Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 49/50 (1907)
Heft: 20

Artikel: Vom Biegungsmoment
Autor: Kiefer, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26715

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Vom Biegungsmoment.

Von *A. Kiefer* in Zürich.

In dem Artikel „Ueber den horizontalen Balken" (Band XLVII, Seite 218) ist gezeigt, wie bei einem Balken, der in den Endpunkten *(M, N)* unterstützt und von vertikalen Kräften beansprucht ist, für einen beliebigen Vertikalschnitt die Momente und das Biegungsmoment durch Strecken dargestellt werden können, die in die Schnittlinie fallen. Aus jener Konstruktion ergibt sich leicht eine andere, welche die Beträge, die eine einzelne Kraft an die Momente für einen Schnitt liefert, durch Strecken darstellt, welche auf die Wirkungslinie der Kraft fallen.

Abbildung 1. Es sei A_1P_1 die Kraft. Man ziehe P_1M' parallel NM; ferner durch den Schnittpunkt Q der Schnittlinie mit NM die Parallele $Q_1'Q'$ zu $M'N$ und verbinde Q' mit M; dann ist auf der Wirkungslinie der Kraft die Strecke $B_1'B_1$ ein Mass für das Moment der Auflagerreaktion, die von der Kraft herrührt, $B_1'A_1$ stellt das Moment der Kraft dar und also A_1B_1 das Biegungsmoment.

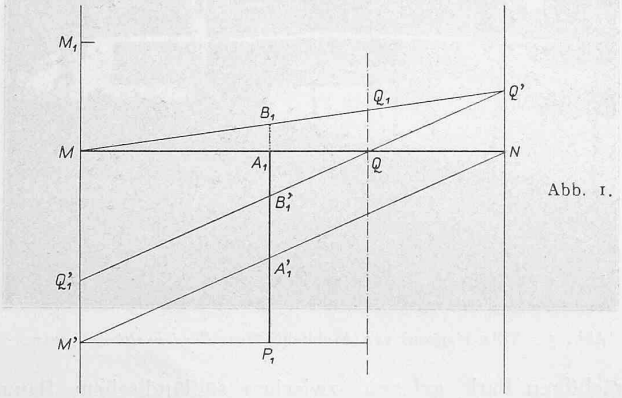

Abb. 1.

Man kann die Richtigkeit dieser Angaben auch direkt aus Abbildung 1 beweisen. NM' teilt die Kraft A_1P_1 im Verhältnis der Abstände von N und M; daher ist $A_1'A_1$ gleich der von der Kraft herrührenden Auflagerreaktion MM_1 in M. Zufolge ähnlicher Dreiecke ist, wenn die Länge des Balkens mit l bezeichnet wird:

$$\frac{B_1'B_1}{Q_1'M} = \frac{NA_1}{l} \text{ und } \frac{Q_1'M}{QM} = \frac{A_1'A_1}{NA_1};$$

durch Multiplikation und indem man $A_1'A_1 = MM_1$ setzt, folgt hieraus

$$B_1'B_1 = \frac{1}{l} \cdot MM_1 \cdot QM, \text{ d. h.}$$

für $l = 1$ ist $B_1'B_1$ ein Mass für das Moment der Auflagerreaktion. Aus der Figur folgt weiter

$$\frac{B_1'A_1}{QA_1} = \frac{M'M}{l}, \text{ also da } MM' = A_1P_1 \text{ ist}$$

$$B_1'A_1 = \frac{1}{l} \cdot A_1P_1 \cdot QA_1, \text{ d. h.}$$

$B_1'A_1$ ist ein Mass für das Moment der Kraft A_1P_1 und folglich ist die Differenz A_1B_1 der beiden Strecken $B_1'B_1$ und $B_1'A_1$ ein Mass für das Biegungsmoment.

