Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 51/52 (1908)

Heft: 7

Inhaltsverzeichnis

Bd. 52. *Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur unter der Bedingung genauester Quellenangabe gestattet.* Nr. 7.

Zur Geometrie der konformen Abbildungen von Schaufelrissen.

Von Prof. Dr. *F. Prášil.*

Im Bd. XLVIII der „Schweiz. Bauzeitung" wurde im Artikel „Die Bestimmung der Kranzprofile und Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen" auf Seite 289 usf. auf die Anwendbarkeit konformer Abbildungen hingewiesen und das Problem der konformen Abbildung einer Rotationsfläche auf eine Ebene senkrecht zur Drehachse unter Ableitung des Abbildungsgesetzes und Angaben für einige Methoden zur Bestimmung der Radien des konformen Netzes behandelt.

Im folgenden sollen diese geometrischen Studien erweitert und mit Aufgaben in Zusammenhang gebracht werden, die sich bei der Aufzeichnung von Schaufelrissen nach den bisher üblichen Verfahren ergeben.

I. Konforme Abbildung einer Rotationsfläche mit gegebener Meridianlinie auf Kreiskegelflächen.

Gauss hat in der im Jahre 1825 in Heft 3 von Schuhmachers astronomischen Abhandlungen erschienenen Originalschrift „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird" das Problem der konformen Abbildungen vollständig allgemein gelöst und in derselben Schrift an einigen Beispielen erläutert; das Problem hat dann in erster Linie in der Landkartendarstellung (Stereographische Projektion) und weiter bei Untersuchungen auf Grundlage der Potentialtheorie in verschiedenen Gebieten der mathematischen Physik Anwendung gefunden.

Die allgemeine Theorie des Problems der konformen Abbildungen basiert auf bestimmten Eigenschaften der Funktionen komplexen Argumentes; es stellen sich der Anwendung desselben vielfach Ausführungsschwierigkeiten bei den für die vollständige Auflösung nötigen Integrationen entgegen.

Das Problem vereinfacht sich aber wesentlich, wenn man dessen Anwendung auf gewisse einfache Flächenformen beschränkt, zu denen auch die Rotationsflächen gehören. Für solche Flächen ergibt sich eine Lösung wie folgt:

In der Rotationsfläche mit der Meridianlinie mm (Abb. 1) sei p ein Punkt auf dem Parallelkreis mit dem Radius r; derselbe gehöre dem Flächenstück mit den unendlich kleinen Seitenlängen dl, gemessen im Meridian, und $r\,d\varphi$, gemessen im Parallelkreis des Punktes p, an; die Diagonale ds dieses unendlich kleinen Flächenstückes ist bestimmt durch die Gleichung:

$$ds^2 = dl^2 + r^2\,d\varphi^2$$

Dem Punkt p der Rotationsfläche mm entspreche in der koaxialen Rotationsfläche mit der Meridianlinie MM ein Punkt P, dessen Lage derart angenommen wird, dass derselbe mit dem Punkte p in derselben Meridianebene liegt; der Radius seines Parallelkreises sei R, die Seiten des dem obigen entsprechenden unendlich kleinen Flächenstückes seien dL und $R\,d\varphi$; hiermit ergibt sich für die Diagonale die Gleichung:

$$dS^2 = dL^2 + R^2\,d\varphi^2$$

Das Problem der konformen Abbildung verlangt, dass das Verhältnis $\frac{ds^2}{dS^2} = m^2$ für alle, von den Punkten p und P innerhalb der Flächen, denen dieselben angehören, aus gezogenen Richtungen denselben Wert hat, also unabhängig ist von dem Winkel, unter dem die Diagonale gegen die Meridianlinie oder den Parallelkreis geneigt ist; ist dies nämlich der Fall, so wird jedem, den Punkt p enthaltenden unendlich kleinen Flächenelement mit beliebig geformter Umgrenzungslinie ein ebenfalls unendlich kleines Flächenelement um den Punkt P mit bestimmter Umgrenzung entsprechen, das dem ersten ähnlich ist.

Bildet man nun

$$\frac{ds^2}{dS^2} = m^2 = \frac{dl^2 + r^2\,d\varphi^2}{dL^2 + R^2\,d\varphi^2} = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\left(\frac{dl}{r}\right)^2 + d\varphi^2}{\left(\frac{dL}{R}\right)^2 + d\varphi^2}$$

so ist ersichtlich, dass dieser Bedingung für die beiden zugeordneten Punkte genügt wird, wenn $\frac{dl}{r} = \pm \frac{dL}{R}$ gemacht wird, indem dann $\frac{ds^2}{dS^2} = m^2 = \frac{r^2}{R^2}$, also nur mehr von der Grösse der zugeordneten Radien abhängig wird; die Abhängigkeit zwischen r und R ist dann durch die Gleichung $\frac{dl}{r} = \pm \frac{dL}{R}$ bestimmt, wenn die Gleichungen der beiden Meridianlinien gegeben und betreffend der Grösse der Radien zweier gewisser Parallelkreise der beiden Flächen eine bestimmte Annahme getroffen ist, wie dies aus der Entwicklung der folgenden, mit Rücksicht auf die praktische Anwendung noch weiter spezialisierten Fälle zu ersehen ist.

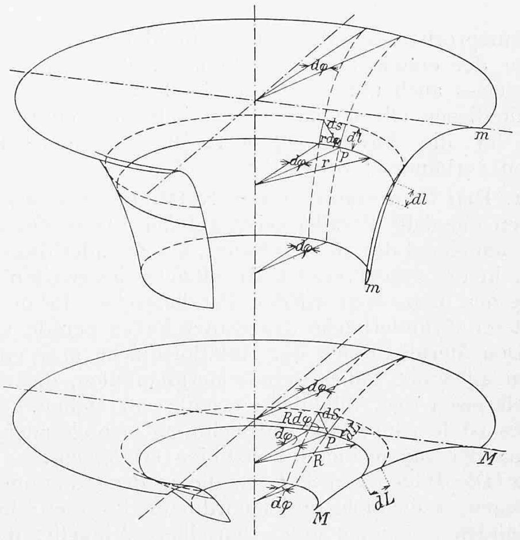

Abb 1.

Da die obige Entwicklung keine Bedingung betreffend eine Abhängigkeit der Form der beiden Meridianlinien mm und MM enthält, so ist es auch zulässig und zudem praktisch bequem, eine der Meridianlinien, z. B. MM als Gerade zu wählen, wodurch die betreffende Rotationsfläche im allgemeinen zu einer Kreiskegelfläche wird; je nach der Grösse des Winkels α, unter dem diese Gerade gegen die Axe geneigt ist, erhält man folgende drei Fälle:

1. Fall: $\alpha = 90^0$, die Rotationsfläche MM wird zu einer Ebene EE senkrecht zur Drehachse.
2. Fall: $90^0 > \alpha > 0$, die Rotationsfläche wird eine spezielle Kreiskegelfläche.
3. Fall: $\alpha = 0$, die Gerade hat den konstanten Abstand R_0 von der Achse; die Rotationsfläche wird zu einer Zylinderfläche ZZ.

Die Flächen des zweiten und dritten Falles können in Ebenen ausgebreitet werden, die Bilder der ausgebreiteten Flächen sind naturgemäss den Bildern der Kegel-, bezw. Zylinderfläche in den *kleinsten* Teilen *kongruent*, also auch *ähnlich;* es ergibt sich somit, dass in allen drei Fällen ebene konforme Abbildungen der Rotationsfläche mm entstehen, d. h. jeder beliebigen Figur in der Rotationsfläche