Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 57/58 (1911)

Heft: 12

Inhaltsverzeichnis

Band 57. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und unter genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 12.

Zur Berechnung von eingespannten Gewölben.

Von Dipl.-Ing. *Hugo Ritter*, z. Zt. in Danzig.

Die Berechnung von eingespannten Bogen unter Zugrundelegung der Elastizitätstheorie erfordert nach der allgemeinen Methode bekanntlich ein grosses Mass von Arbeit, ob nun die Bestimmung der im Innern des Bogens wirkenden Kräfte graphisch oder analytisch erfolge. Ist der Einfluss einer beweglichen Belastung zu ermitteln, so ist diese Arbeit nicht zu umgehen, handelt es sich aber um die Berechnung von Spannungen infolge von Eigengewicht oder weniger bestimmter Belastungszustände, so ist, wie im Nachstehenden gezeigt werden soll, eine einfachere und rasche Lösung möglich. Diese Berechnungsweise gilt nicht nur für *vertikale,* sondern auch für *beliebig gerichtete Lasten*, wie sie z. B. bei Gewölben unter hohen Erddämmen auftreten, die nicht nur auf vertikalen, sondern auch horizontalen Erddruck zu untersuchen sind, oder bei bogenförmigen Dachbindern, bei denen der Winddruck berücksichtigt werden muss.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe ist von Prof. Dr. W. Ritter im Jahre 1891 in einem Artikel dieser Zeitschrift (Bd. XVII, S. 13) für einen belasteten Stabring entwickelt worden. Es liegen ihr folgende drei Sätze zu Grunde:

1. Wirkt auf ein Balken- oder Bogenelement eine äussere Kraft, so kann die elastische Formänderung des Elementes, d. h. die Bewegung, die der eine Querschnitt gegenüber dem andern erfährt, als eine Drehung um den Antipol der äussern Kraft bezüglich der Elastizitätsellipse des Elementes aufgefasst werden. Die Grösse der Drehung ist gleich der Kraft multipliziert mit dem auf die Kraftrichtung bezogenen statischen Moment des im Ellipsenmittelpunkt konzentriert gedachten elastischen Gewichtes.

Die Elastizitätsellipse ist diejenige Ellipse, deren kleine halbe Axe gleich ist der vertikalen Axe der Zentralellipse des Querschnittes, also $i_1 = \sqrt{\frac{J}{F}}$ (J = Trägheitsmoment und F = Fläche des Querschnittes), und deren grosse halbe Axe den Wert hat $i_2 = \frac{\Delta s}{\sqrt{12}}$ (Δs = Länge des Elementes), wobei der Einfluss der Scherspannungen auf die Formänderungen vernachlässigt worden ist.

2. Erfährt ein beliebig gelegener Punkt nacheinander zwei unendlich kleine Verrückungen, die als Drehungen um zwei in endlichen Abständen befindliche andere Punkte aufgefasst werden können, so kann die Gesamtbewegung als Drehung um einen dritten Punkt angesehen werden, der sich als Schwerpunkt der mit den Drehwinkeln belasteten beiden Drehpunkte ergibt. Die Grösse des Gesamtdrehwinkels ist gleich der Summe der einzelnen Drehwinkel.

