Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 61/62 (1913)
Heft: 12

Artikel: Berechnung gewölbter Platten
Autor: Keller, Huldreich
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-30695

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Berechnung gewölbter Platten. — Wettbewerb für die Hochbauten der Chur-Arosa-Bahn. — Das Bürgerhaus in der Schweiz. — Zum Wettbewerb für den Entwurf zu einer Strassenbrücke über den Rhein in Cöln. — Miscellanea: Zum Gotthardvertrag. Murgkraftwerk. Internationale Organisation der drahtlosen Zeitübermittlung. Wasserstoffgewinnung unter hohem Druck. Wärmeerzeugung in Wohnungen mit mit Hülfe der Gasversorgung. Ueber das Rosten von Eisen trotz Schutzanstriches. Neue Kapselwerke als Gebläsemaschinen. Eine deutsche beleuchtungstechnische Gesellschaft. Schweizerische Bundesbahnen. Beratungsstelle für Heimatschutz in Bern. Deutscher Verein von Gas- und Wasserfachmannern. Zürcherisches Technikum Winterthur. — Korrespondenz. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Bernischer Ing.- und Arch.-Verein. G. e. P.: Stellenvermittlung.
Tafel 35 bis 38: Das Burgerhaus in Genf.

Band 61. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 12.

Berechnung gewölbter Platten.

Von Dipl. Ing. Dr. *Huldreich Keller* in Zürich.

(Fortsetzung statt Schluss von Seite 128)

Die Ergebnisse zweier Hauptdurchrechnungsgruppen sind in die Abbildungen 12 bis 17 eingetragen und geben ein ebenso lehrreiches wie anschauliches Bild über den Verlauf der Normalspannungen in den einzelnen Punkten der Platte und die Wanderung der einzelnen Punkte der Meridian-Mittelfaser infolge der Durchbiegung. Wir heben besonders hervor, dass die einzelnen Ergebnisse für folgende Bedingungen gelten;

Zahlenbeispiel . .	I	II
Platte am Rand	*freiaufliegend*	*eingespannt*[1])

Diskussion der Rechnungsergebnisse der Zahlenbeispiele I u. II.

Ein Vergleich der Abbildungen 12 bis 15 zeigt, dass die Normalspannungen in der am Rand eingespannten Platte durchschnittlich viel niedriger sind als in der frei aufliegenden Platte. In letzterer tritt die grösste Spannung als Tangentialspannung $\sigma_t = +1468$ *kg/cm²* (Zug) an der Innenfaser im Abstand $x = 90$ *cm*, Abbildung 13, die nächstgrösste als Radialspannung $\sigma_r \backsim -1180$ *kg/cm²* (Druck) an der Aussenfaser zwischen den berechneten Punkten $x = 70$ und 80 *cm* auf, Abbildung 12. Bei der am Rand eingespannten Stelle beträgt die Höchstbeanspruchung — 1148 *kg/cm²*. Es ist dies die Druckspannung in Richtung des Meridians an der Innenfaser des Aussenrandes, Abbildung 14. Die höchste an dem am Rand eingespannten Deckel auftretende Tangentialspannung finden wir ebenfalls am äussern Rand, und zwar an der äussern Faser mit + 726 *kg/cm²* (Zug). Alle andern am eingespannten Deckel erscheinenden Spannungen sind viel kleiner als die soeben genannten.

Die Abbildungen 12 bis 15 zeigen ferner, dass für beide Lagerungsarten des Deckels Punkte zu finden sind, die entweder in Richtung des Meridians oder des Parallelkreises spannungslos sind. Es ist dies der Fall z. B. laut Abbildung 12 in Richtung des Meridians an der innern Begrenzungsfaser im Abstand $x = 45$ *cm* von der Symmetrieaxe, laut Abbildung 13 in „tangentialer" Richtung an der äussern Begrenzungsfaser bei $x = 78$ *cm*, an der innern Begrenzungsfaser bei $x = 56$ *cm* usw.

Eine weitere Betrachtung der die „Radialspannungen" am frei aufliegenden und am aussen eingespannten Deckel darstellenden Abbildungen 12 und 14 zeigt, dass in beiden Fällen zwischen der Symmetrieaxe und dem Aussenrand je ein Querschnitt vorkommt, der keiner Biegungs-, sondern nur einfacher normaler Druckspannung unterworfen ist. Es ist dies jeweils derjenige Kegelschnitt, in welchem im graphischen Bild die Radialspannungen in der innern und äussern Begrenzungsfaser gleich gross erscheinen. Schätzungsweise trifft dies zu in Abbildung 12 für die Kote $x = 22$ *cm*, in Abbildung 14 für den Halbmesser $x = 8$ *cm*. Hier zeigt die elastische Linie relative Inflexionspunkte. In Abbildung 12 verschwindet das Biegungsmoment natürlich ein zweites

[1]) aber in Richtung des Halbmessers beweglich.

Zahlentafel 8. Zusammenstellung der Hauptdaten für die Rechnungsbeispiele.

