Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 61/62 (1913)
Heft: 9

Artikel: Berechnung gewölbter Platten
Autor: Keller, Huldreich
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-30683

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

hinten wieder um die Länge von 24,50 *m* verlängert und so fort, wie aus den Abbildungen 5 und 6 zu entnehmen. Die Breite dieses Rüstträgers war so bemessen, dass er nur den Raum zwischen den beiden Gewölberippen beanspruchte, sodass von ihm aus die Gewölberüstungen aufgestellt und die Gewölbe betoniert werden konnten. Ein leichter, aufgesetzter Dienststeg mit Geleise ermöglichte die Materialzufuhr über das ganze Bauwerk (Abbildung 7). Auf Abbildung 8 ist der Rüstträger samt dem Dienststeg noch gut zu erkennen; ersterer ermöglichte auch eine seitliche Abstützung und Verankerung der sehr leichten Gewölberüstungen. Einen weitern Baufortschritt zeigt Abbildung 9; hier werden paarweise, gleichsam an einem Wagebalken hängend, der drehbar auf einem Rollschemel ruht, die Siegwartbalken zwischen die Querträger versetzt. Abb. 10 (S. 113) lässt die ganze Gerüstung von unten erkennen, nachdem die von den Stirnkränzen getragenen Verkleidungsmauern bis unter die Gehwegkonsolen hochgeführt sind. Abbildung 11 endlich zeigt das fertige Bauwerk. Die Betonquader erhielten eine Vorsatzschicht aus grobem Kies, sodass sie ein nagelfluhähnliches Aussehen zeigen. Der Schotter zum ganzen Bau, rund 5000 m^3, wurde an der Reussmündung in den Vierwaldstättersee bei Flüelen gebaggert, sortiert und zu Schiff bis Luzern befördert.

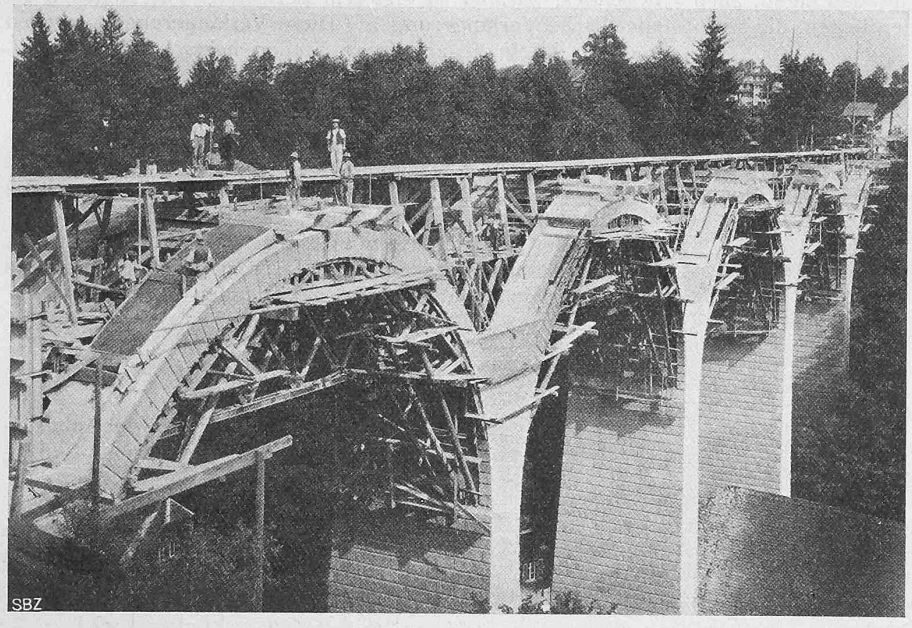


Abb. 8. Betonieren der Gewölberippen vom Dienststeg aus. Stand am 26. VII. 1912. Zwischen den Bogenrippen ist der durchlaufende Rüstträger sichtbar.

Abb. 9. Aufmauern der Verkleidungswände, Versetzen der Siegwartbalken. 3. IX. 1912.

