

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 57/58 (1911)
Heft: 4

Artikel: Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen
Autor: Ritter, Max
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-82553>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Der kontinuierliche Balken auf drehbaren Stützen. — Schulhaus Niederurnen. — Das Wasserkraftwerk Adamello. — Städtebau-Ausstellung Zürich 1911. — Eidgenössische polytechnische Hochschule. — Miscellanea: Neue Seewasserversorgung der Stadt Zürich. Schweizerischer Wasserwirtschafts-Verband. Österreichische Einphasenbahnen. Gasheizung für Backöfen. Eidgenössisches Polytechnikum. Schweizerische Binnenschiffahrt. Schweizerische Bundesbahnen. Ingenieur H. Bleuler-Hüni in

Zürich. Ergänzungsbau des Theodosianums in Zürich. Kubelwerk St. Gallen. — Vereinsnachrichten: Bernischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Gesellschaft ehemaliger Studierender: Stellenvermittlung.

Tafel 9 bis 12: Schulhaus Niederurnen.

Band 57.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 4.

Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen.

Von Dr.-Ing. Max Ritter in Zürich.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die in Abbildung 1 skizzierte Tragkonstruktion, die im Eisenbau und namentlich im Eisenbetonbau häufig zur Anwendung gelangt. Ein vollwandiger Balken ruht auf beliebig vielen, mit ihm starr verbundenen Stützen oder Säulen und wird derart beansprucht, dass sich die Deformation in der Ebene des Systems vollzieht. Die Stützen können unten eingespannt oder gelenkartig gelagert sein; ihre Widerlager mögen als unnachgiebig vorausgesetzt werden.

Das System ist vielfach statisch unbestimmt. Die statische Untersuchung kann nach der allgemeinen Methode der technischen Elastizitätslehre erfolgen; man erhält aber, sobald die Zahl der Stützen ein bescheidenes Mass übersteigt, so viele Elastizitätsgleichungen, dass sich die zahlenmässige Durchführung der Berechnung äusserst zeitraubend und mühevoll gestaltet. Um zu praktisch brauchbaren Rechnungsmethoden zu gelangen, wollen wir in der Folge bei der Berechnung der Formänderungen den unbedeutenden Einfluss der Normalkräfte und der Querkräfte vernachlässigen. Diese Vereinfachung, die auch bei manchen andern Aufgaben der Elastizitätslehre üblich ist (Knicktheorie, Bogenträger mit grossem Pfeilverhältnis), erleichtert die Untersuchung des Systems sehr wesentlich. Das Problem ist jetzt nahe verwandt mit der Theorie des kontinuierlichen Balkens auf frei drehbaren Auflagern; der Unterschied besteht nur darin, dass die Säulen einer Drehung des Balkens einen elastischen Widerstand entgegensetzen, wodurch beide Teile Nebenspannungen erleiden. Die Ueberschrift der vorliegenden Arbeit findet hierin ihre Rechtfertigung.

In der Literatur ist der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen schon mehrfach behandelt worden. Am bekanntesten ist wohl die elegante, graphische Lösung von W. Ritter im dritten Bande seiner „Anwendungen der graphischen Statik“, die neuerdings im Eisenbetonbau ausgedehnte Anwendung gefunden hat; auch die bemerkenswerten Arbeiten von Prof. A. Ostenfeld in Kopenhagen haben sich Eingang in die Praxis verschafft. Es muss indessen bemerkt werden, dass diese und andere Lösungen sich auf die vereinfachende Annahme stützen, das obere Ende jeder Stütze bleibe während der Deformation in Ruhe. Diese Voraussetzung trifft wohl zu bei symmetrischer Anordnung des Systems und der Belastung, oder dort, wo ein festes Endauflager vorhanden ist; sie versagt aber vollständig, wenn die Wirkung einer wagrechten Last, z. B. einer Bremskraft, oder der (meist beträchtliche) Einfluss einer Wärmeänderung verfolgt werden soll. Um die letztgenannten Einflüsse näher zu untersuchen, stehen zwar zur Zeit verschiedene Verfahren zur Verfügung (W. Ritter, G. Mantel, H. Müller-Breslau), die aber alle die Auflösung einer grösseren Zahl von Gleichungen erfordern und in der Anwendung zum mindesten unbequem sind.

Die folgenden, zum grösseren Teil analytischen Untersuchungen beruhen auf neuen, jedoch ganz elementaren Betrachtungen. Von den allgemeinen Deformationsgleichungen des an beiden Enden elastisch eingespannten Stabes ausgehend, wird zunächst eine anschauliche Definition der

„Festpunkte“ gegeben, die in der Theorie des kontinuierlichen Balkens bekanntlich eine wichtige Rolle spielen. Zur Bestimmung der Lage der Festpunkte werden einfache, auch bei veränderlichem Trägheitsmoment anwendbare Formeln abgeleitet. Es wird sodann die *Anwendung der Festpunkte zur Ermittlung der Momentenflächen infolge einer lotrechten und einer wagrechten Belastung, als auch einer Wärmeänderung des Balkens* gezeigt. Ein Beispiel erläutert die zahlenmässige Durchführung der Untersuchung.

1. Die Formänderung der Stützen.

Eine lotrechte, unten vollständig eingespannte Säule (Abb. 2) werde am Kopfe durch die horizontale Kraft H und das Moment M beansprucht; wir fragen nach der Bewegung des Endquerschnittes. Das Gesetz der Superposition liefert die horizontale Verschiebung

$$e = H e_H + M e_M,$$

und die Drehung

$$\alpha = H \alpha_H + M \alpha_M,$$

wobei e_H und α_H die Bewegungen infolge $H = 1$, e_M und α_M diejenigen infolge $M = 1$ bezeichnen. Nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen ist $e_M = \alpha_H$. Eliminiert man H , so erhält man

$$\alpha = e \frac{\alpha_H}{e_H} + M \left(\alpha_M - \frac{\alpha_H^2}{e_H} \right) \dots \dots \quad (1)$$

