

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 51/52 (1908)
Heft: 23

Artikel: Wasserschlossprobleme
Autor: Prášil, Franz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27534>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>



Abb. 6. Speisezimmer. — Entwurf von J. Schneider in Zürich.

fabrik Gyax & Limberger, ebenfalls in Zürich. Neben den anheimelnden Eichenmöbeln, die unser Bild zeigt, lenkte in diesem Raume besonders auch die originelle prächtige Heizkörperverkleidung von Gebrüder Linke die Aufmerksamkeit der Besucher auf sich.

Indem wir uns auf diese kleine Auswahl von Darstellungen beschränken müssen, verweisen wir wiederholt auf die offizielle, in Vorbereitung befindliche umfassendere Publikation dieser Ausstellung.

Wasserschlossprobleme.

Von Prof. Dr. Franz Prášil.

(Fortsetzung.¹⁾)

Spezial-Fall b: Plötzliches Öffnen.

Vor Beginn des Abflusses durch die Rohrleitung ist das Wasser im Stollen und im Wasserschloss in Ruhe. Der Wasserspiegel im Wasserschloss befindet sich auf dem Niveau NN , es ist $z = 0$. Vom Moment der Eröffnung an, welche als plötzlich im vollen Betrag eintretend angenommen wird, findet Abfluss statt. Nun wird allerdings der Abfluss im vollen Betrag wegen der Trägheit der Masse in der Druckleitung nicht sofort eintreten; auch in der folgenden Zeit wird, selbst bei konstanter Öffnung des Abflussquerschnittes q nicht konstant bleiben, da sich mit der Aenderung der Wasserspiegellhöhe auch das die Abflussgeschwindigkeit bedingende Gefälle ändert. Doch soll analog wie sub a angenommen werden, dass diese Einflüsse und Veränderungen derart gering sind, dass für die folgende Untersuchung q vom Moment der Eröffnung an als konstant angenommen werden kann.

¹⁾ In der Tabelle für Arbeitsbilanz auf Seite 277 muss es heissen: «Hebearbeit für 2455 t» anstatt 2,455 t. Ferner ist hier wie in der folgenden Textzeile statt «Meter/Tonnen» zu lesen: Meter Tonnen bzw. *mt*.

Die Erscheinung wird nun folgenden Verlauf nehmen: Sofort nach der Eröffnung wird der Wasserspiegel im Wasserschloss sinken; unter dem hiedurch zwischen dem Wasserspiegel vor dem Stollen und demjenigen im Wasserschloss entstehenden Gefälle wird Bewegung im Stollen eintreten, die jedoch infolge der Massenträgheit und der anwachsenden Reibung nicht in der Masse zunimmt, als dem durch das Sinken des Wasserspiegels im Wasserschloss unter das Niveau NN sich einstellenden Gefälle entspricht. Die Folge hiervon ist, dass der Wasserspiegel im Wasserschloss unter dasjenige Niveau sinkt, das dem Beharrungszustand bei konstantem Durchfluss entspricht, wodurch im weitem vorerst Absinken bis zu einem tiefsten Niveau, und dann wieder eine gedämpfte Schwingung eintritt, bis schliesslich unter dem Einfluss der Widerstände der Beharrungszustand erreicht wird, bei dem das Niveau im Wasserschloss um den Betrag des nötigen Rinngefälles unter das Niveau NN zu liegen kommt.

Die Grundgleichung C nimmt für diesen Fall, sofern man des Vergleiches halber auch hier $q = \varepsilon Q_n$ setzt, die gleiche Form an wie im Falle a und daher auch alle andern Gleichungen; die Bestimmung der Integrationskonstanten wird jedoch andere Werte für A und β ergeben, da jetzt der Anfangszustand ein anderer ist als früher. Man hat zur Zeit $t = 0$: $z = 0$ und $v = v_0 = -\varepsilon \frac{Q_n}{F} = -\varepsilon c_n$.

Hiermit erhält man zur Bestimmung der Konstanten A und B die Gleichungen:

$$A \sin \beta = +\varepsilon h_{wn}; \quad A \cos \beta = -\varepsilon \left(c_n - \frac{h_{wn}}{2T_0} \right) \mathcal{T}.$$

Dieselbe Ueberlegung wie im Falle a betreffend die Vorzeichen von $\sin \beta$ und $\cos \beta$ zeigt in diesem Fall, dass β im zweiten Quadranten anzunehmen ist, wenn $\frac{F}{f} < \frac{2L}{v^2 g}$.

und im ersten Quadranten, wenn $\frac{4L}{v^2 g} > \frac{F}{f} > \frac{2L}{v^2 g}$ ist.

Man erhält weiter $A = \varepsilon h_{wn} \frac{\mathcal{C} T_0}{T^2}$;

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{1}{\frac{T_0}{\mathcal{C}} - \frac{1}{4} \frac{\mathcal{C}}{T_0}}$$

Wird derart geöffnet, dass der Ablauf den vollen Betrag $q = Q_n$ annimmt ($\varepsilon = 1$), dann nimmt A denselben Wert an, wie im Fall a bei vollkommenem Abschluss ($\varepsilon = 0$). Der Ausdruck für β hat in beiden Fällen gleiche Form; daraus ergibt sich mit Rücksicht auf die vorigen Erörterungen, dass der Anfangsstrahl im polaren Koordinatensystem für den Fall b gegen jenen im Fall a um den Winkel 180° verdreht ist. Die Dauer der Periode ist dieselbe wie im Fall a ; die graphische Darstellung kann ebenfalls von derselben Spirale mit der Steigung $\operatorname{tg} a = - \frac{\mathcal{C}}{2 T_0}$ ausgehen.

