Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 57/58 (1911)

Heft: 4

Inhaltsverzeichnis

Band 57. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 4.**

Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen.

Von Dr.-Jng. *Max Ritter* in Zürich.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die in Abbildung 1 skizzierte Tragkonstruktion, die im Eisenbau und namentlich im Eisenbetonbau häufig zur Anwendung gelangt. Ein vollwandiger Balken ruht auf beliebig vielen, mit ihm starr verbundenen Stützen oder Säulen und wird derart beansprucht, dass sich die Deformation in der Ebene des Systems vollzieht. Die Stützen können unten eingespannt oder gelenkartig gelagert sein; ihre Widerlager mögen als unnachgiebig vorausgesetzt werden.

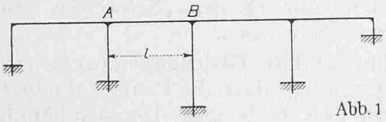

Abb. 1

Das System ist vielfach statisch unbestimmt. Die statische Untersuchung kann nach der allgemeinen Methode der technischen Elastizitätslehre erfolgen; man erhält aber, sobald die Zahl der Stützen ein bescheidenes Mass übersteigt, so viele Elastizitätsgleichungen, dass sich die zahlenmässige Durchführung der Berechnung äusserst zeitraubend und mühevoll gestaltet. Um zu praktisch brauchbaren Rechnungsmethoden zu gelangen, wollen wir in der Folge bei der Berechnung der Formänderungen den unbedeutenden Einfluss der Normalkräfte und der Querkräfte vernachlässigen. Diese Vereinfachung, die auch bei manchen andern Aufgaben der Elastizitätslehre üblich ist (Knicktheorie, Bogenträger mit grossem Pfeilverhältnis), erleichtert die Untersuchung des Systems sehr wesentlich. Das Problem ist jetzt nahe verwandt mit der Theorie des kontinuierlichen Balkens auf frei drehbaren Auflagern; der Unterschied besteht nur darin, dass die Säulen einer Drehung des Balkens einen elastischen Widerstand entgegensetzen, wodurch beide Teile Nebenspannungen erleiden. Die Ueberschrift der vorliegenden Arbeit findet hierin ihre Rechtfertigung.

In der Literatur ist der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen schon mehrfach behandelt worden. Am bekanntesten ist wohl die elegante, graphische Lösung von *W. Ritter* im dritten Bande seiner „Anwendungen der graphischen Statik", die neuerdings im Eisenbetonbau ausgedehnte Anwendung gefunden hat; auch die bemerkenswerten Arbeiten von Prof. *A. Ostenfeld* in Kopenhagen haben sich Eingang in die Praxis verschafft. Es muss indessen bemerkt werden, dass diese und andere Lösungen sich auf die vereinfachende Annahme stützen, das obere Ende jeder Stütze bleibe während der Deformation in Ruhe. Diese Voraussetzung trifft wohl zu bei symmetrischer Anordnung des Systems und der Belastung, oder dort, wo ein festes Endauflager vorhanden ist; sie versagt aber vollständig, wenn die Wirkung einer wagrechten Last, z. B. einer Bremskraft, oder der (meist beträchtliche) Einfluss einer Wärmeänderung verfolgt werden soll. Um die letztgenannten Einflüsse näher zu untersuchen, stehen zwar zur Zeit verschiedene Verfahren zur Verfügung (W. Ritter, G. Mantel, H. Müller-Breslau), die aber alle die Auflösung einer grössern Zahl von Gleichungen erfordern und in der Anwendung zum mindesten unbequem sind.

Die folgenden, zum grössern Teil analytischen Untersuchungen beruhen auf neuen, jedoch ganz elementaren Betrachtungen. Von den allgemeinen Deformationsgleichungen des an beiden Enden elastisch eingespannten Stabes ausgehend, wird zunächst eine anschauliche Definition der „Festpunkte" gegeben, die in der Theorie des kontinuierlichen Balkens bekanntlich eine wichtige Rolle spielen. Zur Bestimmung der Lage der Festpunkte werden einfache, auch bei veränderlichem Trägheitsmoment anwendbare Formeln abgeleitet. Es wird sodann die *Anwendung der Festpunkte zur Ermittlung der Momentenflächen infolge einer lotrechten und einer wagrechten Belastung, als auch einer Wärmeänderung des Balkens* gezeigt. Ein Beispiel erläutert die zahlenmässige Durchführung der Untersuchung.

1. Die Formänderung der Stützen.

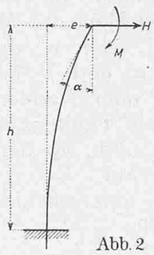

Abb. 2

Eine lotrechte, unten vollständig eingespannte Säule (Abb. 2) werde am Kopfe durch die horizontale Kraft H und das Moment M beansprucht; wir fragen nach der Bewegung des Endquerschnittes. Das Gesetz der Superposition liefert die horizontale Verschiebung

$$e = H\,e_H + M\,e_M\,,$$

und die Drehung

$$\alpha = H\,\alpha_H + M\,\alpha_M\,,$$

wobei e_H und α_H die Bewegungen infolge $H = 1$, e_M und α_M diejenigen infolge $M = 1$ bezeichnen. Nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen ist $e_M = \alpha_H$. Eliminiert man H, so erhält man

$$\alpha = e\,\frac{\alpha_H}{e_H} + M\left(\alpha_M - \frac{\alpha_H^2}{e_H}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn das Moment von H entgegengesetzt zu M wirkt, und $M < H\,h$ ist, so besitzt die elastische Linie einen Wendepunkt R, der vom Säulenkopf den Abstand

$$r = -\frac{M}{H} = \frac{e_H}{\alpha_H - \frac{e}{M}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hat. Meist ist das Trägheitsmoment J_s längs der Säulenachse konstant; dann ist nach bekannten Formeln

$$e_H = \frac{h^3}{3\,E\,J_s},\quad \alpha_H = \frac{h^2}{2\,E\,J_s},\quad \alpha_M = \frac{h}{E\,J_s},$$

und die obigen Beziehungen gehen über in

$$\alpha = \frac{3}{2}\,\frac{e}{h} + M\,\frac{h}{4\,E\,J_s}\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$r = \frac{2\,h}{3 - \frac{6\,E\,J_s\,e}{M\,h^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bleibt der Säulenkopf während der Deformation in Ruhe, $e = 0$, so liegt der Wendepunkt R im untern Drittel der Säule. Das Moment $M = 1$ erzeugt in diesem Falle

$$\alpha = \varepsilon_s = \alpha_M - \frac{\alpha_H^2}{e_H}$$

und bei konstantem Trägheitsmoment

$$\alpha = \varepsilon_s = \frac{h}{4\,E\,J_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wenn die Säule unten gelenkartig gelagert ist, so fällt der Wendepunkt ins Gelenk und man erhält für konstantes Trägheitsmoment die leicht abzuleitende Formel

$$\alpha = \frac{e}{h} + M\,\frac{h}{3\,E\,J_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und für $e = 0$ und $M = 1$

$$\alpha = \varepsilon_s = \frac{h}{3\,E\,J_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

h bedeutet den Abstand des Einspannungsquerschnittes bezw. des Gelenkes von der Balkenachse. Streng genommen sollte man das Trägheitsmoment der Säule von der Balkenunterkante bis zur Balkenachse unendlich gross annehmen; die obigen einfachen Formeln sind aber praktisch stets genau genug.

2. Die Grundgleichungen.

Wir denken uns irgend eine Oeffnung $AB = l$ des kontinuierlichen Balkens unmittelber an den Stützen durch-