Wenn das Moment von H entgegengesetzt zu M wirkt, und $M < H h$ ist, so besitzt die elastische Linie einen Wendepunkt R , der vom Säulenkopf den Abstand

$$r = - \frac{M}{H} = \frac{e_H}{\alpha_H - \frac{e}{M}} \dots \dots \quad (2)$$

hat. Meist ist das Trägheitsmoment J_s längs der Säulenachse konstant; dann ist nach bekannten Formeln

$$e_H = \frac{h^3}{3 E J_s}, \quad \alpha_H = \frac{h^2}{2 E J_s}, \quad \alpha_M = \frac{h}{E J_s},$$

und die obigen Beziehungen gehen über in

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{e}{h} + M \frac{h}{4 E J_s}, \dots \dots \quad (3)$$

$$r = \frac{2 h}{3 - \frac{6 E J_s e}{M h^2}} \dots \dots \quad (4)$$

Bleibt der Säulenkopf während der Deformation in Ruhe, $e = 0$, so liegt der Wendepunkt R im untern Drittel der Säule. Das Moment $M = 1$ erzeugt in diesem Falle

$$\alpha = \varepsilon_s = \alpha_M - \frac{\alpha_H^2}{e_H}$$

und bei konstantem Trägheitsmoment

$$\alpha = \varepsilon_s = \frac{h}{4 E J_s} \dots \dots \quad (5)$$

Wenn die Säule unten gelenkartig gelagert ist, so fällt der Wendepunkt ins Gelenk und man erhält für konstantes Trägheitsmoment die leicht abzuleitende Formel

$$\alpha = \frac{e}{h} + M \frac{h}{3 E J_s} \dots \dots \quad (6)$$

und für $e = 0$ und $M = 1$

$$\alpha = \varepsilon_s = \frac{h}{3 E J_s} \dots \dots \quad (7)$$

h bedeutet den Abstand des Einspannungsquerschnittes bzw. des Gelenkes von der Balkenachse. Streng genommen sollte man das Trägheitsmoment der Säule von der Balkenunterkante bis zur Balkenachse unendlich gross annehmen; die obigen einfachen Formeln sind aber praktisch stets genau genug.

2. Die Grundgleichungen.

Wir denken uns irgend eine Öffnung $AB = l$ des kontinuierlichen Balkens unmittelbar an den Stützen durch-

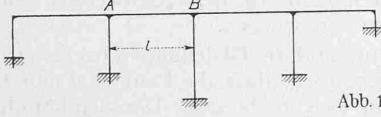


Abb. 1

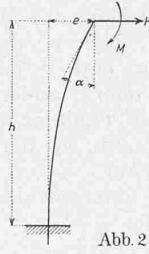


Abb. 2

geschnitten und an den Endquerschnitten die unbekannten Momente M_1 und M_2 , die vorher dort gewirkt haben, als äussere Kräfte angebracht. Die elastische Linie bildet an den Enden mit der Horizontalen die Winkel α und β , die wir positiv rechnen, wenn sie, wie in Abbildung 3 geöffnet sind. Bezeichnen dann am frei aufliegenden Balken

α_0, β_0 die Winkeldrehungen der elastischen Linie infolge der Belastung,

α_1, β_1 diejenigen infolge $M_1 = 1$,

α_2, β_2 diejenigen infolge $M_2 = 1$,

so ist nach dem Gesetze der Superposition

$$\alpha = \alpha_0 + M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2, \dots \quad (8a)$$

$$\beta = \beta_0 + M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2, \dots \quad (8b)$$

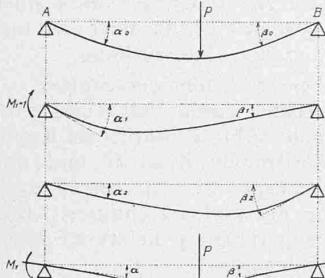


Abbildung 3

Erster Fall:

Die Ursache der Winkeldrehung α liegt rechts vom Punkte A , der während der Deformation in Ruhe bleibt. Dann ist α eine Funktion von M_1 allein, was man erkennt, wenn man den Teil der Konstruktion links von A betrachtet (vergl. Abbildung 1). Er steht unter dem alleinigen Einflusse des Momentes M_1 !); somit ist, wenn das Superpositionsgegesetz gilt,

$$\alpha = -\varepsilon_1 M_1, \dots \quad (9a)$$

wo ε_1 die Drehung des Eckpunktes A nach Wegnahme des Balkenstückes AB infolge $M_1 = -1$ bezeichnet. In Verbindung mit Gleichung (8a) ergibt sich

$$\alpha_0 + M_1 (\alpha_1 + \varepsilon_1) + M_2 \alpha_2 = 0 \dots \quad (10a)$$

Wenn die Öffnung AB unbelastet ist, so ist $\alpha_0 = 0$. Die Momentlinie verläuft dann gerade (Abbildung 4); der Abstand a des Momentennullpunktes F_1 vom Auflager A folgt aus obiger Gliederung zu

$$a = \frac{M_1}{M_1 - M_2} l = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1} l \dots \quad (11a)$$

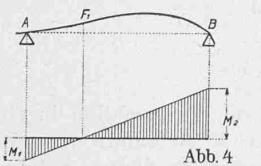


Abbildung 4

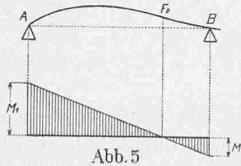


Abbildung 5

Zweiter Fall:

Die Ursache der Winkeldrehung β liegt links vom Punkte B , der während der Deformation in Ruhe bleibt. Dann ist

$$\beta = -\varepsilon_2 M_2, \dots \quad (9b)$$

wo ε_2 die Drehung des Eckpunktes B infolge $M_2 = -1$ bezeichnet. Gleichung (8b) geht über in

$$\beta_0 + M_1 \beta_1 + M_2 (\beta_2 + \varepsilon_2) = 0 \dots \quad (10b)$$

Ist die Öffnung AB unbelastet, so ist $\beta_0 = 0$. Die Momentenlinie verläuft gerade (Abbildung 5); das Moment verschwindet in einem Punkte F_2 , der vom Auflager B um die Strecke

$$b = \frac{M_2}{M_2 - M_1} l = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_2} l \dots \quad (11b)$$

entfernt liegt.

Dritter Fall:

Die Ursache der Winkeldrehungen α und β liegt zwischen den Punkten A und B , die während der Deformation

¹⁾ In der Regel wird außer dem Moment M_1 noch eine horizontale Kraft H wirken, die aber zufolge unserer Annahme, dass der Punkt A in Ruhe bleibt, außer Betracht fällt.

in Ruhe bleiben. Dieser Fall schliesst die früheren in sich und ist nur denkbar, wenn die Öffnung AB belastet ist. Die Gleichungen (10a) und (10b) gelten gleichzeitig. Sie lassen sich leicht nach M_1 und M_2 auflösen; man findet

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{\alpha_0 (\varepsilon_2 + \beta_2) - \beta_0 \alpha_2}{(\varepsilon_1 + \alpha_1) (\varepsilon_2 + \beta_2) - \alpha_2 \beta_1}, \\ M_2 &= -\frac{\beta_0 (\varepsilon_1 + \alpha_1) - \alpha_0 \beta_1}{(\varepsilon_1 + \alpha_1) (\varepsilon_2 + \beta_2) - \alpha_2 \beta_1}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (12)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment lassen sich mittelst dieser Gleichungen jene eleganten, graphischen Konstruktionen zur Bestimmung der Schlusslinie der Momentenfläche ableiten, die Prof. W. Ritter auf Grund ganz anderer Erwägungen gefunden und in seinem bereits zitierten Buche veröffentlicht hat. In Abbildung 6 ist die bekannte Konstruktion für gleichmässig verteilte Belastung vorgeführt. Dass diese Konstruktion auch gilt, wenn das Trägheitsmoment des Balkens von der Balkenmitte gegen die Auflager nach einer beliebigen Potenzfunktion zunimmt (Balken mit Vouten), ist vom Verfasser in Band 53, Nr. 18 der „Schweizer. Bauzeitung“ ausführlich bewiesen worden.