Beispiel Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	IX_v	X	X_f
Schnitt-Abbildung Nr.	18 u. 11	18	18	18	18	18	18	18	18 u. 32	18 u. 35	18	18
Material	← Gusseisen $G = 900\,000$ *kg/cm²*; $m = 5$ →										Flusseisen $G = 2{,}1 \cdot 10 + 6$ *kg cm²* $m = 3{,}33$	
Randbedingungen:												
1. in der Mitte	← voll →								Bohrung mit Radius $x = 15$ *cm* mit Nabe		← voll →	
2. am Rand, und zwar axial	frei aufliegend	eingespannt nachgiebig	← frei aufliegend →								eingespannt nachgiebig	eingespannt unfrei
Aussenhalbmesser . . . . . *cm*	90	90	90	90	90	90	60	60	90	90	30	30
Mittlerer Wölbungshalbmesser . . »	143	143	260	510	∞	143	143	95,5	143	143	103,5	103,5
Pfeilhöhe der Wölbung . . . . »	32,1	—	16	8	0	—	—	—	—	—	—	—
Dicke d. Platten, soweit sie stets gleich »	6	6	6	6	6	9	6	6	6	6	0,99	0,99
Spezifische Belastung p . . . *kg/cm²*	← — 20 auf konvexe Seite →										+16 auf konkave Seite	+16
Spannungsdiagramm . . . . . Abb.	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Es betragen die Spannungen innen:												
in der Mittelfaser σ_{r0i} . . *kg/cm²*	— 258	— 268	— 720	—1085	0	—212	— 372	—185	0	0	+1080	+ 840
in der Mittelfaser σ_{t0i} . . »	— 258	— 268	— 720	—1085	0	—212	— 372	—185	— 375	— 340	+1080	+ 840
in der Aussenfaser $\sigma_{r\frac{h}{2}i}$. »	— 365	— 271	— 965	—3230	—5620	—240	— 605	—190	0	0	+1100	+ 940
in der Aussenfaser $\sigma_{t\frac{h}{2}i}$. »	— 365	— 263	— 965	—3230	—5620	—240	— 605	—190	— 575	— 560	+1100	+ 905
Es betragen die Spannungen am Aussenrand:												
in der Mittelfaser σ_{r0a} . . *kg cm²*	— 94	— 94	— 51	—26,5	0	— 62	— 42	— 62	— 94	— 62	+ 70	+ 609
in der Mittelfaser σ_{t0a} . . »	+1277	+ 516	+2020	+2180	0	+620	+ 832	+554	+1510	+1260	—2212	+ 55
in der Aussenfaser (Höchstwert) $\sigma_{r\frac{h}{2}a}$. »	— 94	—1148	— 51	—26,5	0	— 62	— 42	— 62	— 94	— 62	+4530	+1990
in der Aussenfaser (Höchstwert) $\sigma_{t\frac{h}{2}a}$. »	+1486	+ 726	+2720	+3634	+2740	+810	+1179	+728	+1822	+1573	—3592	+ 425
Durchbiegung in der Mitte $\Delta y =$ *mm*	—2,45	—1,44	—9,54	—24,33	—56,8[1])	—1,42	—2,29	—0,86	—2,78	—2,30	+2,00	+0,51
Dehnung d. Aussenhalbmessers $\Delta x =$ »	+1,47	+0,56	+0,53	+ 2,22	—	+0,73	+0,57	+0,38	+1,56	+1,39	—0,33	—0,04
Diagramm der Durchbiegung Δy . Abb.	36	36	—	—	—	—	—	—	36	36	—	—
Diagramm der Aenderung Δx . . »	37	37	—	—	—	—	—	—	37	37	—	—

[1]) Die Formel nach Föppl, Bd. III, S. 261, Gl. (185) giebt —52,7 *mm*, also 7,2 % weniger. Diese an sich geringe Abweichung liegt wahrscheinlich darin begründet, dass wir noch weitere annäherndere Durchrechnungen hätten vornehmen sollen.

Abb. 12 u. 13. Zahlenbeispiel I: Platte am Rand frei aufliegend.

Abb 14 u. 15. Zahlenbeispiel II: Platte am Rand eingespannt, aber in Richtung des Halbmessers beweglich.
(Vergl. Abb. 18, S. 156.)

Masstabe für die Längen 1 : 6, für die spez. Spannungen 30 kg/cm^2 = 1 mm.

