

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	55/56 (1910)
<b>Heft:</b>	9
<b>Artikel:</b>	Die Ermittlung der Zentralellipse von Kreisbogen, Kreisausschnitt und Kreisabschnitt durch Zeichnung
<b>Autor:</b>	Hartmann, H.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-28669">https://doi.org/10.5169/seals-28669</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die Ermittlung der Zentralellipse von Kreisbogen, Kreisausschnitt und Kreisabschnitt durch Zeichnung.

Von Ingenieur H. Hartmann, Konstantinopel.

1. Soll das Endergebnis einen bestimmten Genauigkeitsgrad nicht unterschreiten, so bedingt die graphische Behandlung vieler Aufgaben die Kenntnis der einen oder andern der in der Ueberschrift genannten Zentralellipsen. Für diese sind meines Wissens bisher keine einfachen Konstruktionen bekannt gegeben worden, sodass die einschlägigen Grössen jeweils durch Rechnung bestimmt werden müssen, welche Rechnung jedoch nicht nur zeitraubend, sondern auch unbequem ist, insofern als dabei Tabellenwerke benötigt werden.

Nachstehend soll nun unter Zuhilfenahme nur der elementarsten Sätze der Geometrie und Mechanik gezeigt werden, dass sich die Zentralellipse des Kreisbogens, Kreisausschnittes und Kreisabschnittes in der einfachsten Weise durch Zeichnung ermitteln lässt.

Als bekannt darf vorausgesetzt werden, dass für Kreisbogen sowohl als für Kreisausschnitt und Kreisabschnitt

der Schwerpunkt  $S$  auf der Halbierungsgeraden  $CD$  des Zentriwinkels  $\alpha$  liegt (Abbildung 1); dass die eine Hauptachse  $i_1$  der Zentralellipse mit dieser Halbierungsgeraden zusammenfällt, und dass somit die andere Hauptachse  $i_2$  auf ihr senkrecht steht, also zur Bogensehne  $AB$  parallel ist.

### A. Kreisbogen.

2. Zunächst ist der Schwerpunkt  $S$  zu bestimmen, also, da er auf der bekannten Geraden  $CD$  liegt, sein Abstand von irgend einem Punkt der Zeichnungsebene. Als solchen Punkt wählen wir den Kreismittelpunkt  $C$ . Ist dann  $St_c$  das statische Moment des Kreisbogens  $ADB$  bezüglich der Geraden  $c$ , so ist laut Definition des Schwerpunktes

$$a \cdot \bar{CS} = St_c \quad \dots \quad (1)$$

Das statische Moment  $St_c$  wird durch Summation der statischen Momente  $\Delta St_c$  der einzelnen Bogenelemente  $\Delta a$  erhalten (Abbildung 2), wobei  $\Delta a$  in Wirklichkeit unendlich klein zu denken ist, sodass es also auch gradlinig ist. Wird dessen Mittelpunkt mit  $Y$  bezeichnet, so ergibt sich

$$\Delta St_c = \Delta a \cdot \bar{XY}$$

Da das kleine, doppelt schraffierte Dreieck ähnlich ist dem Dreieck  $CYX$ , so ist aber auch

$$\Delta a \cdot \bar{XY} = \Delta l \cdot \bar{CY} = \Delta l \cdot r, \quad \text{d. h. es ist}$$

$\Delta St_c =$  der Fläche des schraffierten Rechtecks,

woraus durch Summation über den ganzen Kreisbogen folgt:

$$St_c = \Sigma(\Delta St_c) = \text{Fläche des Rechtecks } AAB^1B^1 = r \cdot \bar{AB} \quad (2)$$

Diesen Wert in Gleichung 1 eingesetzt, gilt

$$a \cdot \bar{CS} = r \cdot \bar{AB} \quad \dots \quad (3)$$

womit die Unbekannte  $CS$  und damit der Schwerpunkt  $S$  bestimmt ist. Die graphische Auflösung von Gleichungen der vorstehenden Form geschieht bekanntlich mit Hilfe ähnlicher Dreiecke. Abbildung 3 gibt die möglich einfachste Lösung: in einem Bogenendpunkt, z. B. in  $A$ , zieht man die Kreistangente und trägt darauf von  $A$  aus die Länge des Bogens  $ADB$  ab<sup>1)</sup>, womit der Punkt  $F$  erhalten wird; dann schnei-

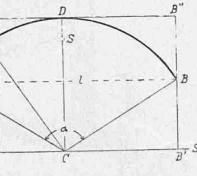


Abbildung 2.