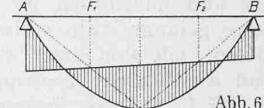


Abbildung 6

Wie bereits erwähnt, sind die Gleichungen (9) bis (12) an die Voraussetzung gebunden, dass die Punkte A und B während der Deformation in Ruhe bleiben. Darnach könnte es zunächst scheinen, diese Beziehungen wären nur zur Untersuchung lotrechter Lasten geeignet; wir werden indessen zeigen, wie sie auch bei der Untersuchung des Einflusses einer wagrechten Last oder einer Wärmeänderung sehr wertvolle Dienste leisten.

3. Die Festpunkte.

Wir nennen die durch die Gleichungen (11) in jeder Öffnung festgelegten Punkte F_1 und F_2 die „Festpunkte“ des kontinuierlichen Balkens. Um die Lage der Festpunkte zu bestimmen, betrachten wir zwei aufeinander folgende Öffnungen l und l' (Abbildung 7). Nach Gleichung (11a) hat der Festpunkt F_1 in der Öffnung l' vom benachbarten linken Auflager den Abstand

$$a' = \frac{\alpha_2'}{\alpha_1' + \alpha_2' + \varepsilon_1'} \cdot l';$$

darin bezeichnet ε_1' den Winkel, der nach Wegnahme des Balkenstückes l' am Auflager B infolge $M = -1$ entsteht. Bei dieser Deformation muss natürlich der rechte Winkel, den die Balkenachse bei B mit der Säulenachse bildet, erhalten bleiben. Bezeichnet daher

M_s das Moment, das die Säule deformed,

ε_s den Drehwinkel des Säulenkopfes infolge $M_s = 1$,

M_b das Moment, das den Balken AB deformed,

ε_b den Drehwinkel des Balkens bei B infolge $M_b = 1$, so gelten die Beziehungen

$$M_s + M_b = -1,$$

$$M_s \varepsilon_s = M_b \varepsilon_b = -\varepsilon_1', \dots \quad (13)$$

voraus durch Elimination von M_b und M_s ,

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_s \varepsilon_b}{\varepsilon_s + \varepsilon_b}$$

folgt. Für ε_b lässt sich aber nach Gleichung (8b) schreiben

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= -\beta = -M_1 \beta_1 - M_2 \beta_2 \\ &= \beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1; \end{aligned} \quad (14)$$

also ist

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_s (\beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1)}{\varepsilon_s + \beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1}.$$

Dieser Ausdruck, in Gleichung (11a) eingesetzt, liefert die wichtige Beziehung

$$a' = \frac{\alpha_2' l}{\beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1}, \quad \dots \quad (15a)$$

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \varepsilon_s \frac{\alpha_1' - \frac{a}{l-b} \alpha_2'}{\varepsilon_s + \beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1}$$

mit deren Hilfe die Lage jedes Festpunktes F_1' aus der des benachbarten linken F_1 berechnet werden kann. Der Abstand a des dem linken Endauflager zunächst liegenden Festpunktes F_1 wird aus Gleichung (15a) gewonnen.

Um die Lage der Festpunkte F_2 zu ermitteln, beginnt man am rechten Trägerende, berechnet zuerst mit Gleichung (15b) den Abstand b des Festpunktes der rechten Endöffnung und hierdurch die Lage aller übrigen Festpunkte durch fortgesetzte Anwendung der Beziehung

$$b = \frac{\beta_1 l}{\beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_s \frac{\alpha_1' - \frac{b}{l-b} \alpha_2'}{\varepsilon_s + \alpha_1' - \frac{b}{l-b} \alpha_2'}}, \quad \dots \quad (15b)$$

die sich analog wie Gleichung (15a) ableiten lässt.

In der Regel ist das Trägheitsmoment J des Balkens konstant oder darf ohne wesentlichen Fehler als konstant betrachtet werden. Dann ist bei Vernachlässigung des Einflusses der Schubkräfte nach bekannten Formeln:

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{l}{3 E J}, \quad \alpha_2 = \beta_1 = \frac{l}{6 E J}, \quad \dots \quad (16)$$

$$\alpha' = \frac{l}{3 + \frac{l'(l-a)}{l(2l-3a)} + \frac{l'}{6 E J \varepsilon_s}}, \quad \dots \quad (17a)$$

$$b = \frac{l}{3 + \frac{l(l-b)}{l(2l-3b)} + \frac{l}{6 E J \varepsilon_s}}, \quad \dots \quad (17b)$$

Auch für die Gleichungen (12) lassen sich vereinfachte Ausdrücke hinschreiben. Wir verzichten darauf, weil man die Schlusslinie der Momentenfläche der belasteten Öffnung besser mit Hilfe der erwähnten, graphischen Verfahren ermittelt. Die Festpunkte lassen sich ebenfalls auf graphischem Wege finden, worüber das bereits zitierte Werk von Prof. W. Ritter Auskunft gibt; die analytische Berechnung nach den Gleichungen (17) führt jedoch rascher zum Ziel, namentlich bei Benutzung des Rechenschiebers. Natürlich gelten diese Gleichungen auch für den kontinuierlichen Balken auf frei drehbaren Stützen; man hat nur $\varepsilon_s = \infty$ zu setzen, d. h.

die Glieder $\frac{l}{6 E J \varepsilon_s}$ und $\frac{l'}{6 E J \varepsilon_s}$ zu streichen. Zur Berechnung des Winkels ε_s infolge $M_s = 1$ dient die Formel (5) bzw. (7).

4. Lotrechte Belastung.

Nachdem die Festpunkte aller Öffnungen ermittelt sind, lässt sich das Momentendiagramm für eine lotrechte Belastung ohne grosse Mühe aufzeichnen. Man geht am besten wie beim kontinuierlichen Balken auf frei drehbaren Stützen vor, behandelt also die Belastung jeder Öffnung für sich und addiert schliesslich die Momentenordinaten in jedem Schnitte.

