Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 61/62 (1913)
Heft: 15

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen. — Saalbau zur „Sonne" in Küsnacht bei Zürich. — Tessiner Landhausbauten. — Wettbewerb für eine katholische Kirche nebst Pfarrhaus und grossem Saal in Lausanne. — Jahresversammlung des Schweiz. Vereins von Gas- und Wasserfachmännern. — Die Einführung der linksufrigen Zurichseebahn in den Hauptbahnhof Zürich der S. B. B. — Miscellanea: Spezialturbinen für gemischten Heiz- und Kraftdampfbetrieb von Brown, Boveri & Cie. Einphasenmotor für Aufzugsoetrieb. Messel-Denkmal in Darmstadt. Versammlung ehemaliger Ingenieure und Beamter der Gotthardbahn. Simplon-Tunnel II. Das Areal des alten badischen Bahnhofes in Basel. Grenchenbergtunuel. Neue Beleuchtungs-Umformerstation der Stadt Zürich. Anwendung von „Knapenziegel" in Zürich. Techn. Hochschule Dresden. Mont d'Or-Tunnel. — Konkurrenzen: Polizeiposten am Wielandsplatz in Basel. Kirchgemeindehaus in Zürich 4. — Nekrologie R. Diesel. Dr. Ed. Schär. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein. Gesellschaft ehemaliger Studierender: Stellenvermittlung.
Tafeln 31 und 35: Saalbau zur „Sonne" in Küsnacht bei Zürich.
Tafeln 33 und 34: Tessiner Landhausbauten.

Band 62. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 15.

Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen.

Von Prof. Dr. *Ernst Meissner*, Zürich.

1. *Einleitung.*

Die meisten Probleme der Mechanik und Physik führen bei ihrer mathematischen Fassung auf Differentialgleichungen, aus denen die unbekannten Funktionen bestimmt werden müssen. Sind diese von mehreren Veränderlichen abhängig, so hat man es mit partiellen, kommt deren nur eine einzige vor, so hat man es mit totalen Differentialgleichungen zu tun. Letztere treten in der Mechanik besonders häufig auf. Sie sind dort meist von der zweiten Ordnung.

Für die analytische Lösung totaler Differentialgleichungen liegen eine Reihe von Integrationsmethoden vor, die aber nur in den einfachern Fällen zum Ziele führen, d. h. für die gesuchte Funktion einen Ausdruck in elementaren Funktionen (x^n, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$ etc.) zu finden erlauben; denn in der Mehrzahl der Fälle werden durch die Differentialgleichungen neue Funktionen definiert, die sich überhaupt nicht elementar darstellen lassen. So führen viele Bewegungsaufgaben, z. B. das Pendel- und Kreiselproblem auf elliptische Funktionen, während andere Funktionen erfordern, die auch dem Mathematiker unbekannt sind. (Das Dreikörperproblem in der Himmelsmechanik).

Nun ist für den Techniker und Physiker der Standpunkt gegenüber solchen „unlösbaren" Differentialgleichungen durchaus nicht derselbe, wie für den Mathematiker. Während dieser letztere nach der Existenz, dem Charakter und den Eigenschaften der Lösung fragen wird, begnügt sich der Techniker, wenn er bei gegebenen Anfangsbedingungen den Verlauf der Funktion qualitativ, wo möglich auch quantitativ beurteilen kann, wobei es ihm auf Fehler von einigen Prozenten im allgemeinen kaum viel ankommen dürfte. Er wird also nach Verfahren suchen, welche die Lösung wenigstens mit Annäherung zu berechnen erlauben.

Zu diesem Zweck kann er einmal für die Lösung eine Potenzreihe (oder eine andere Funktionenreihe mit genügend vielen verfügbaren Konstanten) ansetzen, und so der Differentialgleichung zu genügen suchen. Aber diese Methode ist selten praktisch durchführbar, und man hat häufig Konvergenzschwierigkeiten.

Ein zweites Mittel besteht darin, schon die Differentialgleichung zu vereinfachen, indem etwa Glieder vernachlässigt werden, deren Einfluss voraussichtlich klein ist. Das tut man z. B. bei der Behandlung gewöhnlicher Pendelschwingungen, wo die genaue Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2 \sin\varphi$$

unter Voraussetzung von kleinen Schwingungen durch die viel einfachere

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2\,\varphi$$

ersetzt wird. Aber dies Verfahren hat stets gewisse Voraussetzungen, die häufig nicht erfüllt sind; auch ist man im Unsichern über den Geltungsbereich der gefundenen Lösung.

