

| | |
|---------------------|---|
| Zeitschrift: | Schweizerische Bauzeitung |
| Herausgeber: | Verlags-AG der akademischen technischen Vereine |
| Band: | 61/62 (1913) |
| Heft: | 15 |
| Artikel: | Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen |
| Autor: | Meissner, Ernst |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-30791 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen. — Saalbau zur „Sonne“ in Küsnacht bei Zürich. — Tessiner Landhausbauten. — Wettbewerb für eine katholische Kirche nebst Pfarrhaus und grossem Saal in Lausanne. — Jahressversammlung des Schweiz. Vereins von Gas- und Wasserfachmännern. — Die Einführung der linksufrigen Zürichseebahnen in den Hauptbahnhof Zürich der S.B.B. — Miscellanea: Spezialturbinen für gemischten Heiz- und Kraftdampfbetrieb von Brown, Boveri & Cie. Einphasenmotor für Aufzugsbetrieb. Messel-Denkmal in Darmstadt. Versammlung ehemaliger Ingenieure und Beamter der Gotthardbahn. Simplon-Tunnel II.

Das Areal des alten badischen Bahnhofs in Basel. Grenchenbergtunnel. Neue Beleuchtungs-Umformerstation der Stadt Zürich. Anwendung von „Knapenriegel“ in Zürich. Techn. Hochschule Dresden. Mont d'Or-Tunnel. — Konkurrenz: Polizeiposten am Wielandsplatz in Basel. Kirchgemeindehaus in Zürich 4. — Nekrologie R. Diesel. Dr. Ed. Schär. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein. Gesellschaft ehemaliger Studierender: Stellenvermittlung. Tafeln 31 und 35: Saalbau zur „Sonne“ in Küsnacht bei Zürich. Tafeln 33 und 34: Tessiner Landhausbauten.

Band 62.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 15.

Ueber graphische Integration
von totalen Differentialgleichungen.

Von Prof. Dr. Ernst Meissner, Zürich.

1. Einleitung.

Die meisten Probleme der Mechanik und Physik führen bei ihrer mathematischen Fassung auf Differentialgleichungen, aus denen die unbekannten Funktionen bestimmt werden müssen. Sind diese von mehreren Veränderlichen abhängig, so hat man es mit partiellen, kommt deren nur eine einzige vor, so hat man es mit totalen Differentialgleichungen zu tun. Letztere treten in der Mechanik besonders häufig auf. Sie sind dort meist von der zweiten Ordnung.

Für die analytische Lösung totaler Differentialgleichungen liegen eine Reihe von Integrationsmethoden vor, die aber nur in den einfachen Fällen zum Ziele führen, d. h. für die gesuchte Funktion einen Ausdruck in elementaren Funktionen (x^n , e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$ etc.) zu finden erlauben; denn in der Mehrzahl der Fälle werden durch die Differentialgleichungen neue Funktionen definiert, die sich überhaupt nicht elementar darstellen lassen. So führen viele Bewegungsaufgaben, z. B. das Pendel- und Kreiselproblem auf elliptische Funktionen, während andere Funktionen erfordern, die auch dem Mathematiker unbekannt sind. (Das Dreikörperproblem in der Himmelsmechanik).

Nun ist für den Techniker und Physiker der Standpunkt gegenüber solchen „unlösbar“ Differentialgleichungen durchaus nicht derselbe, wie für den Mathematiker. Während dieser letztere nach der Existenz, dem Charakter und den Eigenschaften der Lösung fragen wird, begnügt sich der Techniker, wenn er bei gegebenen Anfangsbedingungen den Verlauf der Funktion qualitativ, wo möglich auch quantitativ beurteilen kann, wobei es ihm auf Fehler von einigen Prozenten im allgemeinen kaum viel ankommen dürfte. Er wird also nach Verfahren suchen, welche die Lösung wenigstens mit Annäherung zu berechnen erlauben.

Zu diesem Zweck kann er einmal für die Lösung eine Potenzreihe (oder eine andere Funktionenreihe mit genügend vielen verfügbaren Konstanten) ansetzen, und so der Differentialgleichung zu genügen suchen. Aber diese Methode ist selten praktisch durchführbar, und man hat häufig Konvergenzschwierigkeiten.