Um die obige Konstruktion aus der Abbildung 1 des erwähnten Artikels über den Balken (Bd. XLVII, S. 218) abzuleiten, braucht man einfach nach nebenstehender Abbildung 2 durch die Endpunkte von y die Parallelen zu NM' zu ziehen. Es ist dann noch zu zeigen, dass die Punkte M, B_1, Q' auf einer Geraden liegen. Aber wenn die Parallele durch A_1 zu NM' die Vertikale durch M in Q'' schneidet, so folgt aus jener Abbildung (Bd. XLVII)

$$\frac{m}{Q''M} = \frac{NQ}{l} \text{ oder, da } m = A_1B_1$$

$$\frac{A_1B_1}{Q''M} = \frac{NQ}{l}; \text{ nun ist ferner}$$

$$\frac{Q''M}{A_1M} = \frac{NQ'}{NQ} \text{ und also durch Multiplikation}$$

$$\frac{A_1B_1}{A_1M} = \frac{NQ'}{l}, \text{ wie es sein muss.}$$

Die gefundene Konstruktion ist geeignet, um die Aenderungen der verschiedenen Momente, insbesondere des Biegungsmomentes zu überblicken, wenn der Schnitt fest gehalten, aber die Kraft geändert oder bewegt wird.

1. Hält man die Wirkungslinie der Kraft fest und lässt man die Kraft kleiner oder grösser werden, so beschreiben die Punkte A_1', B_1', P_1, B_1 ähnliche Punktreihen. Wird die Richtung der Kraft in die entgegengesetzte geändert, so ändern alle Momente das Vorzeichen.

2. Bleibt die Grösse der Kraft unverändert und verschiebt man die Kraft längs des Balkens, so bleiben die Punkte M', Q' fest und B_1 bewegt sich auf MQ_1. Das Dreieck MQQ_1 ist die Fläche für die Biegungsmomente und das Viereck MQ_1QQ_1' die Fläche für die Momente der Auflagerreaktionen. Liegt die Kraft rechts vom Schnitt, so kommt für das Biegungsmoment nur die Auflagerreaktion in M in Betracht; die Fläche der Biegungsmomente wird durch das Dreieck $QQ'Q_1$ oder, was dasselbe ist, durch das Dreieck QNQ_1 dargestellt. Bringt man die Kraft in den Schnitt und betrachtet die frühere Wirkungslinie als Schnitt, so ist gemäss Abbildung 1 des erwähnten frühern Artikels, A_1B_1 das Biegungsmoment, d. h. von zwei gleich grossen Kräften in zwei beliebigen parallelen Schnitten erzeugt jede im andern Schnitt ein Biegungsmoment von gleicher Grösse; beliebig viele Kräfte erzeugen in einem Schnitt ein Biegungsmoment, das gleich ist der Summe aller Biegungsmomente, die entstehen, wenn man alle Kräfte in den Schnitt bringt, für jede Kraft die frühere Wirkungslinie als Schnitt betrachtet und für ihn ihr Biegungsmoment ermittelt. Zwei gleiche Kräfte auf derselben Seite eines Schnittes verursachen Biegungsmomente, die sich verhalten wie die Abstände der zwei Kräfte von dem auf derselben Seite liegenden Unterstützungspunkt. Zwei gleiche Kräfte A_1P_1, A_2P_2 auf verschiedener Seite eines Schnittes geben Biegungsmomente, die sich verhalten wie

$$\frac{MA_1}{MQ} : \frac{NA_2}{NQ}$$

und die einander gleich werden, wenn jede Kraft die Strecke zwischen Schnitt und Unterstützungspunkt im gleichen Verhältnis teilt.

Die Momente der Auflagerreaktionen, die von zwei gleichen Kräften in bezug auf einen beliebigen Schnitt herrühren, verhalten sich wie die Abstände des andern Stützpunktes von den zwei Kräften; das Verhältnis ist also unabhängig von der Lage des Schnittes.

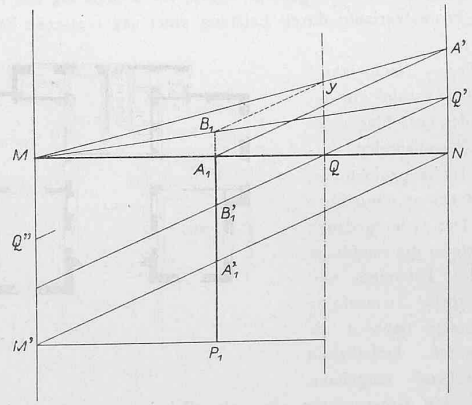

Abb. 2.

Zwei ungleiche Kräfte auf derselben Seite eines Schnittes geben Biegungsmomente, die sich verhalten wie das Produkt aus dem Abstand des auf der gleichen Seite liegenden Stützpunktes von der ersten Kraft mal dem Moment, das die Kraft erzeugen würde, wenn sie im Schnitt selber läge, zu dem entsprechenden Produkt für die zweite Kraft, oder einfacher: wie die statischen Momente der zwei Kräfte für jenen Stützpunkt; das Verhältnis ist also unabhängig von der Lage des Schnittes.