Eine dritte Methode endlich benützt das sog. Differenzenverfahren. Sie ersetzt die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung, die Differentiale durch endlich grosse, wenn auch sehr kleine Differenzen, und berechnet sich so schrittweise die ganze Funktion angenähert aus den gegebenen Anfangswerten. Schon in einfachen Fällen kommt man aber auf diese Weise zu umfangreichen Rechnungen und mehr oder weniger unübersichtlichen Zahlentabellen.

Es liegt nahe, den Gedanken, der hier zugrunde liegt, zu verwenden, um ein graphisches Verfahren darauf aufzubauen. Das ist auch deswegen besonders empfehlenswert, weil gelegentlich die schon in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen, und umsomehr die Lösung sich entweder gar nicht oder nur umständlich analytisch beschreiben lassen, während sie graphisch einfach durch ein Diagramm gegeben sind. Das trifft z. B. zu, wenn die Funktion in verschiedenen Gebieten verschiedenen analytischen Gesetzen folgt (Momentenfläche eines belasteten Stabes) oder wenn sie (wie im Beispiel 5 die störende Kraft) eine ganz willkürliche Funktion ist, die man analytisch durch eine vielgliedrige Fourier-Reihe annähernd darstellen müsste.

Deutet man die unbekannte Funktion als Ordinate y, die unabhängige Veränderliche als Abszisse x einer Kurve k in rechtwinkligen Koordinaten, so wird durch die Differentialgleichung für $y\,(x)$ dieser Kurve eine bestimmte, charakteristische Eigenschaft zugeschrieben. Ist die Gleichung erster Ordnung, etwa [1])

$$y' = f\,(x, y)$$

wobei f einen bekannten Ausdruck in x und y bedeutet, so wird zu jedem Kurvenpunkte der Winkel τ der Tangente mit der x-Axe vorgeschrieben, da ja $y' = \operatorname{tg}\tau$ ist. Aehnlich gibt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f\,(x, y, y')$$

eine Beziehung zwischen dem Krümmungsradius ϱ, dem Tangentenwinkel τ, und den Koordinaten eines Kurvenpunktes. Aber es scheint praktisch fast aussichtslos, darauf ein graphisches Näherungsverfahren gründen zu wollen. Denn ϱ hängt durch die verwickelte Formel

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

mit y' und y'' zusammen. Noch schlimmer stehts bei Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung.

Es soll Aufgabe der folgenden Zeilen sein, eine graphische Integrationsmethode zu entwickeln, die diese Uebelstände nicht besitzt, und die, wie mehrere Beispiele zeigen, den praktischen Bedürfnissen nach Einfachheit und Genauigkeit gleichzeitig genügen dürfte. Das Verfahren ist in dem Sinne allgemein, als es auf Gleichungen beliebig hoher Ordnung anwendbar ist, wenn auch seine Genauigkeit naturgemäss mit wachsender Ordnung abnimmt. Wenn in den Beispielen trotzdem nur Differentialgleichungen zweiter und erster Ordnung integriert werden, so geschiehts, weil diese weitaus am häufigsten auftreten.

2. *Das Liniendiagramm einer Funktion.*

Wenn sich auf das gewöhnliche Punktdiagramm einer Funktion ein graphisches Verfahren, das praktisch brauchbar wäre, nicht aufbauen lässt, so rührt das davon her, dass die Ableitungen der Funktion mit den geometrischen Eigenschaften ihres Schaubildes in keinem genügend einfachen Zusammenhang stehen, und aus dem Diagramm ohne weiteres nicht entnommen werden können.

Nun sind wir aber an jene Kurvendarstellung durchaus nicht gebunden; wir können vielmehr an ihrer Statt jedes Gebilde benützen, welches die Abhängigkeit der Funktion von ihrem Argumente darzustellen geeignet ist. Das im folgenden verwendete Gebilde nenne ich das *Liniendiagramm* der Funktion.

Die unabhängige Variable heisse u, und werde als Winkel gedeutet, die von u abhängige Funktion p_u als Strecke interpretiert. Während beim gewöhnlichen Punkt-

[1]) Akzente bedeuten hier, wie im Folgenden Ableitungen nach der unabhängigen Veränderlichen.