Die Öffnung AB des in Abbildung 8 skizzierten Trägers sei belastet, während alle andern Öffnungen von Lasten frei seien. Dann ist das Biegunsmoment in allen Festpunkten F_1 links von A und in allen Festpunkten F_2 rechts von B gleich Null, denn die Voraussetzungen der Grundgleichungen (11) sind erfüllt. Die Schlusslinie der Momentenfläche der belasteten Öffnung lässt sich mit Hilfe des bekannten graphischen Verfahrens leicht aufzeichnen.

Über den Stützen ändert sich das Moment sprunghaft. Wir betrachten zunächst eine Stütze, die links der belasteten Öffnung liegt, also etwa die Stütze L in Abbildung 8 und bezeichnen das Moment unmittelbar links davon mit M_s , das Moment unmittelbar rechts davon mit

M_1' ; dann ist $M_s = M_2 - M_1'$ das Moment, das die Säule deforme. Die Bedingung dafür, dass bei der Deformation der rechte Winkel zwischen Säule und Balken erhalten bleibt, lautet (analog Gleichung 13).

$-M_2 \varepsilon_b = (M_2 - M_1') \varepsilon_s$, wo für ε_b der Wert aus Gleichung (14) einzusetzen ist. Das gibt

$$\frac{M_2}{M_1'} = \mu = \frac{1}{1 + \frac{\beta_2 - \frac{a}{l-b} \beta_1}{\varepsilon_s}}. \quad \dots \quad (18a)$$

Mit diesem Koeffizienten ist das Moment im Balken beim Überschreiten einer Stütze, die links von der belasteten Öffnung liegt, zu multiplizieren. Für eine Stütze rechts der belasteten Öffnung, etwa für die Stütze R in Abbildung 8 ergibt eine analoge Betrachtung

$$\frac{M_1'}{M_2} = \mu' = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1' - \frac{b}{l-b} \alpha_2'}{\varepsilon_s}}. \quad \dots \quad (18b)$$

Für den Fall konstanten Trägheitsmomentes J des Balkens gelten die Gleichungen (16) und man erhält einfacher

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1 + \frac{l(2l-3a)}{6 E J \varepsilon_s (l-a)}}, \\ \mu' &= \frac{1}{1 + \frac{l'(2l'-3b')}{6 E J \varepsilon_s (l'-b')}}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (19)$$

Die Momentenfläche lässt sich nach Berechnung von μ und μ' leicht auftragen (vergl. Abbildung 8).

Der Balken wird indessen nicht nur durch Biegunsmomente, sondern auch durch die horizontalen Kräfte H beansprucht, die infolge der Deformation der Stützen entstehen (Abbildung 2) und sich mit Hilfe der Gleichung (2) leicht berechnen lassen. Es ist

$$H = \frac{\varepsilon - M_s \alpha_H}{\varepsilon_H}.$$

Bei lotrechter Belastung stehen die Kräfte H aller Stützen unter sich im Gleichgewicht; ein festes Endwiderlager hat demnach die Summe der Kräfte H aller Zwischenstützen zu übertragen. Fehlt ein festes Endwiderlager, so liefert die vorstehend beschriebene Rechnungsmethode nur bei symmetrischer Anordnung des Systems und der Belastung $\sum H = 0$; in jedem andern Falle bekommt man den endlichen Wert $\sum H = \Delta H$, der eben daran erinnert, dass die gemachte

Voraussetzung, das obere Ende jeder Stütze bleibe in Ruhe, nicht zutrifft. Vielmehr muss sich, damit Gleichgewicht bestehen kann,

der Balken ein wenig wagrecht verschieben, um so viel, dass die dadurch an den Stützenenden erzeugten Horizontalverschiebungen ΔH ergeben. Der folgende Abschnitt liefert die Unterlagen für diese Rechnung. Wenn man ein Beispiel durchrechnet, erkennt man, dass schon eine ganz geringe Verschiebung genügt, um den Horizontalverschiebung ΔH zu erzeugen und dass diese Verschiebung nur sehr geringe Biegunsmomente hervorruft. In praktischen Fällen darf man also bei Untersuchung einer lotrechten Belastung mit genügender Genauigkeit die Annahme treffen, die Stützenköpfe bleiben in Ruhe.

5. Wagrechte Verschiebung der Säulenenden.

Das obere Ende einer Säule S (Abbildung 9) verschiebe sich um eine sehr kleine wagrechte Strecke e (positiv nach rechts); wir wollen die dadurch entstehenden Biegunsmomente berechnen. Das System deforme sich in der in Abbildung 9 (S. 50) angedeuteten Weise. In allen Öffnungen und Säulen entstehen Biegunsmomente, über die wir auf Grund der bisherigen Darlegungen folgendes aussagen können: Das Biegunsmoment verschwindet in allen Festpunkten F_1 links der Stütze S , in allen Fest-

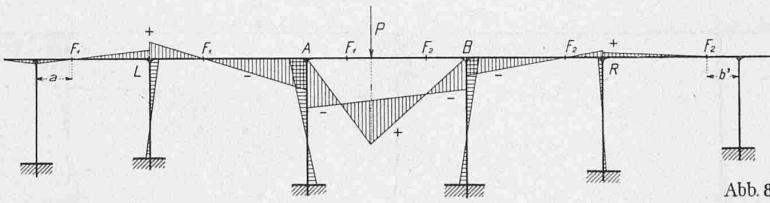


Abb. 8

punkten F_2 rechts der Stütze S und in den untern Drittelpunkten aller Stützen, mit Ausnahme der Stütze S , deren Wendepunkt nach Gleichung (2) zu bestimmen bleibt. Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt ohne weiteres, wenn wir auf die Voraussetzungen achten, die den Gleichungen (11) zugrunde liegen. In der Tat liegt für jede Öffnung links von S die Ursache der Winkeldrehung α rechts vom linken Auflager, das während der Deformation seine Lage beibehält; Gleichung (11a) gilt also für alle Felder links von S ; sinngemäss gilt für die Felder rechts von S . Über den Stützen ändert sich das Moment sprunghweise, und zwar ist für alle Stützen links von S der Koeffizient μ (Gleichung 18a bzw. 19a), für alle Stützen rechts von S der Koeffizient μ' (Gleichung 18b bzw. 19b) anzuwenden.