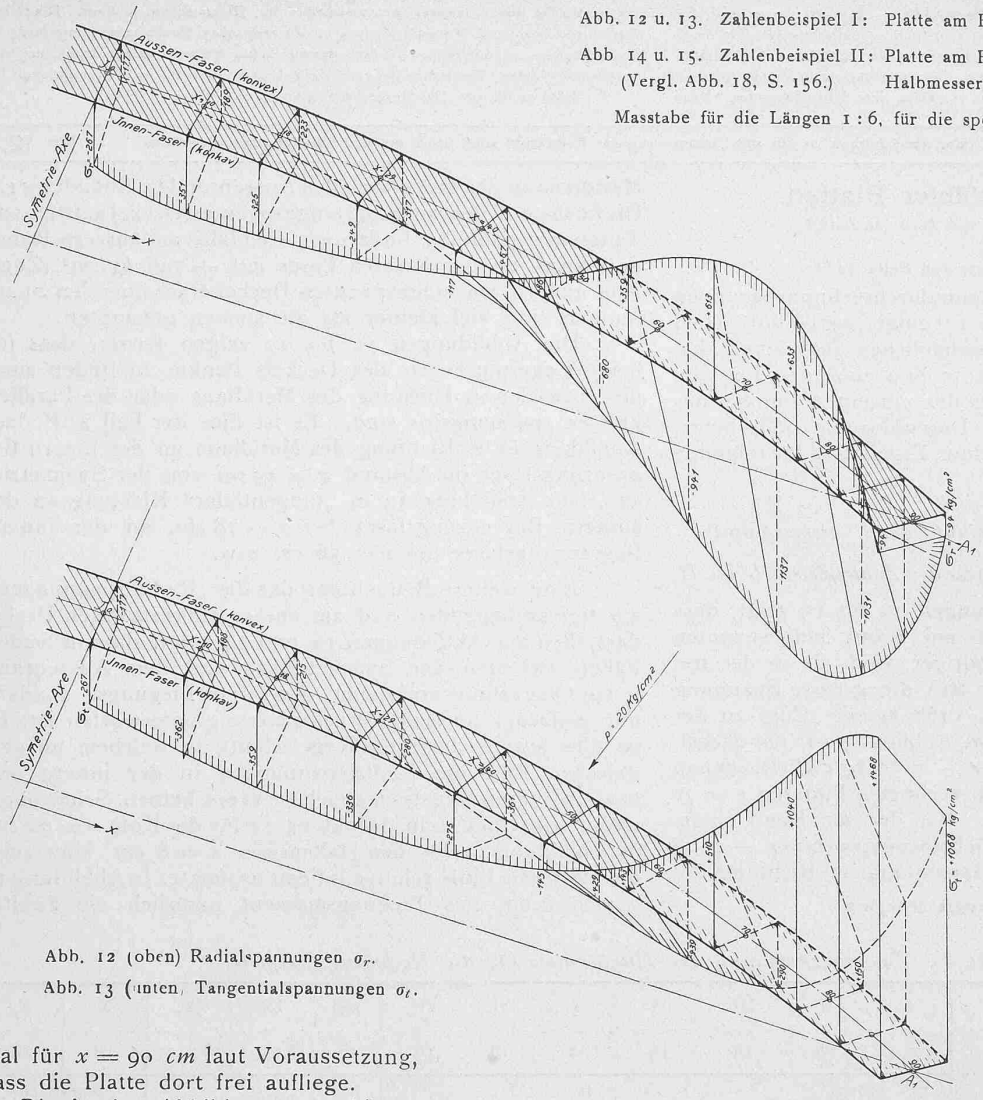


Abb. 12 (oben) Radialspannungen σ_r.

Abb. 13 (unten) Tangentialspannungen σ_t.

Mal für $x = 90$ cm laut Voraussetzung, dass die Platte dort frei aufliege.

Die in den Abbildungen 12 bis 15 gegebenen Darstellungen der Spannungsverteilungen lehren ferner, dass die Platte einem „Körper gleicher Festigkeit" angenähert werden könnte, wenn sie in der Mitte dünner, gegen aussen und besonders am Rand dicker gehalten wäre.

Durchbiegung des nach Abbildung 11 ausgebildeten und auf der konvexen Seite mit 20 kg/cm² belasteten Deckels.

In den Abbildungen 16 und 17 ist die rechnerische Durchbiegung der Mittelfaser des Deckels dargestellt für die zwei Fälle:

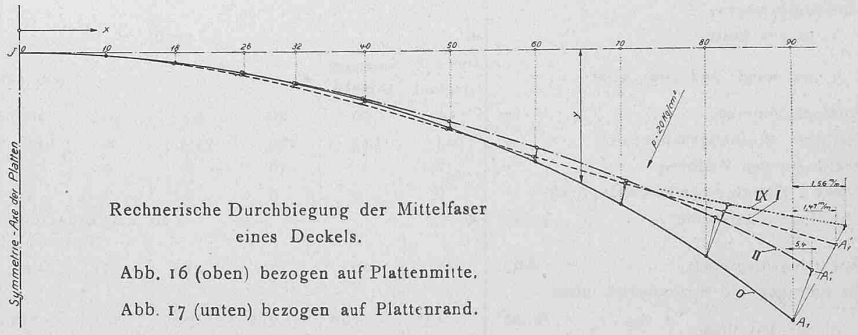
I. Die Platte ist am Rand frei aufliegend (Kurve *I*).

II. Die Platte ist am Rand so eingespannt, dass ihr Aussenquerschnitt sich wohl in Richtung senkrecht zur Symmetrieaxe parallel verschieben, nicht aber verdrehen kann. Der Kürze halber wollen wir diesen Fall mit „Platte aussen eingespannt" bezeichnen, obschon dieses Einspannen nur bedingt geschieht (Wahrung der Verschiebbarkeit) (Kurve *II*).

Die Kurve *O* stellt die Meridian-Mittelfaser (Kreisbogen) im unbelasteten Zustand dar. Es ist wohl zu beachten, dass die Masstäbe für die Mittelfaser einerseits und für ihre Durchbiegung anderseits verschieden sind, und zwar ist die Meridian-Mittelfaser aufgezeichnet im Masstab 1 : 8, die Aenderung von deren Koordinaten im Massstab 5 : 1, sodass also die Aenderungen der Koordinaten selbst in 40facher Vergrösserung dargestellt sind.