Ein zweites Mittel besteht darin, schon die Differentialgleichung zu vereinfachen, indem etwa Glieder vernachlässigt werden, deren Einfluss voraussichtlich klein ist. Das tut man z. B. bei der Behandlung gewöhnlicher Pendelschwingungen, wo die genaue Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2 \sin \varphi$$

unter Voraussetzung von kleinen Schwingungen durch die viel einfachere

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2 \varphi$$

ersetzt wird. Aber dies Verfahren hat stets gewisse Voraussetzungen, die häufig nicht erfüllt sind; auch ist man im Unsichern über den Geltungsbereich der gefundenen Lösung.

Eine dritte Methode endlich benutzt das sog. Differenzenverfahren. Sie ersetzt die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung, die Differentiale durch endlich grosse, wenn auch sehr kleine Differenzen, und berechnet sich so schrittweise die ganze Funktion angenähert aus den gegebenen Anfangswerten. Schon in einfachen Fällen kommt man aber auf diese Weise zu umfangreichen Rechnungen und mehr oder weniger unübersichtlichen Zahlentabellen.

Es liegt nahe, den Gedanken, der hier zugrunde liegt, zu verwenden, um ein graphisches Verfahren darauf aufzubauen. Das ist auch deswegen besonders empfehlenswert, weil gelegentlich die schon in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen, und umso mehr die Lösung sich entweder gar nicht oder nur umständlich analytisch beschreiben lassen, während sie graphisch einfach durch ein Diagramm gegeben sind. Das trifft z. B. zu, wenn die Funktion in verschiedenen Gebieten verschiedenen analytischen Gesetzen folgt (Momentenfläche eines belasteten Stabes) oder wenn sie (wie im Beispiel 5 die störende Kraft) eine ganz willkürliche Funktion ist, die man analytisch durch eine vielgliedrige Fourier-Reihe annähernd darstellen müsste.

Deutet man die unbekannte Funktion als Ordinate y , die unabhängige Veränderliche als Abszisse x einer Kurve k in rechtwinkligen Koordinaten, so wird durch die Differentialgleichung für $y(x)$ dieser Kurve eine bestimmte, charakteristische Eigenschaft zugeschrieben. Ist die Gleichung erster Ordnung, etwa¹⁾

$$y' = f(x, y)$$

wobei f einen bekannten Ausdruck in x und y bedeutet, so wird zu jedem Kurvenpunkte der Winkel τ der Tangente mit der x -Axe vorgeschrieben, da ja $y' = \tan \tau$ ist. Ähnlich gibt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y')$$

eine Beziehung zwischen dem Krümmungsradius ϱ , dem Tangentenwinkel τ , und den Koordinaten eines Kurvenpunktes. Aber es scheint praktisch fast aussichtslos, darauf ein graphisches Näherungsverfahren gründen zu wollen. Denn ϱ hängt durch die verwickelte Formel

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

mit y' und y'' zusammen. Noch schlimmer steht bei Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung.

Es soll Aufgabe der folgenden Zeilen sein, eine graphische Integrationsmethode zu entwickeln, die diese Ubelstände nicht besitzt, und die, wie mehrere Beispiele zeigen, den praktischen Bedürfnissen nach Einfachheit und Genauigkeit gleichzeitig genügen darf. Das Verfahren ist in dem Sinne allgemein, als es auf Gleichungen beliebig hoher Ordnung anwendbar ist, wenn auch seine Genauigkeit naturgemäß mit wachsender Ordnung abnimmt. Wenn in den Beispielen trotzdem nur Differentialgleichungen zweiter und erster Ordnung integriert werden, so geschiehts, weil diese weitaus am häufigsten auftreten.

2. Das Liniendiagramm einer Funktion.

Wenn sich auf das gewöhnliche Punktdiagramm einer Funktion ein graphisches Verfahren, das praktisch brauchbar wäre, nicht aufbauen lässt, so röhrt das davon her, dass die Ableitungen der Funktion mit den geometrischen Eigenschaften ihres Schaubildes in keinem genügend einfachen Zusammenhang stehen, und aus dem Diagramm ohne weiteres nicht entnommen werden können.

Nun sind wir aber an jene Kurvendarstellung durchaus nicht gebunden; wir können vielmehr an ihrer Statt jedes Gebilde benutzen, welches die Abhängigkeit der Funktion von ihrem Argumente darzustellen geeignet ist. Das im folgenden verwendete Gebilde nenne ich das *Liniendiagramm* der Funktion.