Die Rechnungsergebnisse sind, wenn man volles Öffnen von 0 auf $15,0 \text{ m}^3/\text{Sek.}$ Abfluss, also $\varepsilon = 1$, dieselben Dimensionen und $v = 1,445 \text{ Sek.}$ wie früher annimmt, die folgenden:

$$T = 137,5 \text{ Sek.}; T = 194,5 \text{ Sek.}; \mathcal{C} = 147 \text{ Sek.}$$

$$A = 4,417 \text{ m}; \quad \angle \beta = 180^\circ + (-41^\circ 24') = 138^\circ 36';$$

$$\operatorname{arc} \beta = +2,420$$

$$z = -2,92 + 4,417 e^{-\frac{t}{389}} \sin \left(2,42 + \frac{t}{147} \right)$$

$$\angle \gamma = 69^\circ 18'; \operatorname{arc} \gamma = 1,210$$

$$v = 0,032 e^{-\frac{t}{389}} \sin \left(-1,21 - \frac{t}{147} \right)$$

$$= -0,032 e^{-\frac{t}{389}} \sin \left(1,932 + \frac{t}{147} \right)$$

Hieraus bestimmt sich die Zeit für das erste Minimum von z

$$t_{1\min} = 1,932 \cdot 147 = 284''$$

und für das erste Maximum

$$t_{1\max} = (1,932 + 3,142) 147 = 746''.$$

Das sind dieselben Werte wie früher für das Eintreten des ersten Maximums, bzw. Minimums. Schliesslich folgt

$$z'_{\min} = -2,92 - 1,99 = -4,91 \text{ m}; \quad z'_{\max} = -2,31 \text{ m}.$$

Da z'_{\max} negativ ist, so ist zu erkennen, dass bei den angenommenen Dimensionen und voller Eröffnung auf $15 \text{ m}^3/\text{Sek.}$ Abfluss der Wasserspiegel nach dem ersten Absinken nicht mehr über das Niveau NN kommt (Abb. 5).

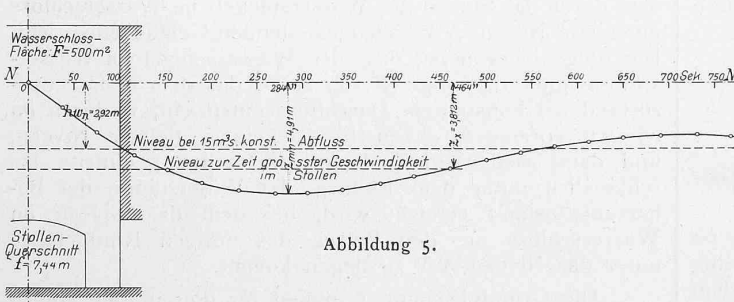


Abbildung 5.

Die Geschwindigkeit im Stollen erreicht zur Zeit der grössten Absenkung den Betrag $w_n = \frac{Q_n}{f}$; sie wird aber von da ab noch immer grösser, da in der nun folgenden Periode des Aufsteigens des Wasserspiegels ausser der Abflussmenge Q noch dasjenige Wasser aus dem Stollen zufließen muss, das zum Wiederauffüllen des Wasserschlosses nötig ist und zwar wird dieses Anwachsen so lange dauern, bis v zu einem Maximum wird, denn es wird wegen $wf = vF + Q_n$ die Geschwindigkeit w ein Maximum, wenn v ein Maximum ist; man erhält:

$$v_{\max} = \frac{A}{T} e^{-\frac{\pi \mathcal{C}}{2 T_0}} \sin \gamma = 0,00917 \text{ m/Sek.}$$

$$w_{\max} = \frac{F}{f} v_{\max} + w_n = 2,636 \text{ m/Sek.}$$

Von praktischem Belang ist das Resultat, dass bei plötzlicher voller Oeffnung die grösste Absenkung unter das Niveau NN denselben Betrag erreicht, wie die grösste Hebung ab Anfangsniveau bei plötzlichem vollem Schluss.

Spezialfall c: Veränderlicher Abfluss.

Es wird im folgenden zuerst der Einfluss allmählichen Schliessens bzw. Oeffnens der Druckleitung und dann der Fall zeitlich variablen Abflusses untersucht werden. Die Bewegung wird während der Phase des allmählichen Schliessens anderer Natur sein, als nach eingetretenem Schluss. Es ist daher die Untersuchung für beide Phasen getrennt durchzuführen.

1. Bewegung während des Schliessens.

Für das allmähliche Schliessen sei angenommen, dass dasselbe derart erfolgt, dass der Abfluss linear mit der Zeit abnimmt, also durch die Formel ausgedrückt wird:

$$q = Q_n \left(1 - \frac{t}{\tau} \right), \text{ wobei } \tau \text{ die Schlusszeit bedeutet, die zum vollständigen Schliessen nötig ist. Man erhält hiermit:}$$

$$c = c_n \left(1 - \frac{t}{\tau} \right); \quad \frac{dc}{dt} = -\frac{c_n}{\tau} \text{ und damit die für diesen Fall spezialisierte Hauptgleichung } C_a \text{ in der Form:}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{T_0} \frac{dz}{dt} + \frac{z}{T^2} + \frac{c_n}{T_0} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) - \frac{c_n}{\tau} = 0. \quad C_a$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ergibt sich aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

aus dem allgemeinen Glied $z_1 = A \cdot e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\beta + \frac{t}{\mathcal{C}} \right)$ und dem partikulären Integral $z_2 = a + bt$, wobei a und b bestimmt werden, indem man den Wert für z_2 , ferner $\frac{dz}{dt} = b$; $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ in die Gleichung C_a einsetzt. Man erhält dann:

$$\frac{b}{T_0} + \frac{a}{T^2} + \frac{b}{T^2} + \frac{c_n}{T_0} - \frac{c_n}{T_0 \tau} - \frac{c_n}{\tau} = 0,$$

und da diese Gleichung für alle Werte von t erfüllt sein muss, folgen die beiden Gleichungen

$$\frac{b}{T_0} + \frac{a}{T^2} + \frac{c_n}{T_0} - \frac{c_n}{\tau} = 0; \quad \frac{b}{T^2} + \frac{c_n}{T_0 \tau} = 0,$$

und aus denselben mit $h_{wn} = \frac{c_n T^2}{T_0}$;

$$a = h_{wn} \left[\frac{T}{\tau} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) - 1 \right]; \quad b = \frac{h_{wn}}{\tau}.$$