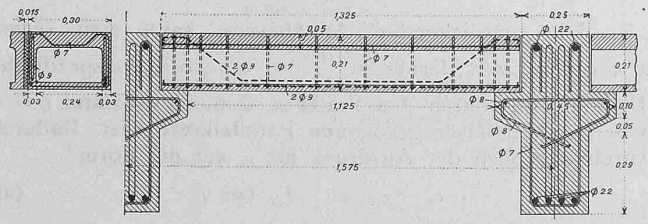


Abb. 4. Armierung der Querträger und Siegwartbalken. — 1 : 25.

Berechnung gewölbter Platten.[1])

Von Dipl. Ing. Dr. *Huldreich Keller* in Zürich.

Durch vorliegende Arbeit soll der Weg gezeigt werden für eine annäherungsweise Berechnung von gewölbten Platten. Er ist ähnlich demjenigen, den ich einer früheren Arbeit über die Berechnung von umlaufenden Radscheiben zugrunde gelegt habe[2]). Das Hauptkennzeichen dieses Rechnungsverfahrens liegt darin, dass man die Differentialgleichungen, auf die man gelangt, durch das annäherungsweise „Rechnen mit kleinen Differenzen" löst.

Unsere neue Aufgabe ist aber wesentlich umfangreicher, als die Berechnung von Radscheiben, weil zu den Normalspannungen in radialer und tangentialer Richtung, wie sie in Radscheiben fast allein vorkommen, in einer einseitig belasteten, gewölbten Platte noch Schub- und Biegungsspannungen hinzutreten.

Der Zweck vorliegender Arbeit soll insbesondere auch darin bestehen, die teils ziemlich verwickelten Formeln in eine möglichst einfache Form zu bringen, wie sie für ein am Konstruktionstisch gefordertes, hinreichend zuverlässiges Rechnen brauchbar ist, das nicht allzusehr ermüdet.

Die Berechnung soll die Möglichkeit schaffen, in einer als Drehkörper durchgebildeten, gewölbten (oder ebenen) Platte, welche von einer Seite durch einen Gas- oder Flüssigkeitsdruck belastet ist, in jedem Punkt die Beanspruchung und die Formänderung zu ermitteln. Es kommen

[1]) Wir bringen hier in abgekürzter Form eine Promotionsarbeit zur Kenntnis unserer Leser, in der für die schwierige Berechnung gewölbter Platten (z. B. Abschlussdeckel von Druckrohrleitungen, Dampfdomen u. drgl.) ein neuer, den Bedürfnissen der Praxis angepasster Weg gezeigt wird. Die Arbeit ist vollinhaltlich veröffentlicht in Heft Nr. 124 der «Forschungsarbeiten» des Vereins deutscher Ingenieure. *Red.*

[2]) Siehe «Schweiz. Bauzeitung» vom 27. Nov. 1909, Seite 307.

also Platten in Frage, wie sie als Deckel und Zwischenböden in Dampfturbinen, als Böden von Dampfkesseln oder andern Hochdruckgefässen Verwendung finden.

Das Verfahren setzt voraus, dass die Dicke der Platte im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser des Meridians klein, der Stoff durchaus homogen und dass jede schroffe Querschnittänderung vermieden sei. Ferner soll die Formänderung entsprechend der für den gebogenen Balken aufgestellten Bernoullischen Annahme derart vor sich gehen, dass alle Punkte der Platte, welche vor der Biegung auf einer zur Plattenwölbung senkrechten Geraden lagen, auch nach der Durchbiegung auf einer Geraden liegen, die senkrecht steht zur Mittelfläche[1]).

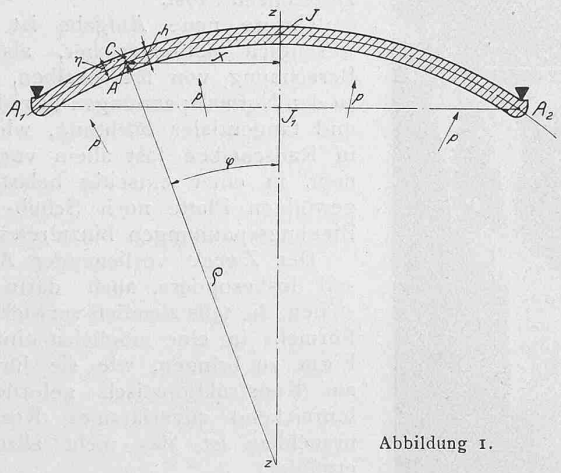


Abbildung 1.