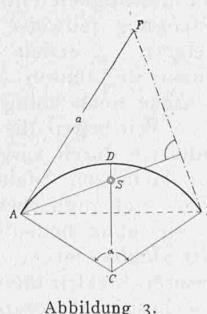


Abbildung 3.

<sup>1)</sup> Die Streckung eines Bogens erfolgt sehr rasch und genau nach der Methode von Culmann; vgl. dessen Graphische Statik.

det die durch den Punkt  $A$  zur Geraden  $BF$  gezogene Senkrechte die Winkelhalbierungsgeraden  $CD$  im Schwerpunkt  $S$ . Denn in den Dreiecken  $AFB$  und  $CAS$  stehen die Seiten aufeinander senkrecht, mithin sind die beiden Dreiecke ähnlich, woraus folgt:

$$\bar{AF} \cdot \bar{CS} = \bar{AA} \cdot \bar{CB}$$

$$\text{oder } a \cdot \bar{CS} = \bar{AB} \cdot r$$

entsprechend Gleichung 3.

Ist der Winkel  $\alpha$  gross, so reduziert man das Dreieck  $ABF$  auf die Hälfte, d. h. man trägt auf der Tangente in  $A$  die halbe Bogenlänge  $AD$  auf (Abbildung 4) worauf  $AS \perp EF$  gezogen wird.

Ist  $\alpha < 57^\circ$ , so wird in Abbildung 3  $\bar{BF} < \bar{AS}$ , so dass ein Fehler in der Richtung von  $BF$  sich in vergrössertem Maßstab auf den Schwerpunkt  $S$  überträgt. Man umgeht dieses Arbeiten vom Kleinen ins Große, wenn man auf das Dreieck  $ABF$  (Abbildung 3) den Satz anwendet, dass die von den Endpunkten auf die Gegenseiten gefällten Lote sich in einem Punkte schneiden. Das Lot vom Punkt  $B$  auf die Gegenseite  $AF$  ist aber parallel  $AC$ , und das Lot vom Punkt  $F$  auf die Gegenseite  $AB$  ist parallel  $CD$ ; mithin ergibt sich nach Abbildung 5 mit  $BG \parallel AC$  und  $FG \parallel CD$  der auf dem dritten Lot  $AS$  gelegene Schnittpunkt  $G$  und damit der Schwerpunkt  $S$ . Wird  $\alpha = 133^\circ$ , so fällt der Punkt  $F$  auf die Winkelhalbierungsgeraden  $CD$ , und der Punkt  $G$  fällt daher mit  $S$  zusammen; für Winkel  $\alpha > 133^\circ$  wird  $\bar{AG} < \bar{AS}$ , der Schwerpunkt  $S$  also besser nach Abbildung 3 oder 4, bzw. 7 (siehe weiter unten) bestimmt.

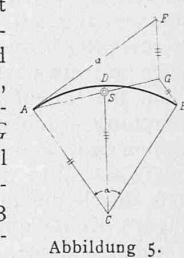


Abbildung 4.

Die Gleichung (3) bleibt bestehen, wenn für  $CS$  und  $AB$  ihnen proportionale Längen eingeführt werden. Nimmt man daher für  $CS$  dessen senkrechte Projektion  $\bar{CL}$  auf  $CA$  (Abbildung 6) so muss man für  $\bar{AB}$ , da  $AB \perp CS$  ist, die senkrechte Projektion auf eine zu  $CA$  senkrechte Gerade nehmen, am einfachsten also auf die Gerade  $SL$ , womit die entsprechende Länge  $\bar{LH}$  erhalten wird und Gleichung 3 nun lautet:

$$a \cdot \bar{CL} = r \cdot \bar{LH} \text{ oder } \bar{AF} \cdot \bar{CL} = \bar{CA} \cdot \bar{LH}$$