Man erhält somit durch $z = z_1 + z_2$ das allgemeine Integral:

$$z = A e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\beta + \frac{t}{\mathcal{C}} \right) + a + bt \quad \text{I}^\circ$$

und durch Differentiation nach t , mit $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2 T_0}{\mathcal{C}}$

$$v = \frac{A}{T} e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\gamma - \beta - \frac{t}{\mathcal{C}} \right) + b \quad \text{II}^\circ$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante hat man zu beachten, dass für $t = 0$ auch in diesem Fall $z = z_0 = -h_{wn}$ ist (wie im Fall a), dass hingegen $v = v_0 = 0$ ist, da eben die Absperrung allmählich stattfindet. Hiermit ergeben sich

$$A \sin \beta = -h_{wn} \frac{T_0}{\tau} \left[1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right];$$

$$A \cos \beta = -h_{wn} \frac{\mathcal{C}}{2 \tau} \left[3 - \frac{T^2}{T_0^2} \right];$$

$$A = h_{wn} \cdot \frac{T_0}{\tau} \frac{\mathcal{C}}{T}; \quad \operatorname{tg} \beta = 2 \frac{1 - \frac{T^2}{T_0^2}}{3 - \frac{T^2}{T_0^2}} \cdot \frac{T_0}{\mathcal{C}}.$$

Zur graphischen Darstellung dieser Funktionen z und v kann man dieselben je in drei Gleichungen zerlegen, z. B. die z -Funktion in

$$R = A e^{-\frac{t}{2T_0}} \varphi; \quad z_1 = R \sin \left(\beta + \varphi \right); \quad z_2 = a + (b \mathcal{C}) \varphi.$$

Durch den Ausdruck für R ist wieder die logarithmische Spirale mit der Steigung $\operatorname{tg} a = -\frac{\mathcal{C}}{2 T_0}$ und dem Anfangsstrahle R_0 und β bestimmt. z_1 erhält man im

rechtwinkligen Koordinatensystem durch Projektion aus dem polaren System wie in den früheren Fällen; z_2 stellt in demselben rechtwinkligen Koordinatensystem eine Gerade dar, die die Ordinatenachse im Abstand a vom Ursprung schneidet und deren Neigung gegen die Abszissenachse durch die Richtungskonstante $b \mathcal{C}$ bestimmt ist; die algebraische Summe von $z_1 + z_2$ gibt z . (Abbildung 6.)

Von praktischer Bedeutung ist jedoch nur dasjenige Stück der Kurve, das zwischen den Abszissenwerten 0 und τ liegt, da zur Zeit τ nach Annahme der Schluss eingetreten ist.

2. Bewegung nach Schluss.

Ist der Schluss eingetreten, so erfolgt die Bewegung des Wasserspiegels in dem Sinne weiter, wie im Fall a beschrieben. Es gelten von dieser Zeit ab die Gleichungen:

$$z = A_1 e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin\left(\beta_1 + \frac{t}{\mathcal{C}}\right) \text{ und}$$

$$v = \frac{A_1}{T} e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin\left(\gamma - \beta_1 - \frac{t}{\mathcal{C}}\right) \text{ mit } \operatorname{tg} \gamma = \frac{2T_0}{\mathcal{C}},$$

wobei die Konstanten A_1 und β_1 aus den für $t = \tau$ gefundenen Werten von z und v zu berechnen sind; es empfiehlt sich hierbei lediglich der bequemeren Durchführung der Rechnung halber für diese zweite Phase die Zeit vom Augenblick des eingetretenen Schlusses an zu messen, sodass man für die Bestimmung der Konstanten A_1 und β_1 die Gleichungen erhält

$$A_1 \sin \beta_1 = z_\tau$$

$$A_1 \cos \beta_1 = \left(v_\tau + \frac{z_\tau}{2T_0}\right) \mathcal{C}$$

wobei z_τ und v_τ die Endwerte der ersten Phase sind.

3. Rechnungsbeispiel.

Im folgenden ist die Rechnung im Anschluss an das bisherige Beispiel durchgeführt für Abschluss von $15 \text{ m}^3/\text{Sek.}$ Durchfluss in 10, 100 und 200 Sekunden; man erhält mit $T = 137,5 \text{ Sek.}$; $T_0 = 194,5 \text{ Tek.}$; $\mathcal{C} = 147 \text{ Sek.}$; $h_{\text{win}} = 2,92 \text{ m.}$

bei $\tau =$	10"	100"	200"
$a = h_{\text{win}} \left[\frac{T}{\tau} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) - 1 \right] =$	+ 25,492 m	+ 0,079 m	- 1,496 m
$b = \frac{h_{\text{win}}}{\tau} =$	+ 0,292 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	+ 0,0292 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	+ 0,0146 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$A = h_{\text{win}} \frac{T_0}{\tau} \cdot \frac{\mathcal{C}}{T} =$	60,72 m	6,072 m	3,036 m
$\operatorname{tg} \beta = 2 \frac{\left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) T_0}{\left(3 - \frac{T^2}{T_0^2} \right) \mathcal{C}} =$		0,52948	

$$\angle \beta = 207^\circ 54'; \operatorname{arc} \beta = 3,628$$

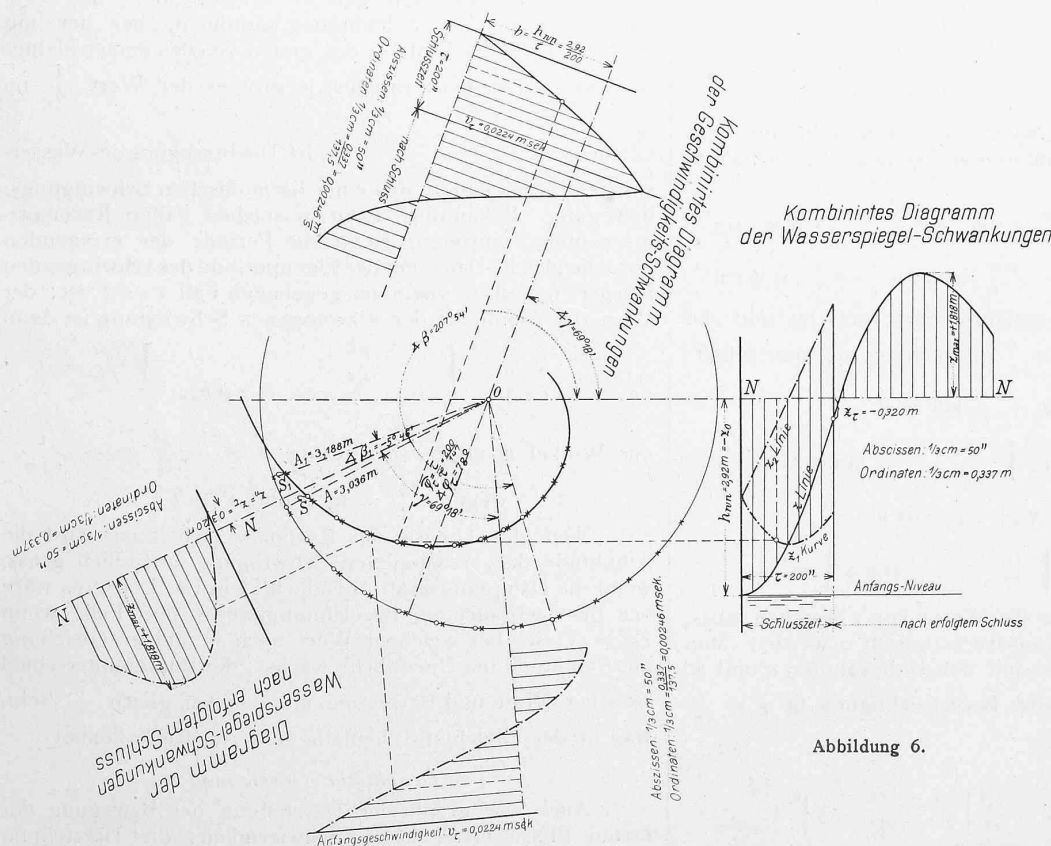
$$\angle \gamma = 69^\circ 18'; \operatorname{arc} \gamma = 1,210$$