Weil wir von der Mitte aus gerechnet haben, ist in Abbildung 16 demgemäss die Verschiebung der einzelnen Punkte relativ zum Mittelpunkt J aufgetragen und dabei die Annahme gemacht, dass alle weiter aussen liegenden Punkte sich verschieben können. Die Mittelfaser geht aus ihrer ursprünglichen Lage $J A_1$ (Deckel unbelastet) über entweder in die Lage $J A_1'$ oder in die Lage $J A_1''$, je nachdem der Deckel am Rand „frei aufliegend" oder „eingespannt" ist.

Die Darstellung Abbildung 17 ist für die der Wirklichkeit eher entsprechende Annahme getroffen, dass der Randpunkt A_1 sich nur auf der Wagerechten, d. i. senk-

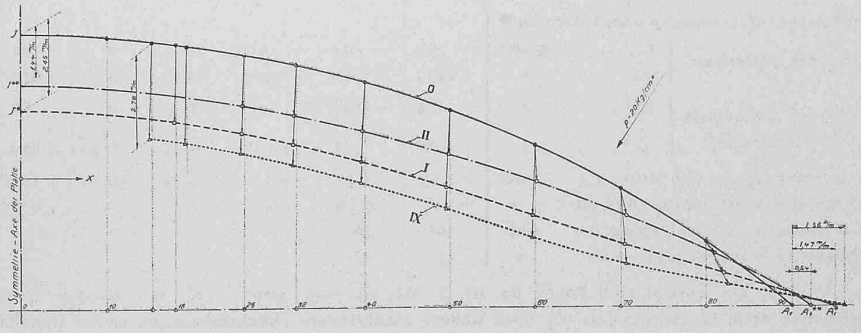


Rechnerische Durchbiegung der Mittelfaser eines Deckels.

Abb. 16 (oben) bezogen auf Plattenmitte.

Abb. 17 (unten) bezogen auf Plattenrand.

(Masstäbe und Bezeichnungen vergleiche Text.)



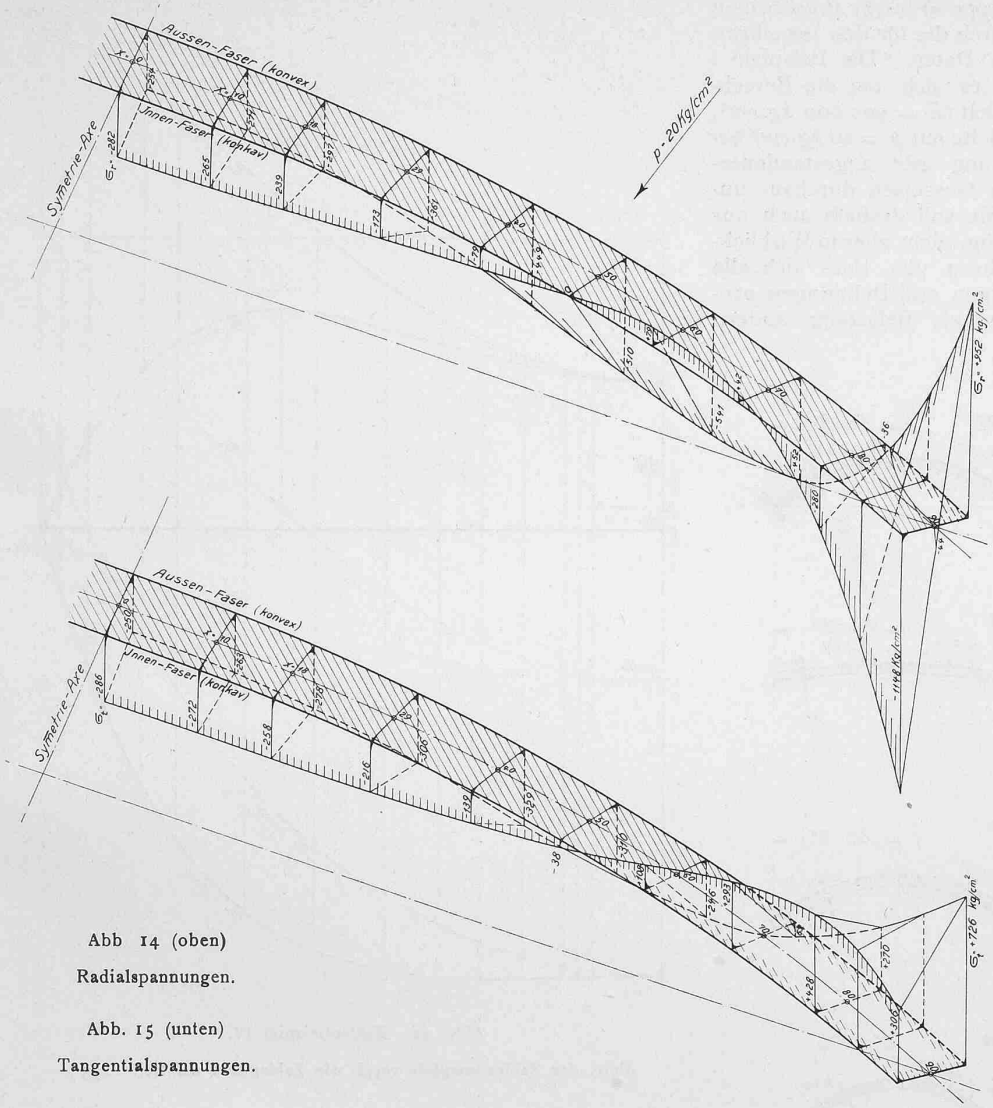


Abb 14 (oben)

Radialspannungen.

