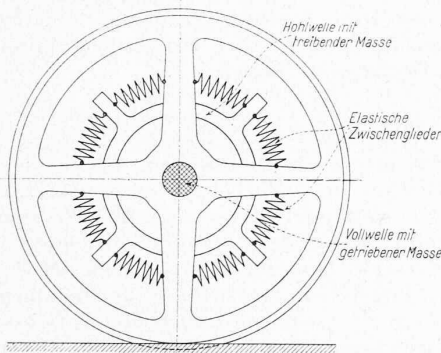


Abb. 3. Schema des Antriebs mit nur rotierenden Massen.

es kann dann der Fall gemäss Abbildung 3 als ein bezügl. Sonderfall betrachtet werden. Wir stellen aber einstweilen die weitere Behandlung der Erscheinungen des Vorlaufs zurück und behandeln vorerst grundsätzlich die nach Beendigung des Vorlaufes auftretende Erscheinung. Sobald nämlich die elastische Uebertragungskraft  $K$  so weit angewachsen ist, dass sie am einen Ende des elastischen Gliedes gleich und entgegengesetzt dem Ueberschuss von  $P$  über den Massenwiderstand von  $m_1$  und am andern Ende gleich und entgegengesetzt der Summe von  $R$  und dem Massenwiderstand von  $m_2$  geworden ist, beginnt nun der *eigentliche Anlauf der gesamten Triebwerksmassen*, wofür die Gleichungen:

$$\begin{cases} P - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} \\ R + m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} \end{cases}$$

nebeneinander bestehen müssen. Zu dem Wege  $s_1$  der Masse  $m_1$  ist also auch noch ein Weg  $s_2$  der Masse  $m_2$  hinzugekommen; die elastische Uebertragungskraft ist dabei durch:

$$K = \frac{s_1 - s_2}{\gamma}$$

dargestellt.

Nachdem wir damit die beiden Anlaufperioden, „Vorlauf der treibenden Masse“ und „Anlauf der gesamten Masse“, grundsätzlich erörtert haben, möge nunmehr die Kraftübertragung des Kurbelantriebes an sich, bezw. das Schema gemäss Abbildung 2 analytisch formuliert werden. Wie dieser Abbildung zu entnehmen ist, findet die Uebertragung einer Triebkraft  $P$  von der treibenden auf die getriebene Welle statt mittels je zweier um  $90^\circ$  versetzter Kurbeln an jeder Welle und zweier Kurbelstangen; dabei zerlegt sich die Triebkraft  $P$  in zwei zunächst unbestimmte

Stangenkräfte  $S_1$  und  $S_2$ , die jedoch zu einander in der Beziehung stehen, dass für eine Winkelstellung:

$$\omega \cdot t,$$

die durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und den Zeitpunkt  $t$  festgelegt ist, der Zusammenhang:

$$P = S_1 \sin(\omega t) + S_2 \cos(\omega t) = S$$

erfüllt sein muss. Durch Differentiation der Triebkraft  $P$ , bezw. der Gesamtstangenkraft  $S$  findet man:

$$\frac{dP}{d(\omega t)} = \frac{dS}{d(\omega t)} = \sin(\omega t) \cdot \left( \frac{dS_1}{d(\omega t)} - S_2 \right) + \cos(\omega t) \cdot \left( \frac{dS_2}{d(\omega t)} + S_1 \right)$$

Indem man zunächst ausdrücklich die vorliegende Triebkraft als konstant voraussetzt, muss:

$$\frac{dS}{d(\omega t)} = 0$$

sein. Den Sonderfall unkonstanter Triebkraft werden wir noch besonders untersuchen. Die Gleichung

$$\sin(\omega t) \cdot \left( \frac{dS_1}{d(\omega t)} - S_2 \right) + \cos(\omega t) \cdot \left( \frac{dS_2}{d(\omega t)} + S_1 \right) = 0$$

zerfällt in folgende zwei Einzelgleichungen:

$$\begin{cases} \sin \omega t \cdot \frac{dS_1}{d(\omega t)} + \cos(\omega t) \frac{dS_2}{d(\omega t)} = S' \\ -\sin(\omega t) \cdot S_2 + \cos(\omega t) S_1 = -S' \end{cases}$$