z_τ	=	- 2,772 m	- 1,478 m	- 0,320 m
v_τ	=	+ 0,0300 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	+ 0,0278 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	+ 0,0224 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$A_1 \sin \beta_1$	=	- 2,772 m	- 1,478 m	- 0,320 m
$A_1 \cos \beta_1$	=	+ 3,363 m	+ 3,528 m	+ 3,172 m
A_1	=	4,358 m	3,825 m	3,188 m
$\angle \beta_1 \text{ negativ}$	=	- 39^\circ 30'	- 22^\circ 44'	- 5^\circ 46'
$\operatorname{arc} \beta_1$	=	- 0,6894	- 0,3968	- 0,1006
z_{max}	=	+ 1,989 m	+ 1,951 m	+ 1,818 m

Man erkennt auch aus der graphischen Darstellung (Abb. 4, S. 276), dass Schlusszeiten bis zu 100 Sek. die Grösse der maximalen Erhebung wenig beeinflussen; es ist dies dadurch zu erklären, dass während dieser Zeit eine sehr geringe Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit im Stollen eintritt.

Für die Bestimmung der Wasserspiegel-Schwankungen wird man daher die Resultate des Grenzfalles, d. i. des plötzlichen Abschlusses in Berücksichtigung ziehen, da für dieselben die Berechnung eine wesentlich einfachere ist. Bei allmählichem Öffnen treten dieselben Verhältnisse ein. Die Senkung unter das Niveau NN findet hierbei in gleicher Grösse und zeitlicher Folge statt, wie die Hebung über das ursprüngliche Niveau im behandelten Fall.

* * *



Die Darstellung der Bewegung kann nun nach demselben Verfahren erfolgen, wie im Fall a ; für die Berechnung der praktisch wichtigsten Grösse, der maximalen Erhebung, erhält man

$$z_{\text{max}} = A_1 e^{-\frac{\mathcal{C}}{2T_0}} (\gamma - \beta_1)$$

Von Interesse ist der Fall einer Abflussänderung in dem Sinn, dass der Abfluss innerhalb einer bestimmten Zeit zuerst bedeutend ansteigt und dann wieder entweder auf denselben oder einen veränderten Betrag heruntersinkt; es kann dies z. B. eintreten, wenn die Zentrale für den Bahnbetrieb bestimmt ist.

1. Analytische Untersuchung.

Es sei nun angenommen, dass unter sonst gleichen Verhältnissen wie früher folgendes Abflussgesetz besteht:

$$q = \varepsilon Q_n \left(1 + q \sin \frac{t}{\tau} \right)$$

sodass also zur Zeit $t = 0$ $q = \varepsilon Q_n$

$$t = \frac{\pi}{2} \tau \quad . \quad . \quad . \quad q = \varepsilon Q_n (1 + q)$$

$$t = \pi \tau \quad . \quad . \quad . \quad q = \varepsilon Q_n$$

beträgt; von der Zeit $t = \pi \tau$ an bleibe der Abfluss wieder konstant; ε und q sind einfache Zahlen, q bedeutet das Verhältnis der maximalen Vermehrung des Abflusses zum normalen Abfluss. Es wird dann

$$c = \frac{q}{F} = \varepsilon c_n \left(1 + q \sin \frac{t}{\tau} \right); \quad \frac{dc}{dt} = \varepsilon q \frac{c_n}{\tau} \cos \frac{t}{\tau};$$

die Gleichung C nimmt für diesen Fall die Form an

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{T_0^2} \frac{dz}{dt} + \frac{z}{T^2} + \frac{\varepsilon c_n}{T_0} + \frac{\varepsilon q c_n}{T_0} \sin \frac{t}{\tau} + \frac{\varepsilon q c_n}{\tau} \cos \frac{t}{\tau} = 0$$

Setzt man

$$z = y - \frac{\varepsilon c_n T^2}{T_0} = y - \varepsilon h_{wn}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

und ferner

$$\varepsilon q c_n \left[\frac{1}{T_0} \sin \frac{t}{\tau} + \frac{1}{\tau} \cos \frac{t}{\tau} \right] = \varepsilon q c_n \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{1}{\tau^2}} \sin \left(\varphi + \frac{t}{\tau} \right)$$

mit $\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_0}{\tau}$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{T_0^2} \frac{dy}{dt} + \frac{y}{T^2} + \varepsilon q c_n \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{1}{\tau^2}} \sin \left(\varphi + \frac{t}{\tau} \right) = 0$$

und folgt hierfür wieder aus der Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y = y_1 + y_2$ mit

$$y_1 = A e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\beta - \frac{t}{\tau} \right) \quad \text{als allgemeines Integralglied}$$

$$y_2 = a \cdot \sin \left(\psi + \frac{t}{\tau} \right) \quad \text{als partikuläres Integralglied.}$$

Letzteres kann auch geschrieben werden:

$$y_2 = a \sin \psi \cdot \cos \frac{t}{\tau} + a \cos \psi \sin \frac{t}{\tau}$$