Abb. 15 (unten)

Tangentialspannungen.

Die für die wirklichen Koordinatenänderungen gefundenen Rechnungswerte sind in den Abbildungen 16 und 17 eingeschrieben. (Für Fall II, d. h. „aussen eingespannt", ist der Wert Δx_a nicht zuverlässlich. Vermutlich liegt ein Rechenfehler vor infolge der Wahl zu grosser Intervalle für dx gegen den Aussenrand hin.)

Nach unserer Rechnung und nach Abbildung 17 kommt die grösste Aenderung der Koordinate in Richtung parallel zur Symmetrieaxe in der Mitte der Platte vor, wie nicht anders zu erwarten war. Sie beträgt bei der frei aufliegenden Platte 2,45 *mm*, bei der am Rand eingespannten Platte nur 1,44 *mm*.

Der äusserste Punkt A_1 der Meridian-Mittelfaser verschiebt sich um 1,47 *mm* nach aussen, wenn die Platte aussen frei aufliegend, dagegen nur um rund 0,56 *mm*, wenn die Platten „aussen eingespannt".

Von der Wiedergabe aller Rechnungs- und insbesondere der Zwischenwerte wurde mit Rücksicht auf deren grosse Zahl abgesehen.

Im Anschluss an diese eingehend besprochenen Beispiele I und II wurden noch zehn weitere Beispiele durchgerechnet. In Zahlentafel 8 sind von allen zwölf Beispielen die ihnen zugrunde gelegten Bedingungen zusammengestellt. Die Hauptabmessungen der durchgerech-

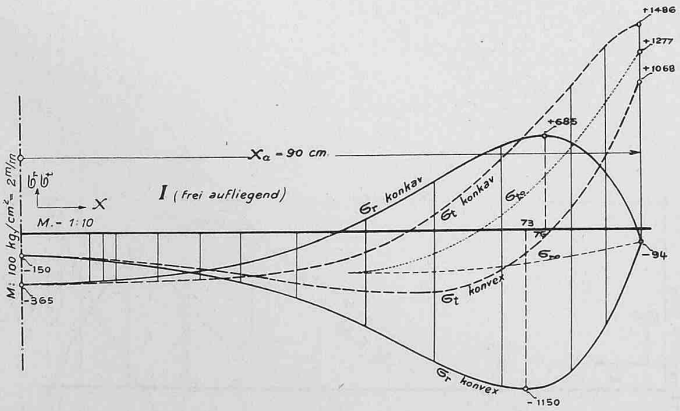


Abb. 19. Zahlenbeispiel I (frei aufliegend).

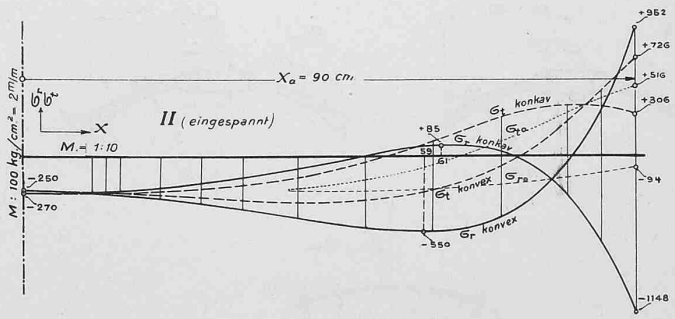


Abb. 20. Zahlenbeispiel II (eingespannt).

	Für I	Für II
ϱ in *cm* = konstant	143	143
χ_a in *cm*	90	90
χ_i in *cm*	0	0
h in *cm* = konstant	6	6
p in *at*	— 20	— 20

recht zur Symmetrieaxe, nicht aber parallel hierzu bewegen könne, und zwar nach den Lagen A_1^* oder A_1^{**}, je nachdem die Platte am Rand frei aufliegt oder eingespannt ist. Der Mittelpunkt der Platte bewegt sich hierbei aus der ursprünglichen Lage J nach J^* oder J^{**}.

neten Platten finden sich in Abbildung 18, I bis X (S. 156). Diese Beispiele geben über folgende Fragen Aufschluss:

a) Unterschied zwischen den Randbedingungen „Platte aussen frei aufliegend" und „eingespannt".
b) Einfluss der Plattenwölbung.
c) „ „ Plattendicke.
d) „ „ Grösse des äussern Halbmessers „x_a".
e) „ „ Bohrung und der versteifenden Nabe.
f) „ „ Verdickung des Plattenrandes.
g) Unterschied zwischen „aussen nachgiebig eingespannt" und „fest eingespannt".