In die Rechnung werden folgende, aus Abb. 1 ersichtliche Bezeichnungen eingeführt:

x in *cm* Abstand des auf der Meridian-Mittelfaser $\widehat{JA_1}$ gelegenen zu untersuchenden Punkes A von der Symmetrieaxe $z - z$ der Platte,

h in *cm* Dicke der Platte beim Punkt A,

η in *cm* Abstand eines auf dem durch A gehenden Krümmungshalbmesser des Meridians gelegenen Punktes C von A,

ϱ in *cm* Krümmungshalbmesser der Meridian-Mittelfaser im Punkt A,

φ Winkel zwischen diesem Krümmungshalbmesser und der Symmetrieaxe,

$\Delta\varphi = \psi$ Aenderung dieses Winkels φ bei der Durchbiegung,

$\Delta(d\varphi) = d\psi$ Aenderung des Winkelelementes $d\varphi$,

$\omega = \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi}$ spezifische Aenderung des Winkelelementes,

p in kg/cm^2 der gleichmässig verteilte, einseitige Ueberdruck, winkelrecht auf die Platte wirkend. Für eine Einzelbelastung P wären diejenigen Glieder der Rechnung, in denen sonst p vorkommt, sinngemäss zu ändern. Ein Gleiches gilt für ein Zusammenwirken einer gleichmässig verteilten Belastung p und einer Einzellast P,

σ_r in kg/cm^2 die Normalspannung in einem den Punkt C enthaltenden Flächenelement, das auf dem durch den Punkt A oder C senkrecht zur Plattenwölbung geführten Kegel liegt, dessen Symmetrieaxe mit derjenigen der Platte zusammenfällt. σ_r ist gleich gerichtet wie die Meridian-Mittelfaser. Der Hauptsache nach verläuft sie „radial"; ihr Wert sei deshalb abkürzungshalber mit „Radialspannung" bezeichnet —, dies in Anlehnung an die oben erwähnte Scheibenberechnung,

σ_t in kg/cm^2 die Normalspannung (Hauptspannung) im Meridianschnitt; sie verläuft tangential zum Parallelkreis und soll deshalb „Tangentialspannung" heissen,

τ in kg/cm^2 die Schubspannung in dem Flächenelement, auf welches σ_r winkelrecht wirkt,

E in kg/cm^2 der Elastizitätsmodul des Plattenstoffes.

In Abbildung 1 ist ein Meridianschnitt durch einen von der konkaven Seite, also im positiven Sinn mit der Pressung p belasteten Deckel gezeichnet. Durch diese Belastung p erfährt ein im Abstand x von der Symmetrieaxe $z - z$ gelegenes Element der im Meridianschnitt liegenden Mittelfaser in Richtung dieser Faser die spezifische Verlängerung ε_{r0}, ein im Abstand η von der Mittelfaser liegendes, parallel zu ersterem gerichtetes Faserteilchen die spezifische Verlängerung ε_r. Diese Verlängerungen werden bedingt durch die an diesen Stellen herrschenden Radialspannungen σ_{r0} in der Mittelfaser und σ_r im Abstand η hiervon und die Tangentialspannungen σ_{t0} und σ_t.

1. Berechnung der spezifischen Verlängerung ε_r.

Die oben gemachte Annahme, dass die Plattendicke gering sei im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser des Meridianschnittes, hat zur Folge, dass die spezifischen Dehnungen der Meridianfasern in einem linearen Verhältnis zu ihrem Abstand η von der Mittelfaser angenommen werden können, gleich wie in einem gekrümmten Balken[1])

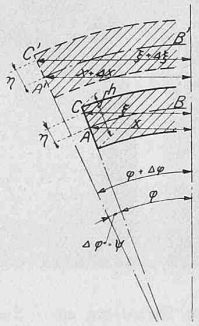


Abb. 2.