wobei  $S'$  eine unbestimmte Grösse darstellt. Mit der Bestimmungsgleichung von  $S$  vereinigt, führen diese Einzelgleichungen zur allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} S_1 &= S \sin(\omega t) - S' \cos(\omega t) \\ S_2 &= S \cos(\omega t) + S' \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Da  $S'$  unbestimmt ist, bietet das vollkommen starr angenommene Getriebe unendlich viele Möglichkeiten der Kräfteverteilung auf die beiden Kurbelstangen. Für Drehwinkel  $\omega t$  von  $45^\circ$  zu  $45^\circ$  fällt die Unbestimmtheit dahin und gilt die einfache Beziehung, die aus  $S' = 0$  gefolgert werden kann; es liegt nahe, zu vermuten, dass auch für alle übrigen Winkelstellungen durch  $S' = 0$  eine praktisch zulässige Annäherung gegeben sei. Wir können jedoch diesbezüglich die weitere Behandlung ohne Mehrarbeit ganz allgemein durchführen.

Unsere Betrachtung des Kurbelgetriebes hat uns gezeigt, dass beim Schema nach Abbildung 2 die ursprünglich konstante Triebkraft sich in zwei periodische Einzelstangenkräfte  $S_1$  und  $S_2$  auflöst, deren Mittelwert durch

$$\frac{S}{2} = \frac{P}{2}$$

dargestellt wird. Im Schema nach Abb. 3 treten an Stelle der Stangenkräfte  $S_1$  und  $S_2$ , in der vordern und hintern Kurbelstange, die Federkräfte  $S_1$  und  $S_2$  im vordern und hintern federnden Antriebsapparat auf. Diese Federkräfte müssen aber als konstante Kräfte aufgefasst werden, die unveränderlich gleich  $\frac{S}{2}$  bzw.  $\frac{P}{2}$  bleiben. Analytisch ausgedrückt ist somit das Schema gemäss Abbildung 3 der Spezialfall des allgemeineren Schemas nach Abbildung 2 für die Annahmen  $\omega = 0$  und  $S' = 0$ .

Gemäss dieser Bemerkung ist man also berechtigt, die verschiedenen Triebwerke, die für elektrische Lokomotiven in Frage kommen, auf Grund allgemeiner Annahmen zu beurteilen. Wie wir sehen werden, wird es auch möglich sein, über das Kurbeltriebwerk bei elektrischen Lokomotiven gegenüber demjenigen bei Dampflokomotiven einige Vergleiche zu ziehen.

Es genügt, die Verhältnisse in *einer* der zwei Kurbelstangen, bezw. in *einem* der zwei federnden Antriebsapparate zu betrachten. An Stelle der Betrachtung der Gesamt-Triebkraft:

$$\begin{aligned} P &= S = S_1 \sin(\omega t) + S_2 \cos(\omega t) \\ &= [S \sin(\omega t) - S' \cos(\omega t)] \sin(\omega t) + \\ &\quad + [S \cos(\omega t) + S' \sin(\omega t)] \cos(\omega t) \end{aligned}$$

genügt also die Betrachtung der Triebkraft:

$$\begin{aligned} S_1 \sin(\omega t) &= [S \sin(\omega t) - S' \cos(\omega t)] \sin(\omega t) \\ &= S \sin^2(\omega t) - S' \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= \frac{S}{2} [1 - \cos(2\omega t)] = \frac{S'}{2} \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Damit sind wir nun in der Lage, die oben für den „Vorlauf der treibenden Masse“ und für den „Anlauf der gesamten Massen“ aufgestellten Differentialgleichungen auszuwerten, was zunächst für *konstantes P* geschehen soll.

*Vorlauf der treibenden Masse.*

Die allgemeine Differentialgleichung:

$$P = m_1 \cdot \frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{s_1}{\gamma}$$

erhält für unsere Untersuchung die Form:

$$\frac{S}{2} \left[ 1 - \cos(2\omega t) \right] - \frac{S'}{2} \sin(2\omega t) - \frac{s_1}{\gamma} - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = 0.$$

Wir bilden die zweite Ableitung dieser Gleichung und erhalten nach einer geringfügigen Umformung:

$$\frac{S}{2} \cos(2\omega t) + \frac{S'}{2} \sin(2\omega t) - \frac{1}{4\omega^2 \gamma} \cdot \frac{d^2 s_1}{dt^2} - \frac{1}{4\omega^2} \cdot m_1 \frac{d^4 s_1}{dt^4} = 0.$$