Die unabhängige Variable heisse u , und werde als Winkel gedeutet, die von u abhängige Funktion p_u als Strecke interpretiert. Während beim gewöhnlichen Punkt-

¹⁾ Akzente bedeuten hier, wie im Folgenden Ableitungen nach der unabhängigen Veränderlichen.

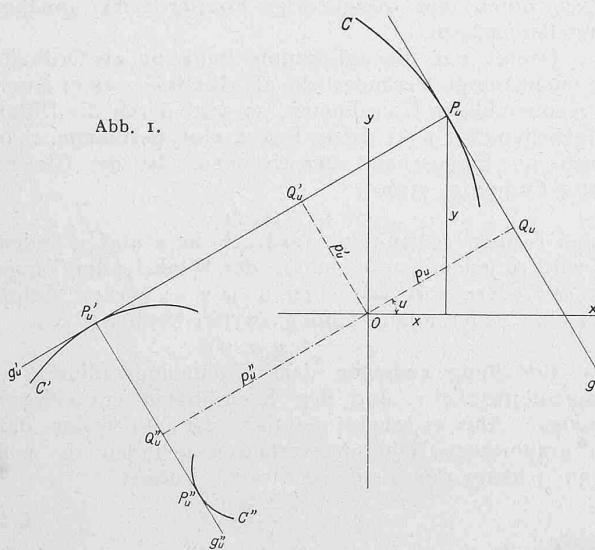
diagramm der Funktion p_u zwei zusammengehörige Werte u und p_u jeweilen durch einen Punkt des Schaubildes dargestellt sind (nämlich durch dessen Koordinaten), werden sie nunmehr durch eine gerade Linie g_u zur Anschauung gebracht, und zwar so:

Ist $O(xy)$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so soll g_u durch die Gleichung bestimmt sein:

$$x \cos u + y \sin u - p_u = 0$$

demnach hat das Lot OQ_u (Abb. 1) vom Ursprung auf die Gerade g_u die Länge p_u , und es schliesst mit der x -Axe den Winkel u ein. Jedem zusammengehörigen Wertepaar $[u, p_u]$ entspricht eine Gerade g_u . Für eine gegebene Funktion $p(u)$ erhält man einfach unendlich viele solcher Geraden: sie umhüllen eine Kurve C , das Liniendiagramm der Funktion $p(u)$. Ihre Angabe genügt genau wie beim gewöhnlichen Diagramm, um das Funktionsgesetz $p(u)$ graphisch zu beschreiben. $p(u)$ heisst umgekehrt die Stützgeradenfunktion der Kurve C .

Abb. 1.



Nun sei P_u (Abb. 1) der Punkt, in dem die Gerade g_u das Liniendiagramm C berührt. Dann berechnen sich nach bekannten Regeln die Koordinaten x, y von P_u aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} g(u) &= 0 \\ g' = \frac{dg(u)}{du} &= 0 \quad \text{oder} \quad -x \sin u + y \cos u - p'_u = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Aber nach Abbildung 1 ist

$$\begin{aligned} P_u Q_u &= -x \sin u + y \cos u \text{ also wegen (2)} \\ P_u Q_u &= p'_u = OQ'_u \end{aligned}$$

und die Gerade g'_u von der Gleichung (2) steht demnach in P_u senkrecht zur Tangente g_u des Diagramms C . Sie ist also die Normale an die Kurve C in P_u , oder, was damit gleichbedeutend ist, die Tangente an die Evolute C' der Kurve C . Für die Kurve C' spielt die Funktion $p'(u)$ dieselbe Rolle, wie $p(u)$ für C , d. h. die Evolute C' ist das Liniendiagramm der ersten Ableitung $\frac{dp(u)}{du}$. Indem man weiter die Evolute C'' der Evolute C' konstruiert, erkennt man, dass sie das Liniendiagramm der Funktion $p''(u)$ darstellt u. s. f. Man sieht, die Abstände der rechtwinklig aufeinander folgenden Tangenten $g_u, g'_u, g''_u \dots$ an die Kurven $C, C', C'' \dots$ vom Anfangspunkte O werden der Reihe nach durch die Größen $p(u), p'(u), p''(u) \dots$ wieder gegeben. Alle Ableitungen der Funktion $p(u)$ treten also im Liniendiagramm in einfacher und gleichartiger Weise auf. Dem Differentiationsprozess entspricht der Uebergang zur Evolute, dem Quadraturprozess der zur Evolvente einer gegebenen Kurve.