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} + (\omega - \varepsilon_{r0}) \frac{\frac{\eta}{\varrho}}{1 + \frac{\eta}{\varrho}}.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen und dadurch den praktischen Bedürfnissen anzupassen, wollen wir verschiedene Annäherungen zulassen. Weil die Dicke h der Platte im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser ϱ gering sein soll, dürfen wir setzen:

$$\varrho + \eta \backsim \varrho; \quad \left(1 + \frac{\eta}{\varrho}\right) \backsim 1.$$

Hierdurch vereinfacht sich die Gleichung für ε_r auf

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} + \omega \frac{\eta}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2. Berechnung der spezifischen Verlängerung ε_t im Parallelkreis vom Halbmesser ξ und dem Abstand η von der Mittelfaser.

In Abbildung 2 ist im vergrössertem Masse dargestellt, wie der Meridianschnitt aus seiner anfänglichen Lage $\widehat{AB}$ bei der Belastung in die Lage $\widehat{A'B'}$ verschoben wird. Dabei vergrössern sich die Halbmesser der durch den Mittelpunkt A und den im Abstand η davon gelegenen Punkt C gehenden Parallelkreise von den Anfangswerten x und ξ auf die Endwerte $(x + \Delta x)$ und $(\xi + \Delta\xi)$. Hierbei erfährt der durch den Punkt C gehende Parallelkreis eine spezifische Dehnung

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(\xi + \Delta\xi) - 2\pi\xi}{2\pi\xi} = \frac{\Delta\xi}{\xi}.$$

Nun ist gemäss Abbildung 2

$$\xi = x + \eta \sin\varphi.$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung erhält man für die Zunahme von ξ den Ausdruck

$$\Delta\xi = \Delta x + \Delta\eta \sin\varphi + \eta \cos\varphi \, \Delta\varphi.$$

Wegen der Kleinheit von η und der daraus folgenden Kleinheit von $\Delta\eta$ wird auf der rechten Seite der zweite Summand gegenüber den beiden anderen Summanden vernachlässigt, und es bleibt noch

$$\Delta\xi = \Delta x + \eta \, \Delta\varphi \cos\varphi.$$

Diesen Wert eingesetzt in die Gleichung $\varepsilon_t = \frac{\Delta\xi}{\xi}$, gibt

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta x + \eta \, \Delta\varphi \cos\varphi}{x + \eta \sin\varphi}.$$

Mit hinreichender Annäherung kann man setzen $x + \eta \sin\varphi \backsim x$; ferner ist $\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_{t0}$, wo ε_{t0} die spezifische Dehnung des durch den Punkt A, d. h. im Abstand $\eta = 0$ von der Mittelfaser gezogenen Parallelkreises ist. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck für ε_t auf die Form:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t0} + \frac{\eta}{x} \Delta\varphi \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

[1]) Dies trifft für gusseiserne gewölbte Platten nur annäherungsweise zu. Vergl. Bach, «Elastizität und Festigkeit», 1902, Seite 504 u. ff., über «gekrümmte, stabförmige Körper».

[1]) Vergl. Bach, «Elastizitäts- und Festigkeitslehre», 1902, Seite 472.

Hierin sind aber vorläufig weder ε_{t0} noch $\Delta\varphi$ bekannt.

3. Berechnung der im Punkt C herrschenden Radialspannung σ_r und Tangentialspannung σ_t.

Die Elastizitätslehre[1]) gibt zwischen den Spannungen und den Dehnungen die Beziehungen:

$$\sigma_r = \frac{m\,E}{m^2-1}\left[m\,\varepsilon_r + \varepsilon_t\right];$$

$$\sigma_t = \frac{m\,E}{m^2-1}\left[\varepsilon_r + m\,\varepsilon_t\right],$$

wo m das Verhältnis der spezifischen Längsdehnung zur linearen Querzusammenziehung eines auf reinen Zug beanspruchten Stabes bedeutet[2]).