Wir fassen jetzt die Stütze S ins Auge, bezeichnen mit M_2 das Moment unmittelbar links, mit M_1' das Moment unmittelbar rechts von ihr (vergl. Abbildung 9); dann ist $M_s = M_2 - M_1'$ das Moment, das die Stütze deformiert. Der Kopf der Stütze verschiebt sich um die Strecke e nach rechts und dreht sich nach Gleichung (3) um den Winkel:

$$\alpha = \frac{3e}{2h} + \varepsilon_s(M_2 - M_1'), \text{ wo } \varepsilon_s = \frac{h}{4EJ_s},$$

im Sinne des Uhrzeigers. Um denselben Winkel drehen

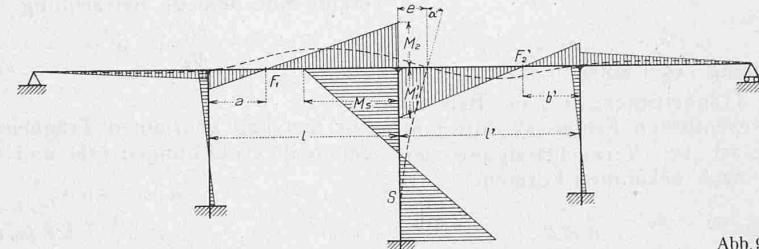


Abb. 9

$M_2 = -\frac{e}{h \cdot \varphi}$, und

$$M_1' = +\frac{e}{h \cdot \varphi} \quad (23)$$

und hat in die Gleichun-

gen (22) für ε_s den Wert aus Gleichung (7) einzusetzen. Hat man M_2 und M_1' berechnet, so kann man die Momentenfläche für die Verschiebung e einer Stütze S leicht aufzeichnen. Um die Momentenfläche für die Verschiebung mehrerer Stützen zu erhalten, bestimmt man die Momentenfläche für

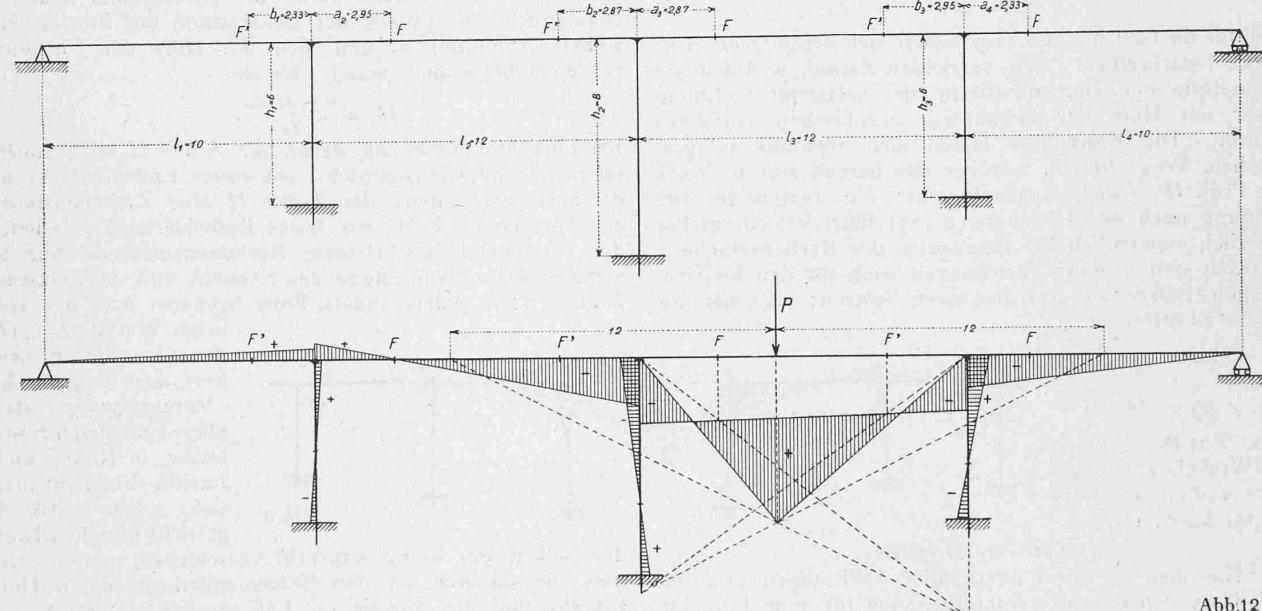


Abb. 12

sich die beiden Balkenstücke l und l' . Daher gelten gemäss den Gleichungen (8) und mit Beachtung, dass in unserm Falle $M_1 = -M_2 \frac{a}{l-a}$ und $M_2' = -M_1' \frac{b'}{l'-b'}$ ist, die weiteren Gleichungen

$$\alpha = -M_2 \left(\beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1 \right),$$

$$\alpha = M_1' \left(\alpha_1' - \frac{b'}{l'-b'} \alpha_2' \right).$$

Durch Elimination von α folgt weiter

$$\frac{3e}{2h} + \varepsilon_s(M_2 - M_1') + M_2(\beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1) = 0,$$

$$\frac{3e}{2h} + \varepsilon_s(M_2 - M_1') - M_1'(\alpha_1' - \frac{b'}{l'-b'} \alpha_2') = 0,$$

und daraus

$$M_2 = -\frac{3e}{2h\varphi}, M_1' = +\frac{3e}{2h\varphi}, \dots \quad (20)$$

worin zur Abkürzung

$$\varphi = \varepsilon_s + \left(\beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1 \right) \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\alpha_1' - \frac{b'}{l'-b'} \alpha_2'} \right) \quad (21)$$

$$\varphi' = \varepsilon_s + \left(\alpha_1' - \frac{b'}{l'-b'} \alpha_2' \right) \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1} \right) \quad (21)$$

gesetzt ist. Bei konstantem Trägheitsmoment J des Balkens ergibt sich mit Benützung der Formeln (16)

$$\varphi = \varepsilon_s \left[1 + \frac{l(2l-3a)(l-b')}{l'(2l'-3b')(l-a)} \right] + \frac{l(2l-3a)}{6EJ(l-a)}, \quad (22)$$

$$\varphi' = \varepsilon_s \left[1 + \frac{l'(2l'-3b')(l-a)}{l(2l-3a)(l-b')} \right] + \frac{l'(2l'-3b')}{6EJ(l-b')}.$$

Ist die Stütze S unten nicht eingespannt, sondern gelenkartig gelagert, so ändert sich die vorstehende Ableitung nur in soweit, als für den elastischen Drehwinkel der Stütze statt Gleichung (3) die Gleichung (6) in Betracht kommt. Man erhält als dann

$$M_2 = -\frac{e}{h \cdot \varphi}, \text{ und}$$

gen (22) für ε_s den Wert aus Gleichung (7) einzusetzen. Hat man M_2 und M_1' berechnet, so kann man die Momentenfläche für die Verschiebung e einer Stütze S leicht aufzeichnen. Um die Momentenfläche für die Verschiebung mehrerer Stützen zu erhalten, bestimmt man die Momentenfläche für

die Verschiebung jeder Stütze gesondert und addiert die Momentenordinaten in jedem Schnitte. Das Verfahren gestaltet sich bei der zahlenmässigen Durchführung sehr einfach, wie das Beispiel am Schlusse dieser Arbeit zeigen wird.