Für den Krümmungsradius q_u des Diagramms C in P_u ergibt sich aus Abbildung 1:

$$q_u = P_u P'_u = P_u Q'_u + Q'_u P'_u = OQ_u + \dots + OQ''_u = p(u) + p''(u) \quad (3)$$

Er wird also in der denkbar einfachsten Form durch die Funktion $p(u)$ und ihre zweite Ableitung dargestellt. Darauf beruht wesentlich die Brauchbarkeit der im folgenden Abschnitt geschilderten Integrationsmethode.

Das einfachste Liniendiagramm, nämlich einen Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten (a, b) hat die Schwingungsfunktion

$$p(u) = a \cos u + b \sin u.$$

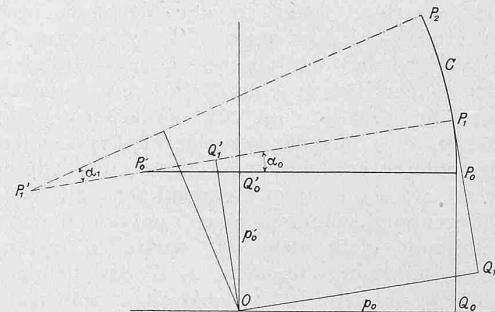
Funktionen, die sich um eine solche additive Funktion unterscheiden, haben kongruente, parallel liegende Diagramme. Unterscheiden sich zwei Funktionen um eine Konstante, so sind ihre Liniendiagramme Parallelkurven.

3. Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Für die unbekannte Funktion $p(u)$ liege eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vor, d. h. eine Beziehung von der Form

$$R(u, p, p', p'') = 0 \quad (4)$$

Abb. 2.



Man löse sie nach p'' auf:

$$p'' = f(u, p, p')$$

Es ist dann auch

$$q(u) = p(u) + p''(u) = F(u, p, p') \quad (5)$$

ein bekannter Ausdruck in den Größen u, p, p' . In gewissen einfachen Fällen werden auf der rechten Seite von (5) nicht alle drei Argumente auftreten; dann vereinfacht sich die Konstruktion.

Statt die Funktion $p(u)$ zu suchen, die der Gleichung (4) resp. (5) genügt, stelle man sich jetzt die gleichwertige geometrische Aufgabe, ihr Liniendiagramm C zu finden. Dabei hat man sich für $p(u)$ etwa die Anfangsbedingungen

$$p(0) = p_o \quad p'(0) = p'_o \quad (6)$$

vorgeschrieben zu denken.

Die Gleichung (5) gibt nun für jeden Punkt P_u den zugehörigen Wert q_u des Krümmungsradius. In infinitesimaler Nähe von P_u kann C ersetzt werden durch den (dreipunkig berührenden) Krümmungskreis vom Zentrum P'_u (Abbildung 1), wobei $P_u P'_u = q_u$ ist. Mit Annäherung kann dieser Ersatz auch auf ein endliches Bogenstück ausgedehnt werden, und zwar umso genauer, je kleiner der zugehörige Zentriwinkel α ist. Unsere Näherungsmethode besteht darin, dass die Kurve C auf diese Weise durch viele kleine oskulierende Kreisbogenstücke ersetzt wird.

Man beginnt die Konstruktion bei dem durch (6) gegebenen Punkte P_o , indem man die Punkte Q_o, P_o, Q'_o aufträgt, sodass $OQ_o = p_o, Q_o P_o = OQ'_o = p'_o$ (Abbildung 2). Die Gleichung (5) gibt jetzt $q(o) = q_o = F(o, p_o, p'_o)$, welche Strecke von P_o aus auf der Normalen $P_o Q'_o$ bis nach P'_o abgetragen wird. Es ist P'_o der Krümmungsmittelpunkt von C in P_o . Nun wählt man je nach der verlangten Genauigkeit einen kleinen Winkel α_o . Dann schlägt man um P'_o den Kreisbogen $P_o P_1$ mit α_o als Zentriwinkel, und betrachtet näherungsweise den in P_o oskulierenden Bogen $P_o P_1$ als erstes Stück der gesuchten Kurve C . Es können jetzt für P_1 die entsprechenden Punkte Q_1, Q'_1 und damit die Werte $p_1 = p(\alpha_o) = OQ_1 = P_1 Q'_1, p'_1 = p'(\alpha_o) = OQ'_1$ aus der Zeichnung entnommen werden. Sie sind natürlich nur angenähert richtig, aber bei kleinem α_o genügend genau, insbesondere wenn die Krümmung der Kurve C in der Nähe von P_o nicht stark schwankt. Mit