Wir setzen

$$c = \frac{m\,E}{m^2-1}.$$

Unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2) erhalten wir

$$\sigma_r = c\left[m\,\varepsilon_{r0} + m\,\omega\frac{\eta}{\varrho} + \varepsilon_{t0} + \frac{\eta}{x}\Delta\varphi\cos\varphi\right] \text{ und}$$

$$\sigma_t = c\left[\varepsilon_{r0} + \omega\frac{\eta}{\varrho} + m\,\varepsilon_{t0} + m\frac{\eta}{x}\Delta\varphi\cos\varphi\right].$$

Setzen wir in diesen beiden Gleichungen $\eta = 0$, so erhalten wir als Sonderfälle die Normalspannungen im Abstand x von der Symmetrieaxe und in der jeweiligen Mittelfaser des Meridianschnittes und des Parallelkreisschnittes:

$$\sigma_{r0} = c\left[m\,\varepsilon_{r0} + \varepsilon_{t0}\right]$$
$$\sigma_{t0} = c\left[\varepsilon_{r0} + m\,\varepsilon_{t0}\right].$$

Berücksichtigt man ferner, dass

$$\omega = \frac{\Delta\,d\varphi}{d\varphi};\quad \frac{\omega}{\varrho} = \frac{\Delta\,d\varphi}{\varrho\,d\varphi} = \frac{\Delta\,d\varphi}{ds};\quad ds = \frac{dx}{\cos\varphi};\quad \Delta\,d\varphi = d\psi,$$

so gehen die Gleichungen für σ_r und σ_t über in die Form

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + c\,\eta\cos\varphi\left[m\frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{x}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\sigma_t = \sigma_{t0} + c\,\eta\cos\varphi\left[\frac{d\psi}{dx} + m\frac{\psi}{x}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Setzen wir in diesen beiden Gleichungen als Sonderwerte für η die Grenzwerte $\left(\pm\frac{h}{2}\right)$ ein, so erhalten wir die Spannungen σ_r und σ_t in den Aussen- und Innenfasern der Platte. — Um nun für jeden Punkt der Platte die Werte σ_r und σ_t berechnen zu können, wollen wir vorerst für σ_{r0}, σ_{t0} und ψ Beziehungen aufstellen.

[1]) Siehe Föppl's «Festigkeitslehre», Band III, 1909, Seite 246.

[2]) z. B. für Stahl $m \infty 10/3$; für Gusseisen: $m = 5$ bis 9.

Die neue Strassenbrücke bei Rothenburg, Kanton Luzern.

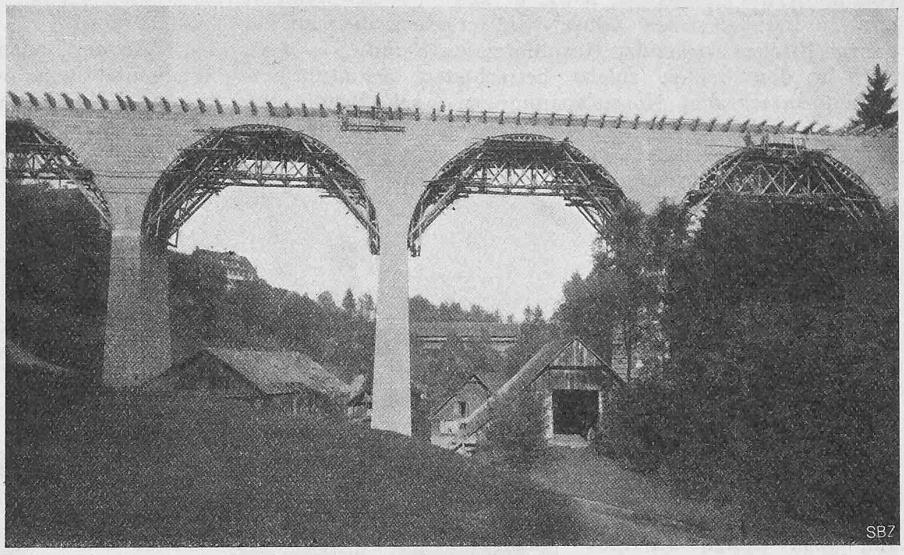


Abb. 10. Blick von unten in die Rüstungen. Stand der Arbeiten am 30. IX. 1912.