d. h. die Dreiecke  $CAF$  und  $CLH$  sind ähnlich, mithin muss der Punkt  $H$  auf der Geraden  $CF$  liegen. Um daher den Schwerpunkt  $S$  zu bestimmen, kann man auch auf der Tangente im Endpunkt  $A$  die Bogenlänge von  $A$  aus abtragen, den so erhaltenen Punkt  $F$  mit  $C$  verbinden und nun, durch einmaliges Anlegen des Winkels,  $BH \parallel CA$  und  $HL \perp CA$  ziehen, welch letztere Gerade den Schwerpunkt  $S$  bestimmt. Wie die Konstruktion nach Abbildung 5, so ist auch die vorstehende nur für Winkel  $\alpha <$  etwa  $\frac{3}{2} \pi$  zu empfehlen. —

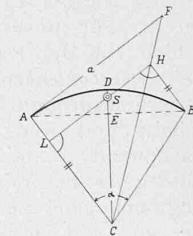


Abbildung 5.

Natürlich kann man auch hier wieder — analog den Abbildungen 3 und 4 — statt der ganzen Bogenlänge  $a$  nur deren Hälfte auf der Tangente in  $A$  abtragen, worauf dann an Stelle des Punktes  $B$  der Punkt  $E$  zu nehmen ist.

Denkt man sich die Abbildung 6 durch ihr Spiegelbild bezüglich  $AC$  ergänzt, so erkennt man, dass der Punkt  $L$  nichts anderes ist als der Schwerpunkt des so erhaltenen Kreisbogens vom Zentriwinkel  $2\alpha$ . Man kann also für grosse Winkel  $\alpha$  weitabliegende Punkte  $F$  oder allzu schiefe Schnitte umgehen, indem man den Schwerpunkt für die Bogenhälfte ermittelt, womit dann sofort auch der Schwerpunkt für den ganzen Bogen bestimmt ist. Anderseits ergibt sich aber auch die Schwerpunktbestimmung nach Abbildung 7, bei der, anstatt wie bisher vom Bogen-Endpunkt, vom Bogenscheitel ausgegangen wird. Der

unmittelbare Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion folgt aus den ähnlichen Dreiecken  $DFC$  und  $SHC$ , wonach

$$\overline{DF} \cdot \overline{CS} = \overline{CD} \cdot \overline{SH} \text{ ist, oder, da } \overline{SH} = \overline{EB} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\frac{a}{2} \cdot \overline{CS} = r \frac{\overline{AB}}{2} \text{ entsprechend Gleichung (3).}$$

Mit der Ermittlung des Bogenschwerpunktes ist die Grundlage für alle weiteren Konstruktionen gegeben, weshalb es angezeigt erschien, etwas näher auf die Bestimmung von  $S$  einzugehen.

3. Aus der Abbildung 6 kann eine für die weiteren Untersuchungen höchst fruchtbare Beziehung abgeleitet werden. Zunächst folgt: Fläche des Kreisausschnittes

$$CADBC = \frac{ar}{2} = \frac{\overline{AF} \cdot \overline{AC}}{2} = \text{Dreieck } AFC$$

Da  $BH \parallel AC$ , so ist weiters

Dreieck  $ABC$  = Dreieck  $AHC$ .

Die vorstehenden Gleichungen von einander subtrahiert, gibt:

Fläche des Kreisabschnittes  $ADB$  = Dreieck  $AFH$ . Da  $LH \perp CA$ , also  $\parallel AF$ , so ist aber auch

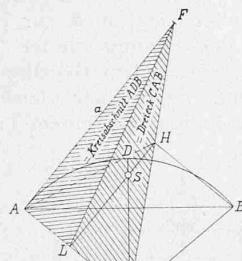


Abbildung 8.

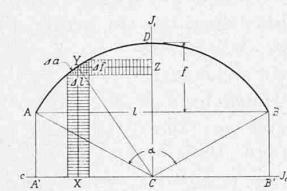


Abbildung 9.