diesen Werten berechnet man jetzt den Krümmungsradius ϱ_1 in P_1 , der nach (5) durch

$$\varrho_1 = \varrho(a_o) = F(a_o, p_1, p'_1)$$

gegeben ist, und wiederholt nun die für P_o beschriebene Konstruktion an P_1 , indem man $P_1 P'_1 = \varrho_1$ macht (Abbildung 2), und um P'_1 durch P_1 wieder einen kleinen Kreisbogen $P_1 P_2$ schlägt, der ein weiteres Bogenstück der Kurve C approximiert. Dabei kann der benützte Zentriwinkel a_1 wieder beliebig gewählt werden. Wenn nicht die Genauigkeit der Zeichnung eine Abänderung wünschbar macht, wird man etwa $a_1 = a_o = a$ setzen. So fährt man fort, und erhält für C die stetige Folge $P_o, P_1, P_2, P_3, \dots$ von Kreisbogenstücken.

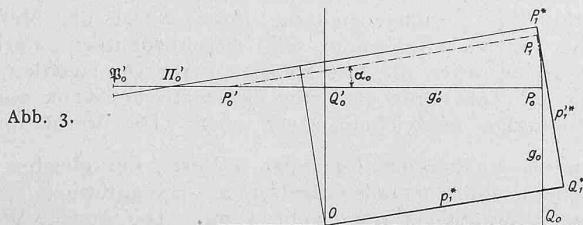
Es ist klar, dass dieser Konstruktion ein Nachteil anhaftet, der aber in der Natur der Sache liegt. Jeder Punkt P_i wird aus dem vorhergehenden P_{i-1} konstruiert, und die in der Lage von P_{i-1} enthaltene Ungenauigkeit überträgt sich daher auch auf P_i . Im ungünstigsten Fall hat man also eine Häufung der Fehler mit wachsender Zahl von Kreisbogenintervallen zu erwarten. Diese Häufung macht sich praktisch ganz besonders für die $p'(u)$ — Werte bemerkbar.

4. Die Interpolation.

Man kann das beschriebene Verfahren wesentlich verbessern, indem man eine einfache Interpolation hinzufügt.

Wenn der Krümmungsradius ϱ_u mit u sich ändert, so hat der ersetzenende Kreisbogen $P_o P_1$ (Abbildung 2) nur im einen Endpunkt P_o den richtigen Radius; im andern Endpunkt P_1 wird der Krümmungsradius einen andern Wert ϱ_1 besitzen. Man wird im allgemeinen eine bessere Annäherung an die wahren Verhältnisse erzielen, wenn der Kreisbogen statt mit dem Halbmesser ϱ_o mit einem mittlern Radius $\varrho^* = \frac{\varrho_o + \varrho_1}{2}$ geschlagen wird. Dieser neue Bogen hat als Endpunkt einen Punkt P_1^* , dessen Lage von P_1 etwas verschieden sein wird. Demgemäß ergeben sich auch korrigierte Werte p_1^*, p'_1^* an Stelle von p_1, p'_1 . Es zeigt sich dabei, dass die Korrektur von p'_1 viel beträchtlicher ist, als die von p_1 .

Praktisch ist die neue, verbesserte Konstruktion in folgender Weise auszuführen:



Nachdem P_1 wie früher konstruiert, und ϱ_1 aus (5) gefunden worden ist, trage man (Abbildung 3) von P_o aus auf der Normalen $P_o Q'$ bis nach \mathfrak{P}' die Strecke ϱ_1 ab, und halbiere nun $P'_o \mathfrak{P}'$ durch Π'_o . Dann ist $P_o \Pi'_o = \frac{\varrho_o + \varrho_1}{2}$ und man hat jetzt um Π'_o durch P_o den Bogen vom Zentriwinkel a_o zu schlagen. Sein Endpunkt P_1^* gibt die korrigierte Lage von P_1 . Genau genommen ergibt sich jetzt auch für ϱ_1 ein neuer verbesserter Wert ϱ_1^* aus

$$\varrho_1^* = F(a_o, p_1^*, p'_1^*)$$

sodass eigentlich die Konstruktion mit diesem Wert an Stelle von ϱ_1 zu wiederholen wäre. Wenn aber a_o einigermassen klein gewählt worden ist, so ist diese zweite Korrektur, die von P_1^* zu einem neuen Punkte P_1^{**} führen würde, schon unterhalb der Genauigkeitsgrenze der Zeichnung.