Die Integrationskonstanten A und β sind aus dem Anfangszustand die Konstanten a und ψ dadurch zu erhalten, dass man bildet:

$$\frac{dy_2}{dt} + \frac{a}{\tau} \cos \left(\psi + \frac{t}{\tau} \right) = \frac{a}{\tau} \cos \psi \cdot \cos \frac{t}{\tau} - \frac{a}{\tau} \sin \psi \cdot \sin \frac{t}{\tau}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{a}{\tau^2} \sin \left(\psi + \frac{t}{\tau} \right) = -\frac{a}{\tau^2} \sin \psi \cos \frac{t}{\tau} - \frac{a}{\tau^2} \cos \psi \sin \frac{t}{\tau}$$

diese Werte in die Differentialgleichung einsetzt und die Glieder mit $\cos \frac{t}{\tau}$ und $\sin \frac{t}{\tau}$ zusammenzieht; man erhält:

$$\left[-\frac{a}{\tau^2} \sin \psi + \frac{a}{\tau T_0} \cos \psi + \frac{a}{T^2} \sin \psi + \right. \\ \left. + \varepsilon q c_n \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{1}{\tau^2}} \sin \varphi \right] \cos \frac{t}{\tau} +$$

$$\left[-\frac{a}{\tau^2} \cos \psi - \frac{a}{\tau T_0} \sin \psi + \frac{a}{T^2} \cos \psi + \right. \\ \left. + \varepsilon q c_n \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{1}{\tau^2}} \cos \varphi \right] \sin \frac{t}{\tau} = 0$$

und da diese Gleichung für alle Werte von t bestehen muss, so müssen beide Klammerausdrücke gleich 0 werden. Man erhält so zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und ψ , aus denen sich dieselben unter Berücksichtigung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_0}{\tau}$

und $h_{wn} = \frac{c_n T^2}{T_0}$ ergeben:

$$a = -\varepsilon q h_{wn} \frac{\sqrt{1 + \frac{T_0^2}{\tau^2} \left[\frac{T^2}{\tau^2} + \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right]^2}}{1 + \frac{T^2}{\tau^2} \left[\frac{T^2}{\tau^2} + \frac{T^2}{T_0^2} - 2 \right]^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{T_0}{\tau} \left[\frac{T^2}{\tau^2} + \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right]$$

Für die Bestimmung der Integrationskonstanten A u β ist zu berücksichtigen, dass für $t = 0$; $z = -\varepsilon h_{wn}$; $y = 0$; $v = 0$ zu nehmen sind. Man erhält hierfür die Gleichungen

$$A \sin \beta = -a \sin \psi; \quad A \cos \beta = -a \left[\frac{T_0}{\tau} \cos \psi + \frac{T_0}{2T_0} \sin \psi \right].$$

Für die Dauer der Abflussvariation gelten dann die Gleichungen:

$$z = \varepsilon h_{wn} + A e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\beta + \frac{t}{\tau} \right) + a \sin \left(\psi + \frac{t}{\tau} \right) \quad \text{mit} \\ v = \frac{A}{T} e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\gamma - \beta - \frac{t}{\tau} \right) + \frac{a}{\tau} \cos \left(\psi + \frac{t}{\tau} \right) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2T_0}{\tau}$$

ψ wird in den meisten Fällen nahezu gleich $\frac{3\pi}{2}$, wodurch sich die Gleichungen für die Bestimmung von A und β wesentlich vereinfachen.

Hört entsprechend der Annahme nach der Zeit $t = \pi \tau$ die Veränderlichkeit des Abflusses auf, so sind die Werte, welche die Höhenlage des Wasserspiegels zu dieser Zeit und dessen Geschwindigkeit ergeben, durch die Formeln bestimmt

$$z_\tau = -\varepsilon h_{wn} + A e^{-\frac{\pi}{2T_0}} \sin \left(\beta + \pi \frac{\tau}{\tau} \right) - a \sin \psi,$$

$$v_\tau = \frac{A}{T} e^{-\frac{\pi}{2T_0}} \sin \left(\gamma - \beta - \pi \frac{\tau}{\tau} \right) - \frac{a}{\tau} \cos \psi.$$

Es sind für die weitere Untersuchung die Formeln des Falles in Anwendung zu bringen; man misst für die Bestimmung der weiteren Bewegung wieder der bequemeren Rechnung halber die Zeit vom Moment des Beginnes des konstanten Abflusses und hat naturgemäss für die Bestimmung der Integrationskonstanten A_1 und β_1 die Endwerte der vorhergehenden Phase zu benutzen.

Wird die Veränderung des Abflusses nicht unterbrochen, sondern verläuft derselbe unter dem Gesetz $\varepsilon Q_n \left(1 + q \sin \frac{t}{\tau} \right)$ weiter, so ist zu erkennen, dass die Bewegung des Wasserspiegels im Wasserschloss die Form einer erzwungenen Schwingung annimmt, bei der mit wachsendem t der Einfluss des ersten Gliedes immer kleiner wird und zwar umso rascher, je grösser der Wert $\frac{T_0}{\tau}$ im

Gliede $e^{-\frac{t}{2T_0}} = e^{-\frac{T_0}{2T_0} \frac{t}{\tau}}$ ist. Die Bewegung des Wasserspiegelniveaus nähert sich einer harmonischen Schwingungsbewegung. Bekanntlich kann in solchen Fällen Resonanzerscheinung eintreten, wenn die Periode der erregenden Ursache gleiche Dauer mit der Eigenperiode des schwingenden Körpers hat, d. h. wenn im gegebenen Fall $\tau = T$ ist; der Wert der Amplitude der erzwungenen Schwingung ist dann

$$a = -\varepsilon q h_{wn} \frac{\sqrt{1 + \frac{T^2}{T_0^2}}}{\frac{T}{T_0}} = -\varepsilon q h_{wn} \sqrt{\frac{T_0^2}{T^2} + 1}$$

der Winkel ψ ergibt sich aus $\operatorname{tg} \psi = -\frac{1}{T_0} = -\frac{1}{\tau \operatorname{tg} \varphi}$

$$\text{wegen } \frac{T_0}{\tau} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad \tau = T.$$

Nach der Theorie der Resonanzerscheinung wird die Amplitude der erzwungenen Schwingung unendlich gross, wenn die Dämpfungskraft unendlich klein ist. Letzteres wäre bei der gebrauchten Bezeichnungsweise der Fall, wenn $T_0 = \infty$ ist, bei welchem Wert auch in obiger Gleichung die Amplitude ins Unendliche wächst; der Phasenunterschied zwischen Kraft und Bewegung muss hierbei gleich $\frac{\pi}{2}$ sein, was in der Gleichung ebenfalls zum Ausdruck kommt.