Die einer und derselben Gruppe a) bis g) angehörigen Platten unterscheiden sich nur durch die für den jeweiligen Programmpunkt gekennzeichneten Daten. Die Beispiele I bis IX_v haben das gemein, dass es sich um die Berechnungen gusseiserner Platten handelt ($E = 900\,000$ kg/cm^2; $m = 5$), welche von der konvexen Seite mit $p = 20$ kg/cm^2 belastet sein sollen. Diese Belastung gibt zugestandenermassen für fast alle Beispiele für Gusseisen durchaus unzulässig hohe Beanspruchungen. Sie soll deshalb auch nur für unsere vergleichsweise Rechnung, nicht aber in Wirklichkeit Gültigkeit haben. Wir erinnern uns, dass sich alle rechnerisch festgestellten Spannungen und Dehnungen proportional zur gewählten spezifischen Belastung ändern würden.

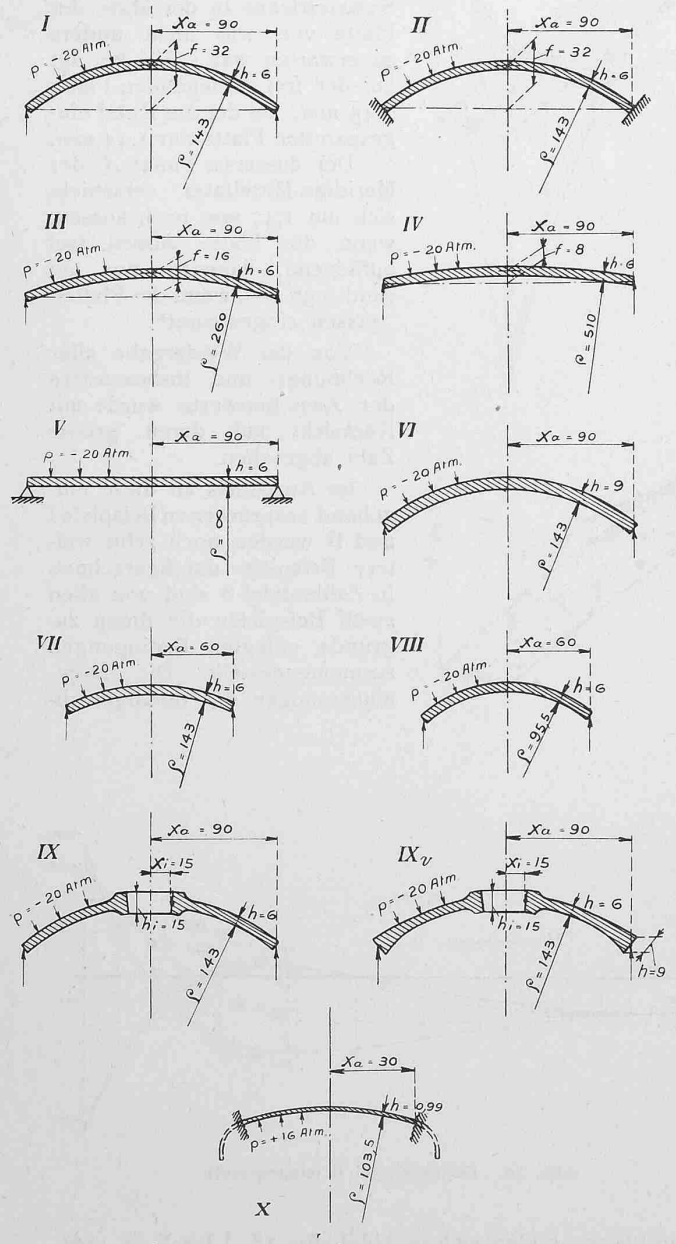


Abb. 18. Deckel nach Zahlenbeispielen I bis X. — 1 : 50.

Den Beispielen X und X_f ist der Boden aus Flusseisen zugrunde gelegt, der von Professor Dr. v. Bach bezüglich Durchbiegen untersucht und in der „Z. d. V. d. I.", 1899, S. 1585 in Abbildungen 1 und 2 abgebildet wurde. ($E = 2\,100\,000$ kg/cm^2; $m = 10/3$.) Die Hauptrechnungsergebnisse sind in den Diagrammen Abbildungen 19 bis 30 aufgetragen.

(Schluss folgt.)