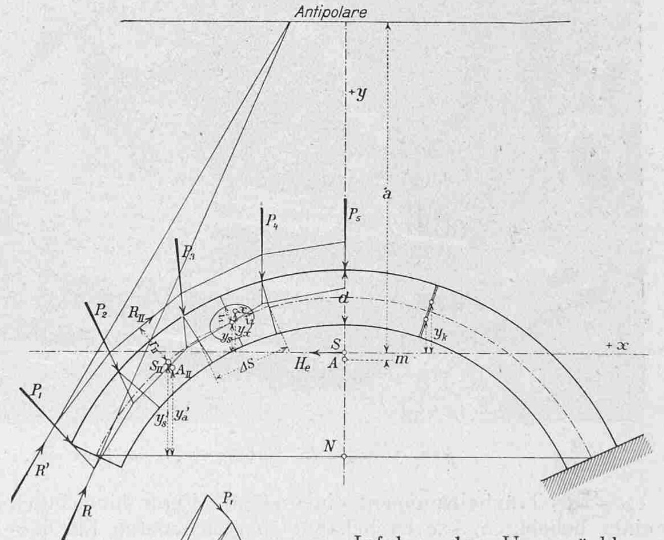
3. Wenn für ein Kräftesystem mit zwei verschiedenen Polen zwei Seilecke konstruiert werden, so schneiden sich die zwischen gleichen Kräften liegenden Seiten der beiden Seilecke in einer Graden, der sogen. Polaraxe, die parallel der Verbindungslinie der beiden Pole ist. Das eine Seileck ergibt sich aus dem andern, wenn dem Kraftsystem eine weitere Kraft beigefügt wird, die in der Polaraxe liegt und deren Grösse durch die Distanz der beiden Pole dargestellt wird.

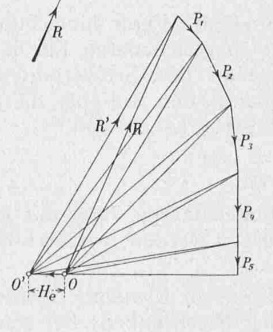
Man denkt sich nun den Bogen durch Querschnitte in eine Anzahl Elemente von gleicher Länge zerlegt und die Belastung in den Schnittpunkten konzentriert (vgl. die Abbildung). Dann lassen sich bekanntlich unendlich viele Drucklinien in den Bogen einzeichnen, welche die Gesetze des Gleichgewichtes befriedigen. Von allen diesen wird aber nur eine einzige den wirklich vorhandenen innern Spannungen entsprechen, und um diese zu finden, muss von den Gesetzen der elastischen Formänderungen Gebrauch gemacht werden.

Zunächst zeichnet man mittels beliebig gewähltem Pole O' eine Drucklinie, dann stellt jede Seite des Seileckes die Resultierende aller auf das entsprechende Element wirkenden äussern Kräfte dar. Hält man nun den Bogen an seinem rechten Auflager fest und denkt sich das linke frei beweglich, so wird sich dieses infolge der Elastizität des Materials unter dem Einfluss der auf den Bogen wirkenden Kräfte verschieben. Betrachtet man vorerst nur ein einziges Element, z. B. das zweite, als elastisch, so dreht die Resultierende R_{II} nach Satz 1 den einen Querschnitt des Elementes II gegenüber dem andern, folglich auch das freischwebende Bogenende um A_{II}, den Antipol der Kraft bezüglich der Elastizitätsellipse, und der Drehwinkel ist

$$\Delta\delta_{II} = R_{II} \cdot r_{II} \cdot \Delta g_{II} = \frac{R_{II} \cdot r_{II} \cdot \Delta s}{E \cdot J_{II}}$$

Betrachtet man nun ein Element nach dem andern als elastisch, so dreht sich das linke Bogenende nach einander um alle Antipole der einzelnen Elemente.





Infolge der Unverrückbarkeit der Widerlager kann jedoch diese Bewegung in Wirklichkeit nicht eintreten und muss im Bogen eine der Drehung entgegen wirkende Ergänzungskraft wirken. Die Gesamtverdrehung ist nach Satz 2 gleich der Summe der Einzelverdrehungen, den Drehpunkt für diese Gesamtbewegung findet man als Schwerpunkt der in ihren Drehpunkten als Kräfte wirkenden Drehwinkel. Die Kraft, die diese Drehung wieder rückgängig zu machen hat, muss, da sie den ganzen Bogen beeinflusst, in der Antipolaren zu diesem Punkt hinsichtlich der Elastizitätsellipse des ganzen Bogens liegen. Ihre Grösse ergibt sich aus der Beziehung:

$$H_e \cdot a \cdot \Sigma(\Delta g) = \Sigma(\Delta\delta)$$

zu: $$H_e = \frac{\Sigma(\Delta\delta)}{a \cdot \Sigma(\Delta g)}$$