2. Graphische Darstellung.

Auch die graphische Darstellung der Bewegung der ersten Phase bietet keine Schwierigkeit; die Darstellung

der Werte $z_1 = A e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\beta + \frac{t}{\tau} \right)$ kann in gleicher Weise wie früher mit Hilfe der Projektion aus der logarithmischen Spirale erfolgen; die Darstellung von $z_2 = a \sin \left(\psi + \frac{t}{\tau} \right) = a \sin \left(\psi + \frac{T_0}{\tau} \cdot \frac{t}{T_0} \right)$ ergibt sich durch Projektion eines Kreises, der mit dem Radius a im

polaren System eingetragen ist, wobei der Anfangsstrahl unter den Winkel gegen die Abszissenachse geneigt ist und einer Drehung des Anfangsstrahles von z_1 um den Bogen 2π eine Drehung des Anfangsstrahles von z_2 um $\frac{\mathcal{T}}{\tau} 2\pi$ entspricht (Abb. 7).

3. Rechnungsbeispiel.

Als Beispiel sei bei gleichen Stollen- und Wasserschlossdimensionen und gleichen Widerstandsverhältnissen wie früher für $\varepsilon = 0,5$; für $\varrho = 1$ und für $\tau = 20$ Sek. angenommen; es entspricht dies einem anfänglichen Durchfluss von $\varepsilon Q = 7,5 \text{ m}^3/\text{Sek.}$ der in der Zeit von $\frac{\pi}{2} \tau = 31,4 \text{ Sek.}$ auf $15,0 \text{ m}^3/\text{Sek.}$ erhöht und nach weiteren $31,4 \text{ Sek.}$, also total $62,8 \text{ Sek.}$ wieder auf $7,5 \text{ m}^3/\text{Sek.}$ sinkt;

Hört zur Zeit $t = \pi \tau$ die Veränderlichkeit des Abflusses auf, so ergibt sich

$$z_r = -1,46 - 0,328 e^{-\frac{20}{389} \pi} \sin \left(69^\circ 18' + \frac{20}{147} \right) - 0,307 = +0,873 \text{ m}$$

$$v_r = +0,00238 e^{-\frac{20}{389} \pi} \sin \frac{20}{147} = +0,00084 \text{ m/Sek.}$$

Für die weitere Bewegung werden die Gleichungen I^a und II^a auf Seite 273 zu verwenden sein

$$z = -\varepsilon h_{wn} + A_1 e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\beta_1 + \frac{t}{\mathcal{T}} \right)$$

$$v = \frac{A_1}{T} e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\gamma - \beta_1 - \frac{t}{\mathcal{T}} \right) \text{ mit } \operatorname{tg} \gamma = \frac{2T_0}{\mathcal{T}}$$

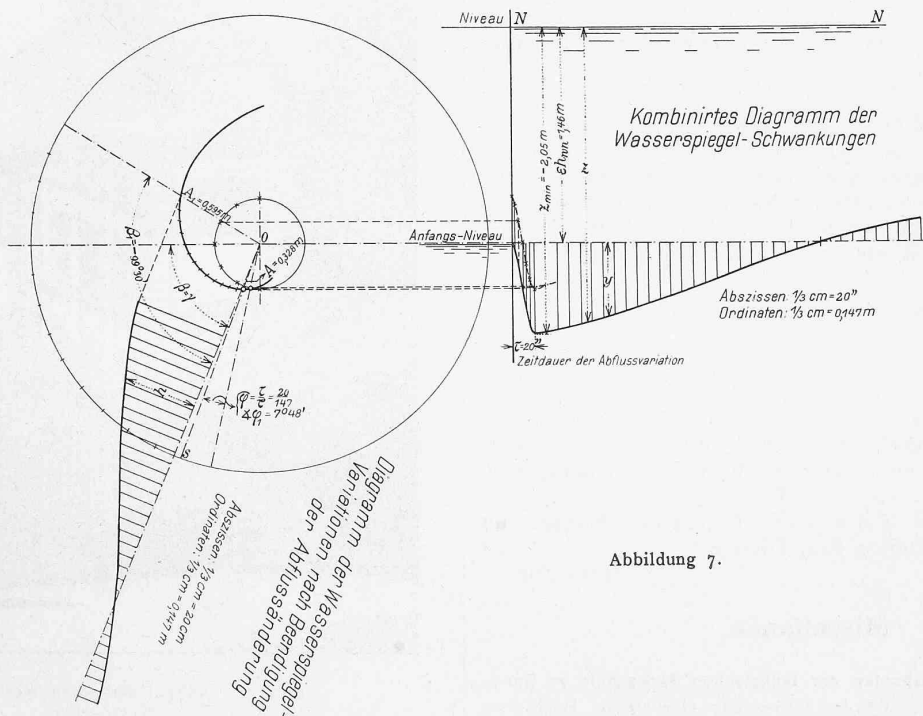


Abbildung 7.

es ergeben sich mit

$$T = 137,5 \text{ Sek.}; T_0 = 194,5 \text{ Sek.}; \mathcal{T} = 147 \text{ Sek.}; h_{wn} = 2,92 \text{ m}$$

$$\frac{T_0}{\tau} = 9,725; \frac{T}{\tau} = 6,875; \frac{\mathcal{T}}{T_0} = 0,707;$$

$$a = -\varepsilon Q h_{wn} \frac{\sqrt{1 + \frac{T_0^2}{\tau^2} \left[\frac{T^2}{\tau^2} + \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right]^2}}{1 + \frac{T^2}{\tau^2} \left[\frac{T^2}{\tau^2} + \frac{T^2}{T_0^2} - 2 \right]} = -0,307 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{T_0}{\tau} \left[\frac{T^2}{\tau^2} + \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right] = -457,1$$

ψ liegt im 4. Quadranten und ist $= 270^\circ 7' 50'' \approx 270^\circ$ mit letzterem Wert wird $\sin \psi = -1$ und $\cos \psi = 0$; man erhält: $A \sin \beta_1 = +a$; $A \cos \beta_1 = +\frac{\mathcal{T}}{2T_0}$ und daher