Die Addition dieser Gleichung zu der unmittelbar vorher mitgeteilten eliminiert die Ausdrücke mit den Winkel-funktionen und ergibt:

$$\frac{S}{2} - \frac{s_1}{\gamma} - \left( m_1 + \frac{1}{4\omega^2} \cdot \frac{1}{\gamma} \right) \frac{d^2 s_1}{dt^2} - \frac{1}{4\omega^2} \cdot m_1 \frac{d^4 s_1}{dt^4} = 0.$$

Durch Differentiation und Ordnen erhält man:

$$\gamma \cdot m_1 \cdot \frac{d^4 s_1}{dt^4} + (1 + \gamma \cdot m_1 \cdot 4\omega^2) \frac{d^2 s_1}{dt^2} + 4\omega^2 \cdot \frac{d s_1}{dt} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung dieser homogen linearen Differentialgleichung hat die Wurzeln:

$$r_1 = +i\sqrt{a_1}; r_2 = -i\sqrt{a_1}; r_3 = +i\sqrt{a_2}; r_4 = -i\sqrt{a_2}; r_5 = 0,$$

wobei:

$$\left. \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{(1 + \gamma \cdot m_1 \cdot 4\omega^2) \pm \sqrt{(1 + \gamma \cdot m_1 \cdot 4\omega^2)^2 - (4\gamma \cdot m_1 \cdot 4\omega^2)}}{2 \cdot \gamma \cdot m_1}}$$

gesetzt wurde und  $a_1$  sich auf das positive,  $a_2$  auf das negative Vorzeichen der inneren Wurzel bezieht. Mit  $A, B, C, D, E$  als Integrationskonstanten ergibt sich für den Weg der Masse  $m_1$  das allgemeine Integral:

$$s_1 = A \sin \sqrt{a_1} \cdot t + B \cos \sqrt{a_1} \cdot t + C \sin \sqrt{a_2} \cdot t + D \cos \sqrt{a_2} \cdot t + E$$

Bei Bildung der ersten und zweiten Ableitung dieses Ausdrucks nach der Zeit und Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke in die Ausgangsgleichung:

$$\frac{S}{2} \left[ 1 - \cos(2\omega t) \right] - \frac{S'}{2} \sin(2\omega t) - \frac{s_1}{\gamma} - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = 0$$

erhält man durch Koeffizienten-Vergleichung:

$$\gamma \cdot \frac{S}{2} = E.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch mittels der oben angeführten Differentialgleichung vierter Ordnung. Für die Zeit  $t = 0$  ist  $s_1 = 0$  und erhält man aus dem allgemeinen Integral für  $s_1$  den Zusammenhang:

$$t = 0, s_1 = 0 = B + D + E; B + D = -E = -\gamma \cdot \frac{S}{2}$$

Da zur Zeit  $t = 0$  auch  $\frac{ds_1}{dt} = 0$  sein muss, gilt

$$t = 0, \frac{ds_1}{dt} = 0 = A\sqrt{a_1} + B\sqrt{a_2}.$$

Ueber die Grösse der Stangenkraft:

$$S_1 \sin(\omega t) = \frac{S}{2} \left[ 1 - \cos(2\omega t) \right] - \frac{S'}{2} \sin(2\omega t)$$

zur Zeit  $t = 0$  darf im Hinblick auf die Bestimmung von Integrationskonstanten eine Annahme deswegen nicht gemacht werden, weil ohne weiteres auch bei Ersatz von  $(\omega t)$  durch  $(\omega t + \varphi)$ , bezw. von  $2(\omega t)$  durch  $2(\omega t + \varphi)$  sowie auch beim Ersatz der vordern durch die hintere Stange dieselbe Differentialgleichung und dieselbe Konstante  $E$  sich ergeben müssen;  $\varphi$  bedeutet dabei einen von  $t$  unabhängigen Winkel. Andererseits führt aber die Annahme von  $\omega$  für  $t = 0$  zum Ziel. Offenbar beginnt der Vorlauf mit  $\omega = 0$ , wie denn auch während der ganzen Dauer des Vorlaufs nur sehr kleine Werte von  $\omega$  auftreten werden. Die Bedingungen:

$$\left\{ \begin{matrix} t = 0, \omega = 0 \\ t > 0, \omega = \sim 0 \end{matrix} \right.$$