6. Wagrechte Belastung.

Mit Hilfe der vorstehenden Darlegungen lassen sich leicht die Biegunsmomente berechnen, die durch eine horizontale Kraft H (Bremskraft, Winddruck bei Rahmen-Bindern) erzeugt werden (vergl. Abbildung 10). Man verfährt zu diesem Zwecke wie folgt:

Man denkt sich zunächst das obere Ende jeder Stütze (also den ganzen Balken) um die Strecke $e = 1$ wagrecht verschoben und berechnet nach dem in Nr. 5 erläuterten Verfahren die Biegunsmomente, sowie die Horizontalschübe in den Stützen. Die Summe dieser Horizontalschübe sei

H_1 . Multipliziert man das Biegunsmoment für $e = 1$ mit $\frac{H}{H_1}$, so erhält man das durch die Kraft H erzeugte Biegunsmoment.

Die Abbildung 10 zeigt den Verlauf der Momentenlinie für einen Balken auf 4 unten eingespannte Stützen.

7. Wärmeänderung.

Der Einfluss einer Wärmeänderung lässt sich mittelst der in Nr. 5 enthaltenen Untersuchungen ohne Schwierigkeit verfolgen. Wenn der Träger ein festes Endauflager besitzt, so verschiebt eine Wärmeänderung um t^0 das obere Ende jeder Stütze um die Strecke $e = \omega \cdot t^0 \cdot L$, wo ω den Wärmeausdehnungs-Koeffizienten (für Eisenbeton $\omega = 0,000012$)

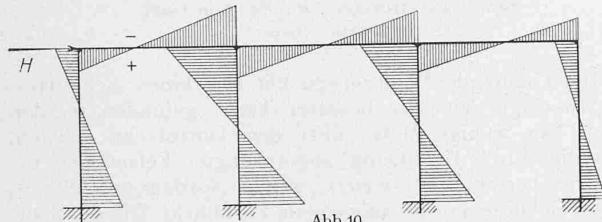


Abbildung 10

und L den Abstand der Stütze vom festen Endauflager bezeichnet. Um die Momentenfläche zu erhalten, zeichnet man die Momentenflächen für die Verschiebung e jeder einzelnen Stützen auf und addiert die Ordinaten in jedem Schnitte. Man kann sich die Verschiebung $e = \omega \cdot t^0 \cdot L$ einer Stütze S (vergl. Abbildung 11) dadurch entstanden

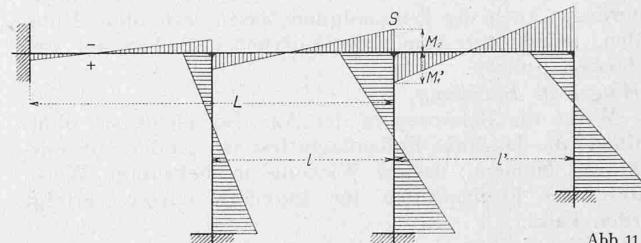


Abbildung 11

a) Elastizitätsmasse der Stützen:

$$EJ \cdot \varepsilon_{s_1} = \frac{h_1 J}{4 J_s} = \frac{6 \cdot 4}{4} = 6 = EJ \varepsilon_{s_3},$$

$$EJ \cdot \varepsilon_{s_2} = \frac{h_2 J}{4 J_s} = \frac{8 \cdot 4}{4} = 8.$$

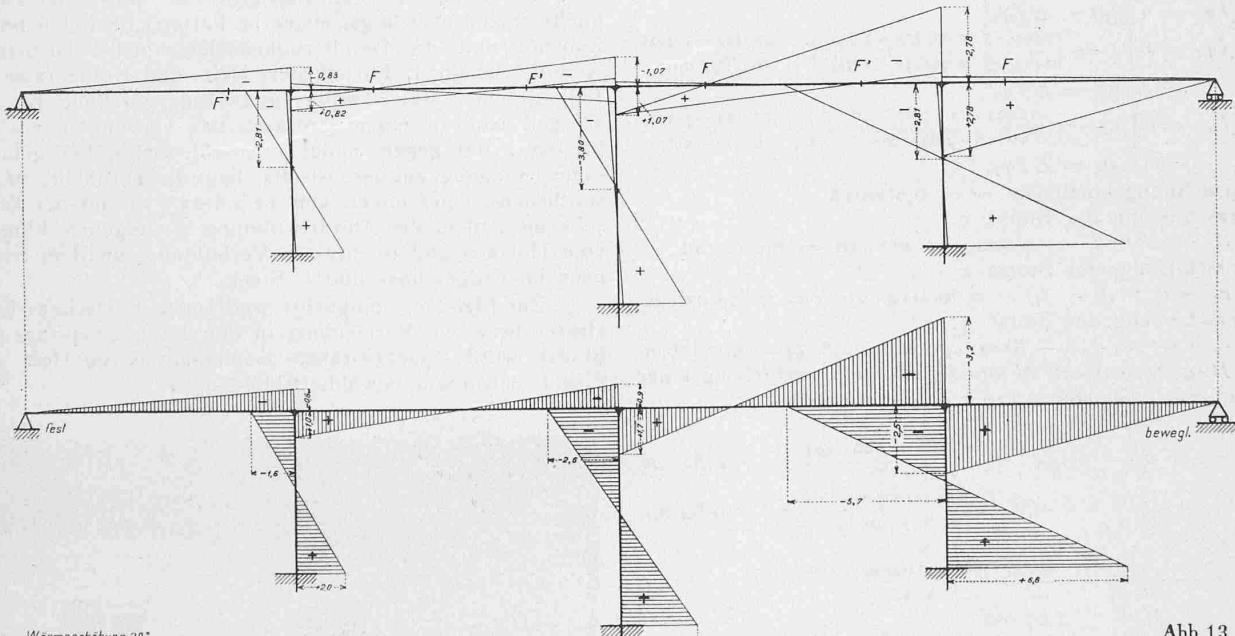


Abbildung 13

b) Bestimmung der Festpunkte:

Aus Symmetriegründen $a_2 = b_3$, $a_3 = b_2$, $a_4 = b_1$.