5. Totale Differentialgleichungen erster Ordnung.

Graphische Ermittlung von Integralen (Quadratur).

Liegt eine Differentialgleichung erster Ordnung vor,

$$p'(u) = f(u, p) \quad (7)$$

so erhält man durch Ableiten eine Relation von der Form

$$p''(u) = f_1(u, p, p')$$

die wegen (7) in

$$p''(u) = f_2(u, p)$$

übergeht, sodass auch für

$$q(u) = p + p'' = F(u, p)$$

ein bekannter Ausdruck in u und $p(u)$ resultiert. Das angegebene Verfahren kann also auch hier angewendet werden. Man findet dadurch wieder zunächst P_1 und p_1 , erhält aber jetzt aus (7) den Wert von p'_1 , und somit eine Korrektur für die Lage der Normalen g'_1 . Diese schneidet die Normale g'_o von P_o in einem Punkte Π'_o , der nachträglich als Zentrum des Näherungsbogens a_o verwendet werden kann. Der Endpunkt dieses neuen Bogens gibt die korrigierte Lage von P_1 . Natürlich wird man hier im allgemeinen eine grössere Genauigkeit erzielen, sodass die im vorigen Abschnitt angegebene Interpolation wegfallen kann.

Ganz besonders einfach wird das Verfahren, wenn es sich um gewöhnliche Quadratur handelt, d. h. wenn die Ableitung $p'(u) = f(u)$ der gesuchten Funktion bekannt ist. Nach Früherm ist damit auch die Evolute C' des gesuchten Liniendiagramms C gegeben, daher konstruiert man C als Evolvente von C' , indem man an C' Tangenten in genügender Anzahl zieht, und diejenige Kurve C zeichnet, welche von P_o ausgehend, alle diese Tangenten rechtwinklig durchsetzt. Dies ist praktisch sehr schnell und genau ausführbar. Auch ist leicht einzusehen, wie sich durch einen um C' geschlungenen Faden ein mechanisches Quadraturverfahren verwirklichen lassen würde. Man vergleiche im übrigen Beispiel 4.

6. Praktische Ausführung der graphischen Integration.

Bei der Anwendung der Methode muss in der praktischen Durchführung eine Reihe von Dingen beobachtet werden.

Zunächst wird man sich zu überlegen haben, welcher Längenmaßstab für die p -Werte zu wählen ist. Im allgemeinen ist ein grosser Maßstab im Interesse der Genauigkeit; jedoch ist durch die Art der Zeichenmittel selbstredend eine obere Schranke hiefür gegeben. Alsdann hat man sich für die Wahl der Winkeldifferenz a zu entscheiden. Man wird sich dabei vorbehalten, im Verlauf der Konstruktion a zu verkleinern, wenn die Ungenauigkeit zu gross wird, zu vergrössern im Interesse der Kürze des Verfahrens, wenn die Genauigkeit es erlaubt. Als Mass für diese wird man die Grösse der Korrektur betrachten, die die Interpolation liefert.

Das Verkleinern der Intervalle a ist nur oberhalb einer gewissen Grenze zweckmässig. Denn mit sehr kleinen Winkeln zu operieren wird wegen der Zeichenfehler ungenau, und ist auch sehr mühsam. In den ausgeführten Beispielen ist nie unter 5° hinabgegangen worden; der grösste für a benützte Wert war 15° . Wenn die mit $a = 5^\circ$ erzielte Genauigkeit nicht genügt, so transformiert man zweckmässig die zu integrierende Differentialgleichung

$$p''(u) = F(u, p, p')$$

indem man statt u die neue Veränderliche $v = k u$ einführt. Hier bedeutet k eine genügend grosse (zweckmässig eine ganze) Zahl. [Man vergleiche Beispiel 6, wo $k = 3$ gesetzt wurde.] $p(u)$ geht über in eine Funktion $q(v)$, für welche die Differentialgleichung

$$q'' = \frac{1}{k^2} F\left(\frac{v}{k}, q, k q'\right)$$

erfüllt ist. Schwankt nun u in einem bestimmten Intervall, so schwankt v in einem Intervall von k -facher Grösse, und einer Winkeldifferenz a für u entspricht die Differenz $k a$ für v .