führen auf:

$$a_2 = 0.$$

$$\text{Aus: } A\sqrt{a_1} = C\sqrt{a_2} = 0$$

muss dann folgen:

$$A = 0.$$

Dann liefert die Ausgangsgleichung weiter:

$$C = 0 \text{ und } D = 0,$$

worauf:

$$B = -E = -\gamma \frac{S}{2}$$

folgt, sodass schliesslich das allgemeine Integral von  $s_1$  lautet:

$$s_1 = \frac{\gamma}{2} \cdot S \cdot \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2a}{2\gamma m_1}} \cdot t \right) \right]$$

wobei wir setzen:

$$2a = (1 + \gamma \cdot m_1 \cdot 4\omega^2) + \sqrt{(1 + \gamma \cdot m_1 \cdot 4\omega^2)^2 - (4\gamma \cdot m_1 \cdot 4\omega^2)}.$$

Wir schreiben dann für die elastische Kraft, also für die tatsächliche Triebwerksbeanspruchung:

$$K = \frac{s_1}{\gamma} = \frac{S}{2} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{2a}{2\gamma m_1}} \cdot t \right) \right]$$

Sowohl der von der treibenden Masse  $m_1$  zurückgelegte Weg  $s_1$  als auch die vom elastischen Zwischengliede weitergeleitete Kraft  $K$  schwingen demnach harmonisch um einen festen Mittelwert. Ihre Mindestwerte sind je gleich Null, ihre Höchstwerte lauten:

$$s_{1 \max} = 2 \frac{\gamma}{2} \cdot S \text{ und } K_{\max} = 2 \cdot \frac{S}{2}$$

Es ist nun noch zu erwägen, ob bei der Kleinheit von  $\omega$  während des „Vorlaufs“ etwa eine Rückwirkung von  $s_1$  auf  $\omega$  stattfindet, d. h. mit andern Worten, ob etwa das simultane System der Differentialgleichung für  $s_1$  und der Differentialgleichung für das Entstehen der Motorkraft  $P$  zu berücksichtigen sei. Da jedoch für unendlich kleine  $P$  die Deformation  $s_1$  eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung sein muss, braucht eine solche Rücksicht nicht genommen zu werden. Auch werden wir uns mit dem Vorlauf bei einem konstanten und von null verschiedenen  $\omega$  noch anlässlich der Untersuchung des Antriebs durch eine mit der Frequenz  $\frac{2\omega}{2\pi}$  harmonisch pulsierende Motorkraft  $P$  zu befassen haben.

Lassen wir nun die Vorstellung des Kurbelantriebes vollends fallen und rechnen für den Antrieb nach Abb. 3 mit den Werten:

$$\omega = 0 \text{ und } a_2 = 0,$$

wobei wir also den normalen Antrieb mit nur rotierenden Massen voraussetzen, so wird weiter:

$$\sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{2}{2m_1\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{m_1\gamma}}$$

während die Konstanten  $B$  und  $E$  die bisherigen Werte beibehalten. Es folgen dann:

$$s = \frac{\gamma}{2} \cdot S \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{1}{m_1\gamma}} \cdot t \right]$$

$$K = \frac{S}{2} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{1}{m_1\gamma}} \cdot t \right]$$

Die höchstmöglichen Werte sind dieselben wie vorhin, nämlich:

$$s_{1 \max} = 2 \cdot \frac{\gamma}{2} S \text{ und } K_{\max} = 2 \cdot \frac{S}{2}$$

Der Unterschied, den im Vorlaufe der Kurbelantrieb gegenüber dem Antrieb mit nur rotierenden Massen aufweist, ist somit anscheinend recht unwesentlich. Prinzipiell ist indessen schon hier darauf hinzuweisen, dass beim Kurbelantrieb für die Frequenz der Schwingungen und damit für die Gefahr einer Resonanz mit andern schwingungsfähigen Konstruktionsteilen der Lokomotive neben  $m_1$  auch  $\omega$  mitwirkt, während beim Antrieb mit nur rotierenden Massen die zweite Quelle einer Resonanzgefahr ausser Betracht fällt. Die Wirkung von  $\omega$  wird aber naturgemäss erst beim eigentlichen Anlauf der gesamten Massen recht zur Geltung kommen. (Fortsetzung folgt.)