Dreieck  $AFH$  = Dreieck  $AFL$ , also  $= \frac{\overline{AF} \cdot \overline{AL}}{2} = \frac{a}{2} \overline{AL}$ ,

somit Kreisabschnitt  $ADB$  = Dreieck  $AFL$   $= \frac{a}{2} \overline{AL}$  (4)

woraus unmittelbar die weitere Beziehung folgt:

Dreieck  $ABC$  = Dreieck  $LFC$   $= \frac{a}{2} \overline{LC} = \frac{a}{2} (r - \overline{AL})$  (5)

4. Nunmehr kann die *Zentralellipse* bestimmt werden. Zu dem Ende ermitteln wir die Trägheitsmomente  $i_1$  und  $i_c$  bezüglich der Geraden  $CD$  und  $c$ .

Das Trägheitsmoment des Bogenelementes  $\Delta a$  bezüglich der Geraden  $CD$  ist

$$\Delta I_1 = \Delta a \cdot \overline{YZ}^2$$

Da das doppelt schraffierte, kleine Dreieck ähnlich ist dem Dreieck  $CYZ$ , so ist

$$\Delta a \cdot \overline{YZ} = \Delta f \cdot r, \quad \text{somit}$$

$$\Delta I_1 = r \Delta f \cdot \overline{YZ}$$

$\Delta f \cdot \overline{YZ}$  ist aber gleich dem Inhalt des vertikal schraffierten Flächenstreifens, denn in Wirklichkeit ist ja  $\Delta f$  unendlich klein. Durch Summation über den ganzen Bogen  $ADB$  ergibt sich hiernach das erste Hauptträgheitsmoment zu  $I_1 = \Sigma (\Delta I_1) = r \Sigma (\Delta f \cdot \overline{YZ}) = r \times \text{Fläche des Kreisabschnittes } ADB$ . (6)

Für die Fläche  $ADB$  ihren Wert  $\frac{a}{2} \overline{AL}$ , Gleichung 4, eingeführt, gilt  $I_1 = \frac{1}{2} ar \overline{AL}$  (7)

In gleicher Weise erhält man für die Gerade  $c$   $\Delta I_c = \Delta a \cdot \overline{YX}^2 = r \cdot \Delta l \cdot \overline{YX} = r \times \text{horizontal schraffierter Flächenstreifen}$ ,

mithin  $I_c = \Sigma (\Delta I_c) = r \Sigma (\Delta l \cdot \overline{YX}) = r \times \text{Fläche } A^*ADB^*$ . (8)

oder, da

Fläche  $A^*ADB^*$  = Kreisausschnitt  $CADBC$  + Dreieck  $ABC$

$$= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} a \overline{LC}$$

$$= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} a (r - \overline{AL}) \quad \left\{ \text{nach Gleich. (5)} \right.$$

so ergibt sich

$$I_c = \frac{1}{2} ar (r + \overline{LC}) = \frac{1}{2} ar (2r - \overline{AL}) \quad \dots \quad (9)$$

Mit  $I_c$  ist auch das Trägheitsmoment für die zu  $c$  parallele Schwerpunktstaxe, d. h. das zweite Hauptträgheitsmoment  $i_{\parallel}$  bekannt:

$$i_{\parallel}^2 = I_c - a \overline{CS}^2 = \dots \dots \dots \quad (10)$$

Dividiert man das Trägheitsmoment  $I$  durch die Bogenlänge  $a$ , so erhält man das Quadrat des Trägheitsarms  $i$ :

$$i^2 = \frac{I}{a}$$

Die Gleichungen 7, 9 und 10 ergeben daher

$$i_1^2 = \frac{1}{2} r \overline{AL} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

$$i_c^2 = \frac{1}{2} r (r + \overline{LC}) = \frac{1}{2} r (2r - \overline{AL}) \quad \dots \quad (12)$$

$$i_{\parallel}^2 = i_c^2 - \overline{CS}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

Fällt man nach Abbildung 10 vom Bogenschwerpunkt  $S$  das Lot  $SL$  auf  $AC$  und markiert dessen Schnittpunkt  $K$  mit dem Kreisbogen, so ist

$$\overline{AK}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AL} = 2r \cdot \overline{AL} \text{ d. h.} = 4i_1^2$$

$$\overline{OK}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OL} = 2r (2r - \overline{AL}) \text{ d. h.} = 4i_c^2$$

mithin wird

$$i_1 = \frac{1}{2} \overline{AK} = \overline{AM} = \overline{MK} = \overline{CN} \quad \dots \quad (14)$$

$$i_c = \frac{1}{2} \overline{OK} = \overline{ON} = \overline{NK} = \overline{CM} \quad \dots \quad (15)$$

wobei  $CM \perp AK$ , also  $\parallel OK$  und  $CN \perp OK$ , also  $\parallel AK$  ist.