Einer Erwähnung wert ist weiter der Fall, wo während der Konstruktion der Krümmungsradius $\varrho(u)$ durch null geht. Die Kurve C hat an jener Stelle eine Spitze. Allerdings kann dies stets vermieden werden, indem man statt $p(u)$ die Funktion $q(u) = p(u) + a$ bestimmt, wo a

genügend gross gewählt wird. Das Liniendiagramm dieser Funktion $q(u)$ hat nämlich den Krümmungsradius

$$q^*(u) = q + q'' = p + a + p'' = q(u) + a$$

der bei passender Wahl von a in einem gegebenen Intervall von u -Werten nicht durch null geht. Aber selbst wenn an einer Stelle P_s $q(u)$ das Zeichen wechselt, so versagt die Konstruktion praktisch keineswegs. Die Kurve C hat dann in P_s eine Spitzte, die in unmittelbarer Umgebung von P_s mit der Spitze einer Kreisevolvente identisch ist. Und zwar ist der zugehörige Kreis der Krümmungskreis k der Evolute C' in P_s (Abbildung 4), also ein Kreis vom Radius $p'(u) + p'''(u)$. (Man vergleiche auch Beispiel 5).

Auch Spitzen und Singularitäten höherer Ordnung lassen sich auf ähnliche Weise konstruieren.

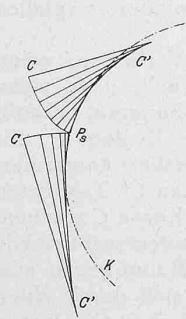


Abb. 4.

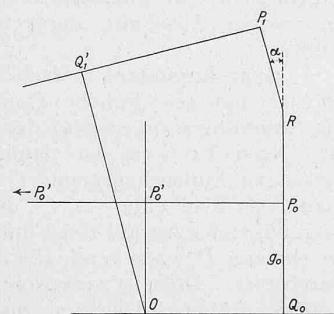


Abb. 5.

Eine Abänderung der allgemeinen Konstruktion ist auch erforderlich, wenn die Zentra der Kreisbögen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ etc. ausserhalb des Zeichnungsblattes fallen. Ist z. B. q der Bogenradius für $P_0 P_1$, α der Zentriwinkel, so trägt man etwa (Abbildung 5) von P_0 aus nach R auf der Tangente g_0 die Strecke $q \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ auf, und von R aus dieselbe Strecke unter dem Winkel α ; ihr Endpunkt ist dann der zweite Endpunkt P_1 des Bogens $P_0 P_1$.

Endlich ist noch zu bemerken, dass vielfach schon durch Transformation der Funktion und des Argumentes in der Differentialgleichung selbst sich Vereinfachungen erzielen lassen, die für die graphische Integration von Vorteil sind (Beispiel 2, 6).

Im Folgenden wird das entwickelte Integrationsverfahren von einigen Beispielen erprobt, die sich auch rein rechnerisch behandeln lassen. Man wird sich so ein Urteil über seine Genauigkeit bilden können.

7. Integration der Differentialgleichung $p'' = p$. (Abbildung 6).

Es soll zunächst die Funktion $p(u) = A \cdot e^u$ konstruiert werden, indem man sie als Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$p''(u) = p(u)$$

mit den Anfangsbedingungen $p_0 = p'_0 = A$ auffasst.

Abbildung 6 enthält die zugehörige Konstruktion. Für das Diagramm C von $p(u)$ ist

$$q(u) = 2p(u).$$

Es wurde absichtlich für α der grosse Wert 15° gewählt. Die Konstante A wurde gleich 8 cm genommen. In der Tafel sind angegeben die Punkte P_o , P'_o , Π'_o für $u = 0$, der Punkt P_1 , der korrigierte Punkt P_1^* u. s. w. Dabei ist die durch Interpolation gefundene Normale jeweilen voll ausge-

gen, während die unberichtigte Normale, wie sie sich zunächst durch das direkte Verfahren des Abschnittes 3 ergibt, durch eine strichpunktiierte Linie dargestellt ist. Die Tafel zeigt deutlich, wie stark die Grösse von $p'(u)$ durch die Interpolation abgeändert wird, während die von $p(u)$ nur kleine Korrekturen erleidet. In der nachfolgenden Tabelle sind der Reihe nach die unkorrigierten, die verbesserten und die genau berechneten Werte von $p(u)$ und von $p'(u)$ zusammengestellt. In den in cm ausgedrückten Angaben bedeuten die zweiten Stellen nach dem Komma Zehntelsmillimeter; sie wurden beim Abmessen nur noch geschätzt, sodass sie nur bis auf eine oder zwei Einheiten genau sind.