4. Berechnung von σ_{r0} unter Vermittlung der Gleichgewichtsbedingung der am Plattenelement angreifenden Kräfte.

Wir denken uns gemäss Abbildung 3 im Abstand x von der Symmetrieaxe aus der Platte ihrer ganzen Höhe nach ein Element in Richtung des Meridians und des Parallelkreises von vorerst unendlich kleinen Grundriss-Abmessungen herausgeschnitten. Die vier Schnittflächen sollen alle senkrecht stehen zu den Meridian- und Parallelkreis-Mittelfasern des Elementes. Zwei dieser Schnittflächen sollen Ebenen sein, durch die Symmetrieaxe gehen und unter sich den Winkel $d\alpha$ einschliessen. Winkelrecht auf die von ihnen gebildeten Seitenflächen $GCDH$ und $EFKI$ des Plattenelementes wirken die Tangentialspannungen σ_t im Abstand η von der mittlern Meridianfaser und σ_{t0} in der Mittelfaser selbst, und diese haben die Richtung der Tangenten an die bezüglichen Parallelkreise. Die auf diese beiden Seitenflächen wirkenden Resultierenden seien T, welche ebenfalls den Winkel $d\alpha$ miteinander einschliessen.

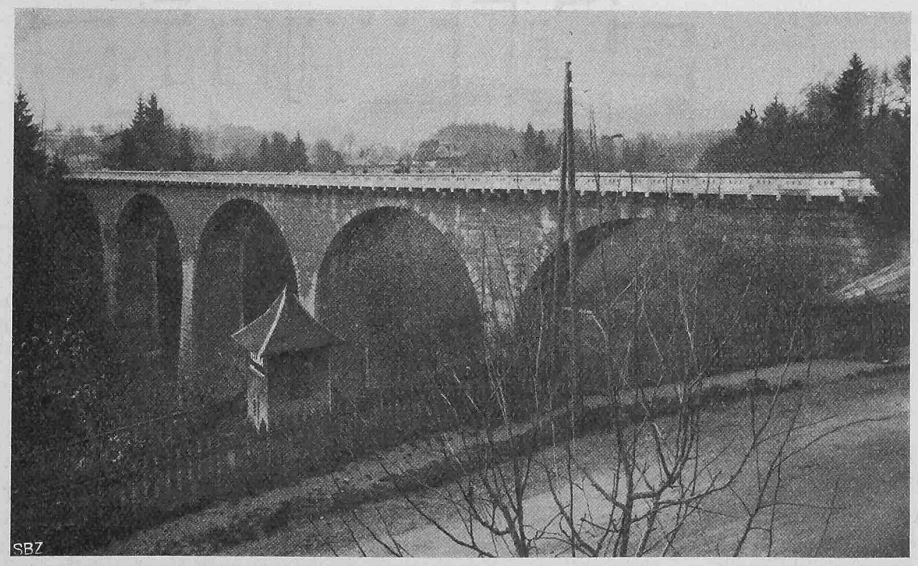


Abb. 11. Ansicht der vollendeten Rothenburger Brücke. — 15. X. 1912.

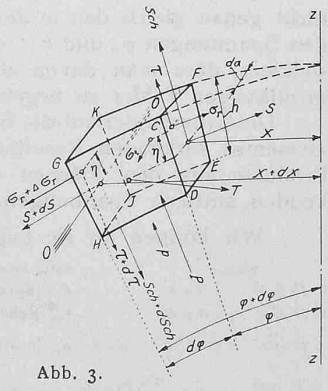


Abb. 3.

Die beiden andern Schnittflächen für das Plattenelement, nämlich $CDEF$ und $GHIK$, sind eigentlich Kegelflächen, dürfen ihrer Kleinheit wegen jedoch als Ebenen betrachtet werden. Sie schliessen unter sich den Winkel $d\varphi$ und mit der Symmetrieaxe $z - z$ die Winkel φ

und $(\varphi + d\varphi)$ ein. Die in diesen Flächen herrschenden Normalspannungen seien σ_r und $(\sigma_r + d\sigma_r)$ im Abstand η vom mittlern Parallelkreis, sowie σ_{r0} und $(\sigma_{r0} + d\sigma_{r0})$ in den mittlern Parallelkreisen selbst. Sie ergeben die auf die ganzen Flächen wirkenden Resultierenden S und $(S + dS)$.