$$a_2 = \frac{l_2}{3 + \frac{l_2(l_1 - a_1)}{l_1(2l_1 - 3a_1)} + \frac{l_2}{6 EJ \cdot \varepsilon_{s_1}}} = \frac{12}{3 + \frac{12 \cdot 10}{10 \cdot 20} + \frac{12}{6 \cdot 6}} \\ a_2 = 2,95 \text{ m} = b_3.$$

$$a_3 = \frac{12}{3 + \frac{12(12 - 2,95)}{12(24 - 3 \cdot 2,95)} + \frac{12}{6 \cdot 8}} = 2,87 \text{ m} = b_2$$

$$a_4 = \frac{10}{3 + \frac{10(12 - 2,87)}{12(24 - 3 \cdot 2,87)} + \frac{10}{6 \cdot 6}} = 2,33 \text{ m} = b_1.$$

denken, dass die Öffnung l eine Wärmeänderung $t^0_1 = +\frac{\epsilon}{\omega l}$, die Öffnung l' eine solche $t^0_2 = -\frac{\epsilon}{\omega l'}$ erleidet, während alle andern Öffnungen ihre Wärme beibehalten. Nun ist zwar dieser Zustand von einer gleichmässigen Wärmeänderung weit entfernt; wir bekommen indessen die letztere, indem wir den beschriebenen Zustand bei allen Stützen herstellen und dessen Wirkungen addieren.

Ist kein festes Endauflager vorhanden, so nimmt man zunächst diejenige Stütze, die sich augenscheinlich am wenigsten verschieben wird, als fest an und berechnet die Biegunsmomente und die Horizontalschübe aller Stützen. Ergibt sich die Summe der Horizontalschübe zu ΔH , so verschiebt man den Balken wagrecht um so viel, dass $\Delta H = 0$ wird. Durch diese Verschiebung entstehen wieder Biegunsmomente, die zu den erst berechneten zu addieren sind.

Eine Wärmeänderung und ebenso eine Belastung erzeugen in dem Balken nicht nur Biegunsmomente, sondern auch Normalkräfte. Deren Ermittlung wird man sich in der Regel ersparen, weil die davon berührenden Zug- und Druckspannungen gegenüber den Biegunsspannungen stark zurücktreten.

8. Zahlenbeispiel.

Es soll der in Abb. 12 skizzierte Träger mit vier Öffnungen untersucht werden. Die Stützen sind unten fest eingespannt und besitzen das Trägheitsmoment $J_s = 0,0025 \text{ m}^4$; der Balken besitzt das konstante Trägheitsmoment $J = 0,01 \text{ m}^4$. Die Höhen der Mittelstützen sind $h_1 = h_3 = 6,0 \text{ m}$, $h_2 = 8,0 \text{ m}$; die Stützweiten $l_1 = l_4 = 10,0 \text{ m}$, $l_2 = l_3 = 12,0 \text{ m}$. Das linke Endwiderlager ist fest, das rechte beweglich.

c) Reduktionskoeffizienten:

Aus Symmetriegründen ist $\mu_1 = \mu'_3$, $\mu_2 = \mu'_2$, $\mu_3 = \mu'_1$.

$$\mu_1 = \frac{I}{I + \frac{l_1(2l_1 - 3a_1)}{6E/J_{s1}(l_1 - a_1)}} = \frac{I}{I + \frac{10 \cdot 2 \cdot 10}{6 \cdot 6 \cdot 10}} = 0,64 = \mu'_3.$$

$$\mu_2 = \frac{I}{I + \frac{12(24 - 3 \cdot 2,95)}{6 \cdot 8 \cdot (12 - 2,95)}} = 0,70 = \mu'_2.$$

$$\mu_3 = \frac{I}{I + \frac{12(24 - 3 \cdot 2,87)}{6 \cdot 6 \cdot (12 - 2,87)}} = 0,64 = \mu'_1.$$

d) Lotrechte Belastung:

In Abbildung 12 sind die Biegunsmomente infolge einer Einzellast P in der 3. Oeffnung dargestellt. Das Verfahren bedarf nach dem in Nr. 4 gesagten keiner Erklärung. Auch die Einflusslinien lassen sich ohne Mühe finden, analog wie beim kontinuierlichen Balken auf frei drehbaren Stützen.

e) Wagrechte Belastung:

Wirkt die Belastung in der Axe, so bleibt sie ohne Einfluss, da das linke Endauflager fest ist. Andernfalls entsteht ein Moment, dessen Wirkung in bekannter Weise mittelst der Einflusslinien für lotrechte Lasten verfolgt werden kann.

f) Wärmeänderung:

Es soll der Einfluss einer Wärmeerhöhung von 20^0 verfolgt werden. Wir berechnen zunächst die Koeffizienten φ in Gleichung (22).

$$\varphi_1 = \varepsilon_{s1} \left[I + \frac{l_1(2l_1 - 3a_1)(l_2 - b_1)}{l_2(2l_2 - 3b_1)(l_1 - a_1)} \right] + \frac{l_1(2l_1 - 3a_1)}{6E/J(l_1 - a_1)} \\ = \frac{6}{EJ} \left[I + \frac{10 \cdot 20 \cdot (12 - 2,87)}{12(24 - 3 \cdot 2,87) \cdot 10} \right] + \frac{10 \cdot 20}{6EJ \cdot 10}$$

$$EJ\varphi_1 = 15,30 = EJ\varphi'_3.$$

$$EJ\varphi_2 = 8 \left[I + \frac{12(24 - 3 \cdot 2,95)(12 - 2,95)}{12(24 - 3 \cdot 2,95)(12 - 2,95)} \right] + \frac{12 \cdot (24 - 3 \cdot 2,95)}{6 \cdot (12 - 2,95)} \\ = 19,35 = EJ\varphi'_2.$$

$$EJ\varphi_3 = 6 \left[I + \frac{12(24 - 3 \cdot 2,87) \cdot 10}{10(12 - 2,87) \cdot 20} \right] + \frac{12 \cdot (24 - 3 \cdot 2,87)}{6 \cdot (12 - 2,87)} \\ = 15,40 = EJ\varphi'_1.$$

Ausdehnungskoeffizient $\omega = 0,000012$.

Verschiebung der Stütze 1:

$$e_1 = \omega t^0 l_1 = 0,000012 \cdot 20^0 \cdot 10 = 0,0024 \text{ m.}$$

Verschiebung der Stütze 2:

$$e_2 = \omega t^0 (l_1 + l_2) = 0,000012 \cdot 20^0 \cdot 22 = 0,0053 \text{ m.}$$

Verschiebung der Stütze 3:

$$e_3 = \omega t^0 (l_1 + l_2 + l_3) = 0,000012 \cdot 20^0 \cdot 34 = 0,00816 \text{ m.}$$

Biegunsmomente M und M' infolge Verschiebung einer Stütze, nach Gleichung (20). $E = 2100000 \text{ t/m}^2$.