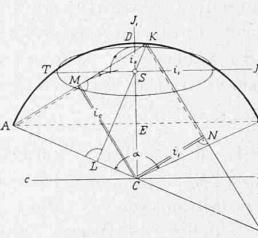


Abbildung 10.

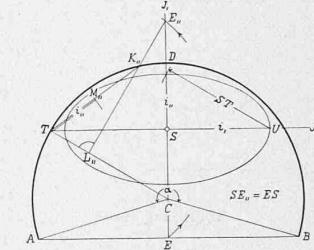


Abbildung 11.

Um die Zentralellipse des Kreisbogens zu erhalten, hat man daher nur  $SK \perp AC$  zu ziehen, dann gibt die halbe Länge der Sehne  $AK$  bzw. das von  $C$  auf  $OK$  gefällte Lot sofort den zu  $CD$  senkrechten Hauptträgheitsarm  $i_1$ . Den zweiten, in  $CD$  gelegenen Hauptträgheitsarm  $i_{\parallel}$  erhält man, entsprechend Gleichung (13), indem man die zu  $AB$  parallele Schwerpunktstaxe mit dem aus  $C$  beschriebenen Kreisbogen vom Halbmesser  $CM = i_c$  schneidet; die so erhaltene Länge muss dann noch aus  $S$  auf  $CD$  geschlagen werden.

Es kann aber  $i_{\parallel}$  auch unmittelbar auf der Geraden  $CD$  abgeschnitten werden. Aus dem rechtwinkligen Dreieck  $CMA$  folgt nämlich

$$\overline{CM}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AM}^2 \text{ oder } i_c^2 = r^2 - i_1^2$$

womit Gleichung (13) geschrieben werden kann:

$$i_{\parallel}^2 = (r^2 - \overline{CS}^2) - i_1^2 \text{ oder } = (CT^2 - \overline{CS}^2) - i_1^2, \quad \text{d. h.}$$

$$i_{\parallel}^2 = \overline{ST}^2 - i_1^2 \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

Hiernach wird also der Hauptträgheitsarm  $i_{\parallel}$  auch erhalten, wenn man nach Abbildung 11 die Winkelhalbierungsgerade  $CD$  mit dem aus dem Endpunkt  $U$  der Hauptachse  $i_{\parallel}$  beschriebenen Kreisbogen vom Radius  $ST = \text{halbe Länge der Schwerpunktstaxe}$  schneidet. — Diese Ermittlung von  $i_{\parallel}$  sowohl als jene nach Abbildung 10 sind nur für Winkel  $\alpha > 120^\circ$  zu empfehlen.

Am genauesten erhält man  $i_{\parallel}$  wenn man die Länge  $2i_{\parallel}$  analog der Länge  $2i_1$  ermittelt. Zu dem Ende führen wir den Wert für  $i_{\parallel}^2$  nach Gleichung 12 in die Gleichung (13) ein und bekommen

$$i_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} r (r + \overline{LC}) - \overline{CS}^2 = \frac{1}{2} r \left[ r - (2 \frac{\overline{CS}^2}{r} - \overline{LC}) \right]$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $CSL$  und  $CAE$  (Abbildung 10) folgt

$$\overline{LC} = \overline{CE} \frac{\overline{CS}}{\overline{CA}} = \overline{CE} \frac{\overline{CS}}{r}, \quad \text{mithin wird}$$

auch:  $i_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} r \left[ r - \frac{\overline{CS}}{r} (2 \overline{CS} - \overline{CE}) \right]$  oder

$$i_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} r \left[ r - \frac{\overline{CS}}{r} (\overline{CS} + \overline{ES}) \right] \quad \dots \dots \quad (17)$$