In den beiden zuletzt betrachteten Schnittflächen wirken ausser den Normalspannungen noch Schubspannungen τ und $(\tau + d\tau)$, welche die Resultierenden Sch und $(Sch + d\,Sch)$ erzeugen. Es sei gleich an dieser Stelle hervorgehoben, dass diese in Richtung des Krümmungshalbmessers wirkenden Schubspannungen in der Mitte der Flächen einen Höchstwert τ_0, am Rand der Flächen, z. B. an den Kanten CF und DE jedoch den Wert o haben. Ihr Mittelwert τ_m tritt also nicht in der wagerechten Mittellinie der Seitenfläche $CDEF$ auf, doch wollen wir dies nicht weiter verfolgen, da sich dieser Wert aus der Rechnung ganz eliminieren lässt.

Weil die Seitenflächen nicht Quadrate, sondern trapezähnliche Flächen sind, so sind die in ihnen wirkenden mittlern Normalspannungen σ_{rm} und σ_{tm} auch nicht genau gleich den in den Mittelfasern herrschenden Spannungen σ_{r0} und σ_{t0}; doch ist der Unterschied so klein, dass man davon absehen darf, ohne einen unzulässigen Fehler zu begehen.

Die Grössen der auf die Seitenflächen des Plattenelementes wirkenden Resultierenden ergeben sich als Produkte aus den Flächen und den in ihnen wirkenden mittlern Spannungen.

Wir können für sie folgende Aufstellung machen:

Fläche	mittl. Spannung	Resultierende	
$CDEF = x\,d\alpha\,h$;	σ_{r0} (normal);	$S = (x\,h)\,\sigma_{r0}\,d\alpha$ . . .	(5)
$CDEF = x\,d\alpha\,h$;	τ_m (Schub);	$Sch = (x\,h)\,\tau_m\,d\alpha$ . . .	(6)
$CDHG = FEIK = ds\,h$;	σ_{t0} (normal);	$T = ds\,h\,\sigma_{t0} = \frac{dx}{\cos\varphi}\,h\,\sigma_{t0}$	(7)
$DEIH = \left(x + \frac{dx}{2}\right) d\alpha\,ds$; $= \left(x + \frac{dx}{2}\right)\frac{dx}{\cos\varphi}\,d\alpha$;	p	$P = p\frac{dx}{\cos\varphi}\left(x + \frac{dx}{2}\right) d\alpha$	(8).

(Im Ausdruck für P werden wir $\frac{dx}{2}$ gegenüber x nicht vernachlässigen mit Rücksicht auf die später durchgeführte Rechnung mit endlich kleinen Differenzen statt unendlich kleinen Differentialen, weil sonst bei kleinem x der Fehler zu gross würde.) (Forts. folgt.)

Beamtenwohnhäuser in Schlieren.

Erbaut durch Architekt *J. B. Frisch*, Zürich.

(Mit Tafel 27.)

An der Badenerstrasse in Schlieren hat die „Schweiz. Waggonfabrik Schlieren" die Beamtenwohnhäuser erbauen lassen, die auf Tafel 27 und in Abbildungen 1 und 2 hier dargestellt sind. Ausser zehn Wohnungen von vier bis fünf Zimmern enthält die Häusergruppe im Erdgeschoss auch als Kaufläden vermietbare Räume, die zurzeit von der Gemeindeverwaltung und der Kantonalbank-Filiale benützt werden. Der Ausbau ist einfach, aber gut; die Wohnzimmer erhielten Hochtäfer, sowie vom Gang aus heizbare Dauerbrenner-Kachelöfen, die jeweils zwei Zimmern dienen. Das Aeussere trägt gelblich-grauen Rauhputz, das Dach dunkelrote Biberschwänze; die Fensterladen sind grün, die Fenstersprossen weiss. Durchaus dem Zürcher Giebelhaus entsprechend sind die angenehmen, ruhigen Verhältnisse der Fenster und Dächer, abgesehen von der Dachausladung über dem linken Flügel. Ohne Umgebungsarbeiten und Architektenhonorar ergaben sich die Baukosten zu rund 30 Fr./m^3.