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2T_0}{\mathcal{T}} = \operatorname{tg} \gamma; \quad \beta = \gamma = 69^\circ 18';$$

$$A = a \sqrt{1 + \frac{\mathcal{T}^2}{(2T_0)^2}} = a \mathcal{T} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{T}^2} + \frac{1}{(2T_0)^2}} = a \frac{\mathcal{T}}{T} = -0,307 \cdot \frac{147}{137,5}$$

$A = -0,328 \text{ m}$ und hiermit die Gleichungen:

$$z = -1,46 - 0,328 e^{-\frac{t}{389}} \sin \left[69^\circ 18' + \frac{t}{147} \right] + 0,307 \cos \frac{t}{20}$$

$$v = +0,00238 e^{-\frac{t}{389}} \sin \frac{t}{147} - 0,01535 \sin \frac{t}{20}$$

und zwar werden A_1 und β_1 zu bestimmen sein durch die Bedingungen $t = 0$; $z = z_r$; $v = v_r$. Dies gibt:

$$A_1 \sin \beta_1 = -2,048 + 1,46 = +0,588 \text{ m}$$

$$A_1 \cos \beta_1 = +0,00084 \cdot 147 - 0,588 \frac{147}{389} = -0,098 \text{ m}$$

$A_1 = 0,595 \text{ m}$; β_1 liegt im 3. Quadranten, bzw. ist negativ zu nehmen.

$$\operatorname{tg} \beta_1 = 5,98975; \quad \angle \beta_1 = -99^\circ 30'; \quad \operatorname{arc} \beta_1 = -1,405$$

$$\angle \gamma = 69^\circ 18'; \quad \operatorname{arc} \gamma = 1,210$$

$$z = -1,46 + 0,595 e^{-\frac{t}{389}} \sin \left[-99^\circ 30' + \frac{t}{147} \right],$$

$$v = -0,00433 e^{-\frac{t}{389}} \sin \left[110^\circ 12' + \frac{t}{147} \right].$$

Da zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit v positiv ist, muss zuerst ein Maximum eintreten. Die Zeit des Eintrittes dieses Maximums vom Beginn der zweiten Bewegungsperiode ist $t_1 = 147 (\gamma - \beta_1) = 433''$

$$z_{1\min} = -1,46 + 0,595 e^{-\frac{433}{389}} \sin \gamma = -1,277 \text{ m.}$$

Der Verlauf der Bewegung ist aus der Darstellung Nr. 7 zu ersehen.

Im Fall der fortdauernden Abflussänderung¹⁾ nach dem Gesetze $q = \varepsilon Q_n \left(1 + \varrho \sin \frac{t}{\tau} \right)$ mit $\varepsilon = 0,5$ und $\varrho = 1$

¹⁾ Ein solcher Fall ist beschrieben in der Z. d. V. d. Ing., Bd. 52 (1908) S. 609 u. 610 im Artikel: «Die Kraftübertragungsanlagen der Ruhrtalesperren-Gesellschaft» von Prof. Dr. Rasch und Dr. Jng. Bauwens.

nähert sich die erzwungene Schwingung einer konstanten harmonischen Schwingung mit der Amplitude $\pm 0,307 m$ gemessen ab $z = -0,146 m$ und der Periodendauer $137,6 Sek.$

Der Fall der Resonanz würde eintreten, wenn $\tau = T = 137,5 Sek.$ würde. Dies ergäbe eine Amplitude für die erzwungene Schwingung gemessen ab $z = -1,46 m$ von

$$a = \pm \varepsilon q h_{\text{res}} \sqrt{\frac{T_0^2}{\tau^2} - 1} = \pm 2,53 m.$$

Die Periodendauer wäre hierbei $T \cdot 2\pi = 137,5 \cdot 2 \cdot \pi = 863'' = 14' 23''$.

Es erscheint nicht ausgeschlossen, dass derartige Perioden in einem regelmässigen Betrieb von der Art eines Eisenbahnbetriebes vorkommen können, weshalb eine derartige Untersuchung geboten ist.

Dieses Verfahren der Einführung einer periodischen Funktion für die Bestimmung des zeitlichen Verlaufes eines veränderlichen Abflusses kann erweitert werden, indem man

$$q = \varepsilon Q_n \left[q_0 + q_1 \sin \left(\varphi_1 + \frac{t}{\tau} \right) + q_2 \sin \left(\varphi_2 + 2 \frac{t}{\tau} \right) + \dots \right]$$

einführt und die Werte für q und φ der gegebenen Veränderung von q entsprechend mit Hilfe Fourierscher Reihen bestimmt. Die Integration der hierdurch entstehenden Differentialgleichung bietet keine Schwierigkeit, sie basiert auf demselben Verfahren, wie in diesem letzten Beispiel angegeben wurde; die Werte von z und v haben die Form

$$z = z_0 + A e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\beta + \frac{t}{\tau} \right) + \sum s_n \sin \left(\psi_n + n \frac{t}{\tau} \right)$$

$$v = v_0 + \frac{A}{T} e^{-\frac{t}{2T_0}} \sin \left(\gamma - \beta - \frac{t}{\tau} \right) + \sum \frac{s_n}{\tau} \cos \left(\psi_n + n \frac{t}{\tau} \right)$$

Die Rechnung erfordert natürlich grosse Aufmerksamkeit; die graphische Darstellung erfolgt durch Superposition der aus den polaren Systemen mit den logarith-

mischen Spiralen $R = A e^{-\frac{t}{2T_0}} \frac{t}{\tau}$ und den Kreisen mit den Radien s erhaltenen Projektionen.

(Forts. folgt.)

Miscellanea.