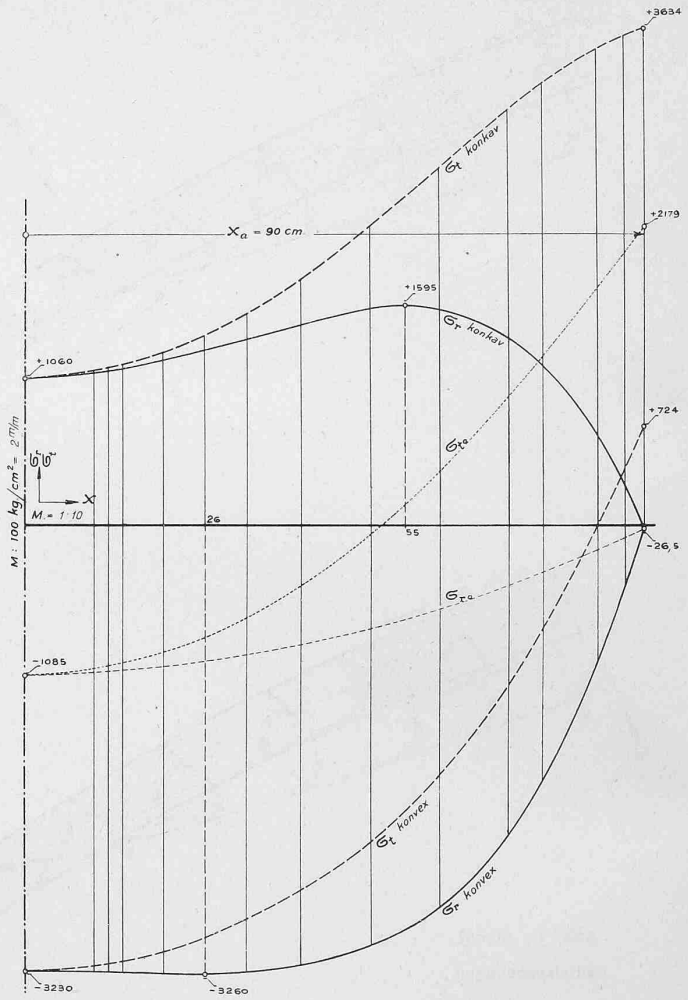


Abb. 22. Zahlenbeispiel IV.

(Betr. der Zahlenbeispiele vergl. die Zahlentafel auf Seite 153.)

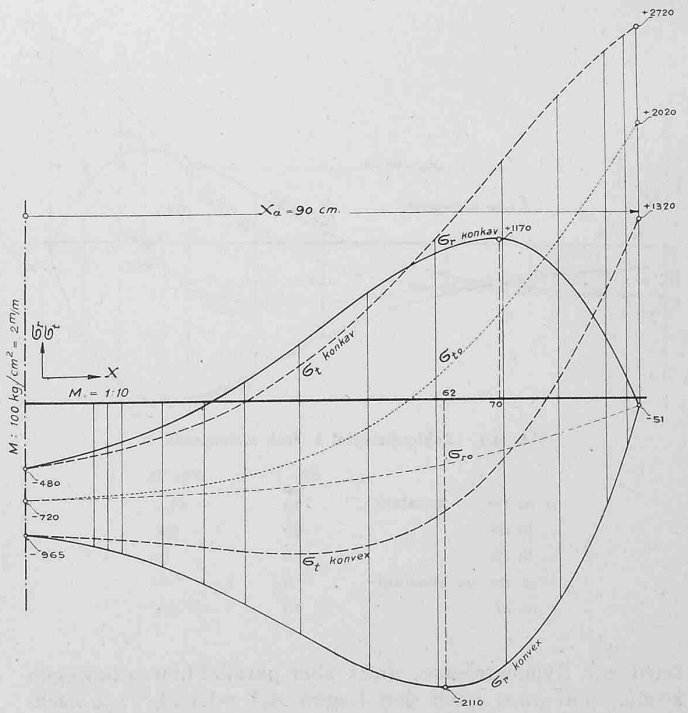


Abb. 21. Zahlenbeispiel III.

Für Zahlenbeispiel I bis IX_v ist das Material Gusseisen.

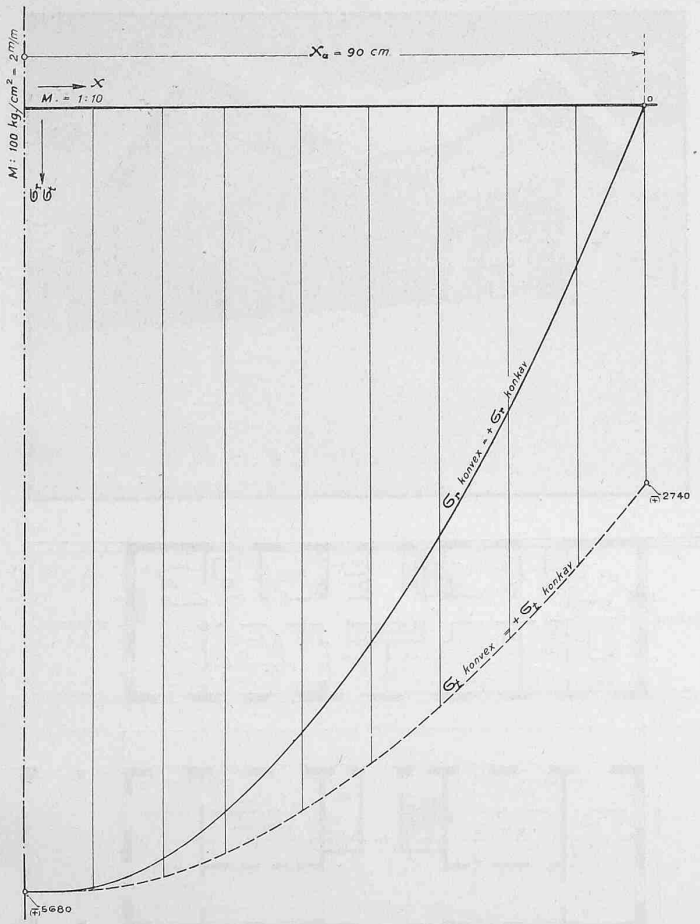


Abb. 23. Zahlenbeispiel V.