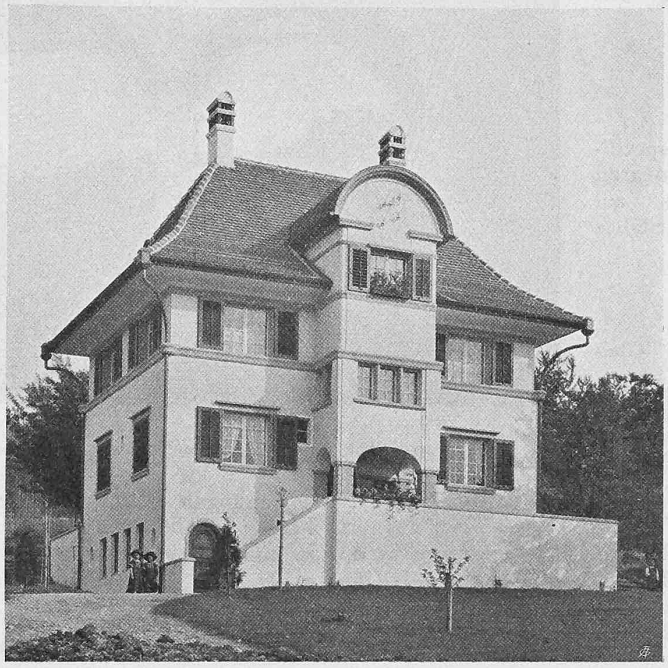


Abb. 3. Einfamilienhaus St. Luisoni in Schlieren, von Norden.

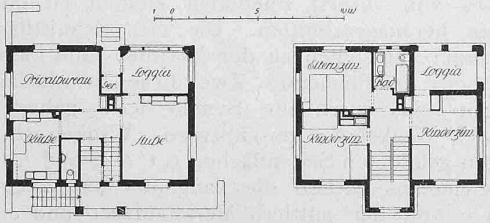
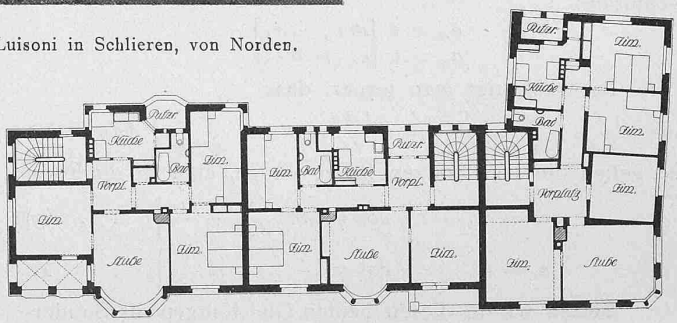


Abb. 4 und 5. Grundrisse vom Erdgeschoss und Obergeschoss 1 : 400 des Einfamilienhauses Luisoni in Schlieren. Architekt *J. B. Frisch* in Zürich.



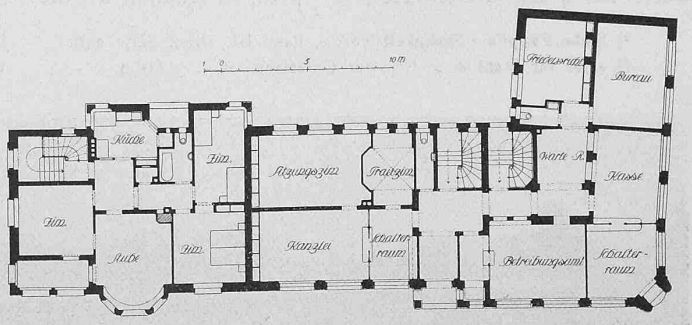


Abb. 1 u. 2. Grundrisse der Beamtenhäuser in Schlieren. — 1 : 400.

Einfamilienhaus in Schlieren.

Vom gleichen Architekten stammt auch das freundliche Wohnhaus, das unser leider so früh verstorbener Kollege, Ingenieur St. Luisoni, oberhalb des Dorfes Schlieren sich hatte erbauen lassen (Abbildungen 3 bis 5). Da Aussichtsseite und Sonnenseite an diesem nach Norden fallenden Hang entgegengesetzt gerichtet sind, hat der Architekt an