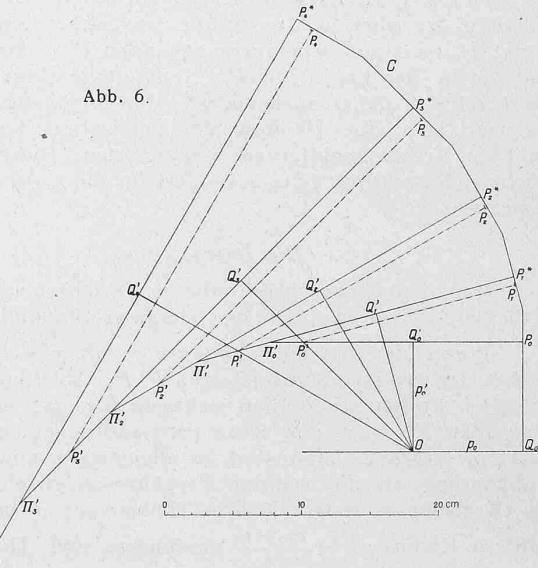


Abb. 6.

Die Tabelle zeigt, dass im Verlauf der Konstruktion die Fehler sich häufen, und dass der Wert $e^{\frac{\pi}{12}}$ noch auf $1,2\%$ genau ist. Das ist in Anbetracht der grossen Winkeldifferenz $\alpha = 15^\circ$, der Kürze der Konstruktion und der Tatsache, dass die Krümmung des Diagramms hier sehr stark sich ändert, ein sehr befriedigendes Resultat. Ferner lehrt die Zusammenstellung, insbesondere der Vergleich der letzten Kolonnen, wie ausserordentlich stark die p' -Werte durch die Interpolation verbessert werden. Für die p -Werte ergibt sich eine systematische, wenn auch geringfügige Abweichung nach oben. Die Verhältnisse je zweier aufeinander folgender p -Werte, die gleich $e^{\frac{\pi}{12}}$ sein sollten, sind ebenfalls eingetragen. Sie entfernen sich von einem Mittelwert 1,303 sehr wenig. Der genaue Wert ist 1,299, sodass diese Grösse auf zirka 3% genau bestimmt ist. Beachtet man, dass es sich um die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, indem die Relation $p = p'$ nicht benutzt wurde, so dürfen die Resultate zufriedenstellend genannt werden.

| u^o | $p(u)$ unkorrug. | $p^*(u)$ korrig. | $\bar{p}(u) - \bar{p}'(u)$ | $p'(u)$ berechnet | $p'(u)$ unkorrug. | $p'(u)^*$ korrig. | Fehler $p^* - \bar{p}$ | In % | $\frac{p'^*}{p'^*-1^*} = e^{\frac{\pi}{12}}$ | $\bar{p} - \bar{p}'$ | $p'^* - \bar{p}$ |
|-------|---------------------|---------------------|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------------|------------------|--|----------------------|------------------|
| 0° | 8,00 | 8,00 | 8,00 | 8,00 | 8,00 | 8,00 | 0 | 0 | 1,300 | 0,00 | 0,00 |
| 15° | 10,34 | 10,40 | 10,39 | 9,79 | 10,39 | + 0,01 | + 0,1 | | 1,305 | - 0,60 | 0,00 |
| 30° | 13,47 | 13,58 | 13,50 | 12,77 | 13,57 | + 0,08 | + 0,6 | | 1,303 | - 0,73 | + 0,07 |
| 45° | 17,59 | 17,70 | 17,55 | 16,60 | 17,66 | + 0,15 | + 0,8 | | 1,303 | - 0,95 | + 0,11 |
| 60° | 22,90 | 23,07 | 22,80 | 21,67 | 23,01 | + 0,27 | + 1,2 | Mittel: 1,303 | | - 1,13 | + 0,21 |