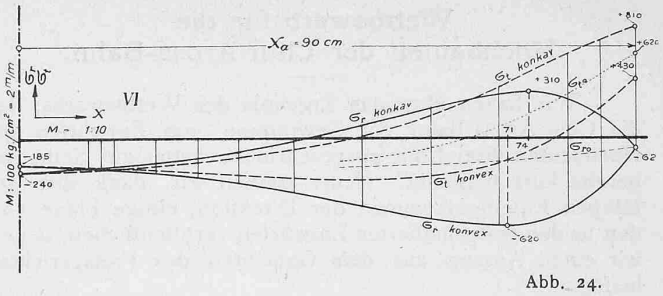


Abb. 24. Beispiel VI.

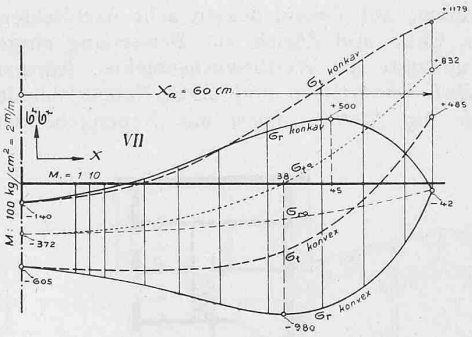


Abb. 25. Beispiel VII.

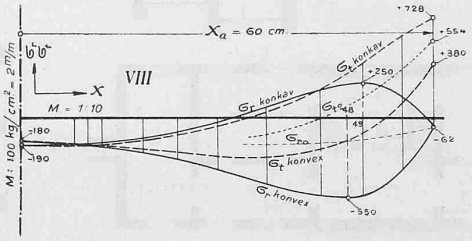
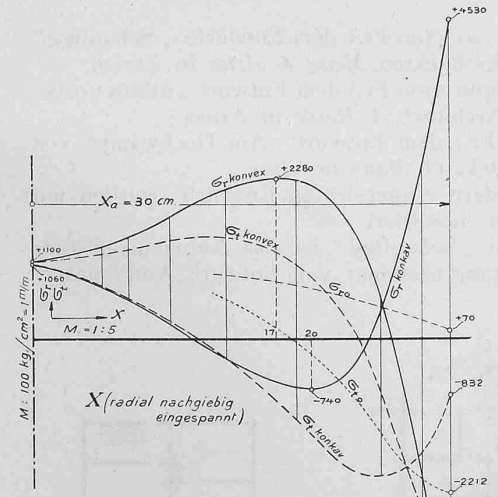
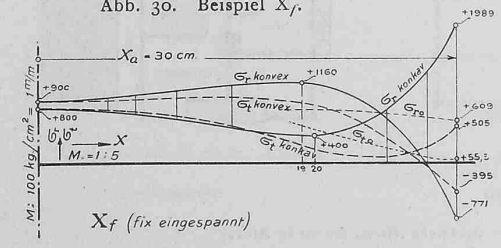


Abb 26. Beispiel VIII.



X (radial nachgiebig eingespannt)

Abb. 29. Beispiel X.



X_f (fix eingespannt)

Abb. 30. Beispiel X_f.

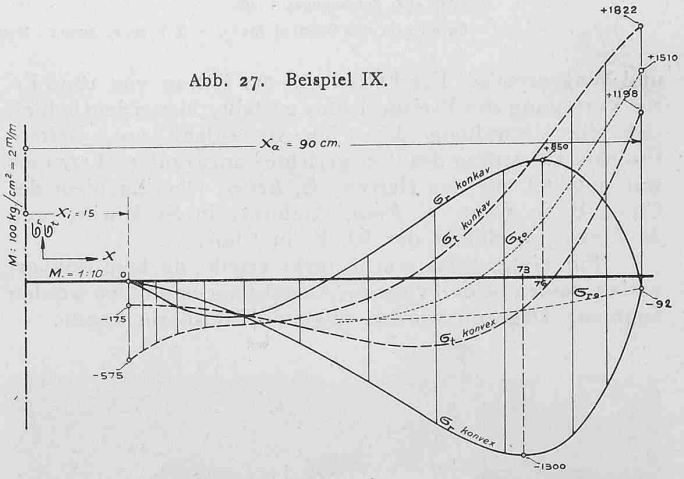


Abb. 27. Beispiel IX.

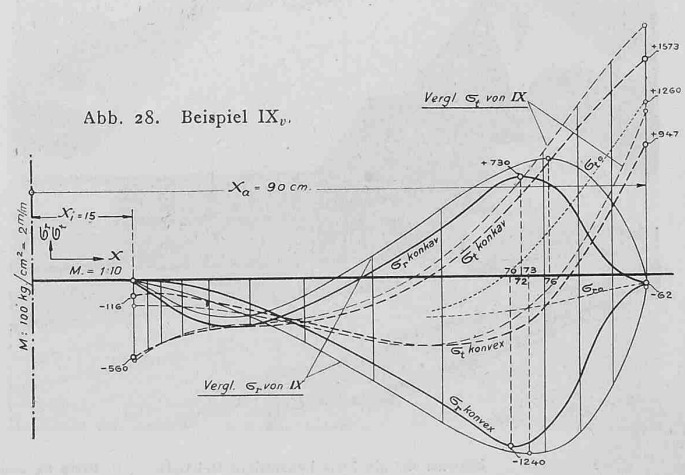


Abb. 28. Beispiel IX_v.