Die Erweiterungsbauten der technischen Hochschule zu Darmstadt. Ein interessantes Bild der Entwicklung einer techn. Hochschule bietet die «Festschrift zur Eröffnung der Erweiterungsbauten der techn. Hochschule in Darmstadt», die im Juli 1908 erschienen ist. Für die Hochschule, die anfänglich in verschiedenen, in der Stadt zerstreuten Gebäuden räumlich untergebracht war, sind im Jahre 1895, wie im beigegebenen Lageplan ersichtlich, in zwei Baublöcken drei Neubauten in der Nähe des Schlossgartens errichtet worden; davon wurde das Hauptgebäude von Prof. Wagner, das chemisch-elektrotechnische und physikalische Institut von

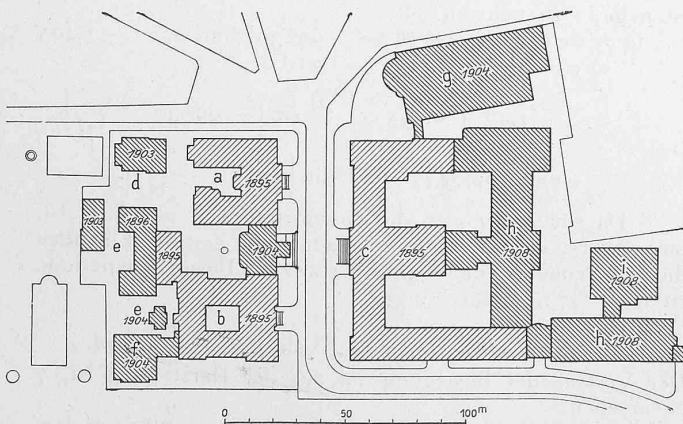


Abb. 1. Gesamt-Lageplan der Techn. Hochschule Darmstadt. — 1:3000.

Legende: a. Chemisches Institut, b. Elektrotechnisches und Physikalisches Institut, c. Hauptgebäude (1895), d. Institut für organische Chemie, e. Erweiterung des Elektrotechnischen Instituts, f. Hörsaalbau des Physikalischen Instituts, g. Zentrale für Licht, Kraft und Wärme, verbunden mit Maschinenbaulaboratorien I u. V, h. Erweiterung des Hauptgebäudes, i. Erweiterung der Materialprüfungsanstalt und Maschinenbaulaboratorium III.

Prof. Marx ausgeführt. Die Räumlichkeiten erwiesen sich aber schon unmittelbar nach ihrer Vollendung als unzulänglich. Hauptsächlich war dies der Fall beim elektrotechnischen Institut, das als eine der meistbesuchten derartigen Anstalten Deutschlands sich einer schnell steigenden Frequenz erfreute. Schon 1897 wurden deshalb Pläne zur Erweiterung aufgestellt. Diese Studien gelangten aber erst 1901 zum Abschluss in einem einheitlichen Bebauungsplan mit einem Kostenvoranschlag von 3,75 Mill. Fr. (Vergl. Lageplan Abb. 1, der D. B. Z. entnommen.)

Die Erweiterungsbauten der Technischen Hochschule zu Darmstadt.

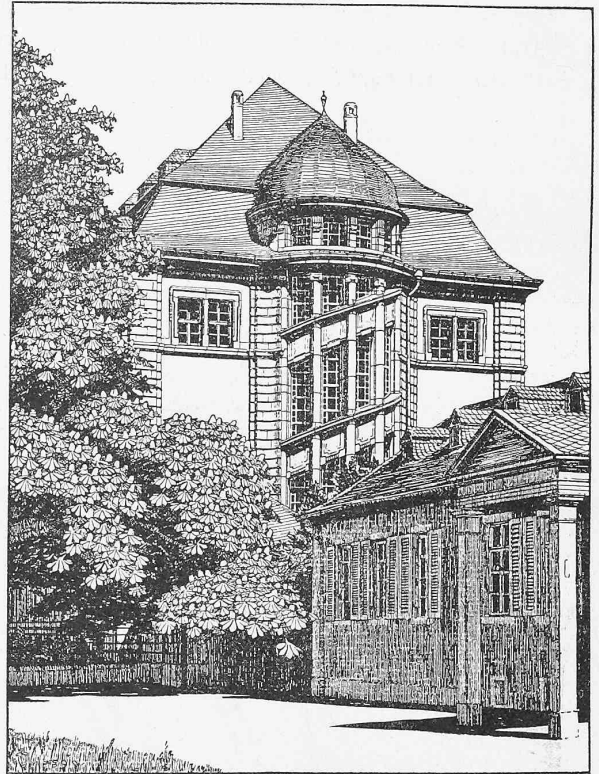


Abb. 3. Südfront des neuen Westflügels.

In einer ersten Bauperiode wurden die dringendsten Aenderungen und Vergrößerungen an den Instituten für Elektrotechnik, Chemie und Physik vorgenommen unter künstlerischer Leitung von Prof. Pützer, und daran anschliessend der Verbindungsbau des Chemie- und Physikgebäudes und Hörsaal des Physik-Institutes erstellt. Als man sich dann entschloss, die 1895 erbaute Zentrale für Kraft, Licht und Wärme zu verlegen, konnten die von Prof. G. Wickop entworfenen Erweiterungsbauten des Hauptgebäudes in Angriff genommen werden. Durch Verlängerung des Mittelbaues und des östlichen Flügels wurde ein Querbau geschaffen, der zwei grosse Innenhöfe freilassend, das Ganze zusammen schliesst. Gegenüber dem Herrengarten schloss man einen rund 62 m langen, durch einen Treppenbau verbundenen Neubau, in Wickops gutem Barock gehalten, an. Die Abbildung 2 zeigt diese Front, während Abbildung 3 die Südfront des Westflügels darstellt.

Sehr gut eingerichtet und auch architektonisch interessant gelöst ist die Zentrale für Kraft, Licht und Wärme, die der Versorgung des ganzen Hochschulgebäudes und gleichzeitig zu Lehrzwecken dient.

Mit diesen Neubauten hat Darmstadt Anlagen erhalten, die in künstlerischer Beziehung wie auch hinsichtlich zweckmässiger Einrichtungen denen anderer deutschen Hochschulen ebenbürtig sind. . . . ff.

Marktbrunnen auf dem Gutenbergplatz in Karlsruhe. Das noch von Friedr. Ratzel entworfene eigenartige Kunstwerk hat die Reihe der in Karlsruhe in letzter Zeit erstellten Monumentalbrunnen in glücklicher Weise vermehrt. Der Brunnen, der mit dem bekannten Billing-Brunnen auf dem Stephanplatz um die Originalität wetteifert, zeigt einen etwas eigentümlichen kompositionellen Gedanken, zu dem vielleicht das Motiv alter Ziehbrunnen die Anregung gegeben haben mag. Auf einem breit hingelagerten, vielfach abgestuften Steinbau, der den eigentlich konstruktiven Kern des runden Brunnenkörpers mit dem zisternenartigen Bassin enthält, erhebt sich ein kronenähnlicher Aufbau aus getriebenen Kupferspannen,