Stütze 1:

$$M = - \frac{3e_1}{2h_1\varphi_1} = - \frac{3 \cdot 0,0024 \cdot 2100000 \cdot 0,01}{2 \cdot 6 \cdot 15,30} = - 0,83 \text{ mt.}$$

$$M' = + \frac{3e_1}{2h_1\varphi_1} = + \frac{3 \cdot 0,0024 \cdot 2100000 \cdot 0,01}{2 \cdot 6 \cdot 15,40} = + 0,82 \text{ mt.}$$

Stütze 2:

$$M = - \frac{3e_2}{2h_2\varphi_2} = - \frac{3 \cdot 0,0053 \cdot 2100000 \cdot 0,01}{2 \cdot 8 \cdot 19,35} = - 1,07 \text{ mt.}$$

$$M' = - M = + 1,07 \text{ mt.}$$

Stütze 3:

$$M = - \frac{3e_3}{2h_3\varphi_3} = - \frac{3 \cdot 0,00816 \cdot 2100000 \cdot 0,01}{2 \cdot 6 \cdot 15,40} = - 2,78 \text{ mt.}$$

$$M' = + \frac{3e_3}{2h_3\varphi'_3} = + \frac{3 \cdot 0,00816 \cdot 2100000 \cdot 0,01}{2 \cdot 6 \cdot 15,30} = + 2,80 \text{ mt.}$$

Abstand der Wendepunkte von der Balkenachse:

$$r = \frac{2h}{6EJ_s e} \quad (\text{Gleichung 4}).$$

$$r_1 = \frac{2 \cdot 6}{3 - \frac{6 \cdot 2100000 \cdot 0,01 \cdot 0,0024}{1,65 \cdot 4 \cdot 36}} = 2,81 \text{ m.}$$

$$r_2 = \frac{2 \cdot 6}{3 - \frac{6 \cdot 2100000 \cdot 0,01 \cdot 0,0053}{2,14 \cdot 4 \cdot 64}} = 3,80 \text{ m.}$$

$$r_3 = \frac{2 \cdot 6}{3 - \frac{6 \cdot 2100000 \cdot 0,01 \cdot 0,00816}{5,58 \cdot 4 \cdot 36}} = 2,81 \text{ m.}$$

In Abbildung 13 ist das in Nr. 7 abgeleitete Verfahren zur Anwendung gelangt. Es sind die Momentendiagramme für die Verschiebung e jeder einzelnen Stütze aufgezeichnet; durch Summation ergab sich die Momentenfläche infolge der Wärmeerhöhung 20^0 . Man erkennt, wie die Biegunsmomente mit dem Abstande vom festen Auflager stark anwachsen; das grösste Biegunsmoment im Balken beträgt $-3,2 \text{ mt}$ an der Stütze 3. Am untern Ende der Stütze 3 entsteht ein Moment von $+ 6,6 \text{ mt}$. Wären die Stützen gelenkartig gelagert, so hätten sich im Balken nur etwa $\frac{2}{3}$ so grosse Momente ergeben.

Zürich, im Oktober 1910.

Schulhaus Niederurnen.

Erbaut von Architekt Emil Faesch in Basel.
(Mit Tafel 9 bis 12.)

Die Gemeinde Niederurnen hat sich einen Schulhausplatz zugelegt, wie ein besserer kaum gefunden werden kann. Nur wenige Meter über dem Dorfniveau gelegen, bietet die durch Benützung abgesprengter Felsmassen gewonnene Terrasse ein weites, gegen Norden geschütztes, ebenes Gelände mit bezauberndem Fernblick. Die durchaus trockene Lage sichert die hygienisch besten Bedingungen für Schulhaus und Spielplätze.

Dank der Einsicht der Schulbehörden von Kanton und Gemeinde war Gelegenheit gegeben, das Schulhaus, wenn gleich in grösster Einfachheit, doch allen heutigen Anforderungen entsprechend zu gestalten. Elf grosse Schulzimmer mit Süd- und Ostlicht: drei im Erdgeschoss, vier im I. Stock und vier im Dachgeschoss, mit weiter Lichtquelle, Schulsitzungszimmer im Parterre, Schulküche mit Zubehör und die Handfertigkeitsklasse nebst Gemeinde-Archiv, Schulbad, Einzelbäder, Heiz- und Kohlenraum im Kellergeschoss, weite Treppen und Gänge, geräumige Klosettanlagen sind zu einem grösstern Bau verbunden, mit der breiten Front gegen Süden. Anschliessend, bei gemeinsamem Eingang auf der Ostseite, liegt die Turnhalle, in den statlichen Abmessungen von 12 auf $23,5 \text{ m}$, auf der Westseite als Anbau die Abwartwohnung mit eigenem Eingang vom Hof aus und in direkter Verbindung mit dem Schulhaus im Erdgeschoss und I. Stock.

Zur Erzielung möglichst weiträumiger Dachgeschossklassen bzw. zur Vermeidung in den Raum einspringender Binder wurde eine bewährte Kombination von Holz- und Eisenkonstruktion gewählt (Abbildung 1).

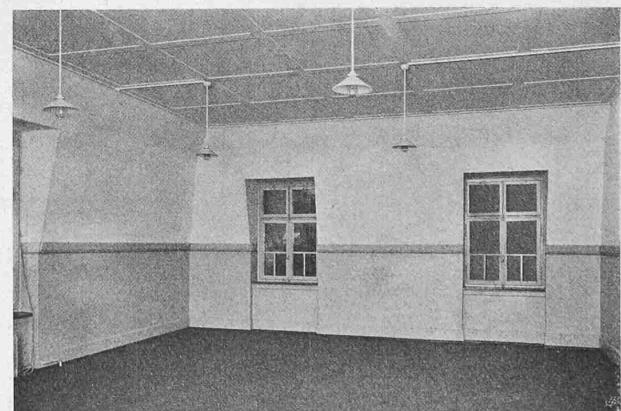


Abb. 1. Klassenzimmer im Dachstock (vergl. Schnitte auf Tafel 11).

Bezüglich Bauweise ist zu bemerken, dass Westphal-Konstruktion (Hess & Co., Zürich) für die Decken über Kellergeschoss, Erdgeschoss und I. Stock Anwendung gefunden hat, die nach sorgfältiger Prüfung und verglichenen Aufstellungen, als die billigste der zweckmässigen massiven Deckenkonstruktionen befunden werde.