Für zwei ungleiche Kräfte auf verschiedener Seite eines Schnittes verhalten sich die Biegungsmomente wie das Verhältnis der statischen Momente der zwei Kräfte, je

für den Stützpunkt auf derselben Seite genommen, zum Verhältnis, in welchem der Balken MN durch den Schnitt geteilt wird. Hält man die zwei Kräfte fest und wählt zwei Schnitte zwischen ihnen, so verhalten sich die zwei Verhältnisse umgekehrt wie die Teilverhältnisse, in denen der Balken durch die Schnitte geteilt wird.

3. Verändert sich die Grösse der Kraft A_1P_1 proportional dem Abstande von M, so bewegt sich der Punkt P_1 auf der Geraden MP_1; die Punkte M', Q' beschreiben, wenn der Schnitt gewählt ist, ähnliche Punktreihen. Das Strahlenbüschel von M nach den Punkten Q' und das Parallelstrahlenbüschel der Wirkungslinien der Kraft sind projektivisch, und zwar entspricht dem vertikalen Strahl durch M einerseits die unendlich ferne Gerade und anderseits die Gerade MN. Das Erzeugnis der beiden Büschel ist also eine Parabel mit M als Scheitel und MN als Scheiteltangente. Der Parabelpunkt Q_1 in der Schnittlinie entsteht, wenn P_1 in den Schnitt fällt; die Tangente in Q_1 geht durch die Mitte von MQ. Die Fläche der Biegungsmomente für die links vom Schnitt liegenden Kräfte wird durch den Parabelbogen MQ_1 und die Linien MQ und QQ_1 begrenzt.

4. Aendert sich die Kraft proportional dem Abstande von N, so bewegt sich der Punkt P_1 auf der Geraden NP_1. Die Punkte $M'Q'$ beschreiben, wenn der Schnitt gewählt ist, wieder ähnliche Punktreihen; das Strahlenbüschel von M nach den Punkten Q' und das Parallelstrahlenbüschel der Wirkungslinien der Kräfte sind wieder projektivisch. Ihr Erzeugnis ist eine Parabel durch M, N mit vertikaler Achse. Die Parabeltangente in M geht nach dem Schnittpunkt R der Vertikalen durch N mit der Parallelen durch Q zu NP_1; der Scheitelpunkt liegt senkrecht über der Mitte von MN in der Höhe $^1/_4 NR$. In der Wirkungslinie durch den Scheitel liegt die Kraft, welche das grösste Biegungsmoment erzeugt. Wählt man die Kraft, welche in der Schnittlinie liegt und konstruiert den Parabelpunkt, so halbiert seine Tangente die Strecke auf MR, die zwischen M und der Schnittlinie liegt. Die Fläche der Biegungsmomente für die links vom Schnitt liegenden Kräfte wird von dem Parabelbogen, der Linie MQ und der Ordinate in Q begrenzt.

5. Man kann im Falle 3 die Wirkungslinie der Kraft auch zwischen Schnitt und Stützpunkt N fallen lassen. Da die Kraft proportional mit dem Abstand von M sich ändert, so muss man zur Begrenzung der Momentenfläche zwischen dem Punkte auf der Schnittlinie und dem Punkte N den Parabelbogen legen, welcher dem Falle 4 entspricht, nämlich durch N und M geht und vertikale Achse hat. Lässt man im Falle 4 die Kraft zwischen den Schnitt und N fallen und also proportional dem Abstande von N sich ändern, so ist zur Begrenzung der Momentenfläche zwischen dem Punkt auf dem Schnitt und N der Parabelbogen zu legen, der dem Falle 3 entspricht und also N zum Scheitel und NM zur Scheiteltangente hat.

Vorausberechnung und Beurteilung der charakteristischen Kurven von Seriemotoren für Gleichstrom und Wechselstrom hinsichtlich der Bedürfnisse der elektrischen Traktion.

Von Dr. *W. Kummer*, Ingenieur.

Die vorliegende Studie bezweckt, dem projektierenden Bahningenieur eine einfache Berechnungsweise der Betriebskurven der Seriemotoren für Gleichstrom und Wechselstrom, die für Elektrifizierungsprojekte hauptsächlich in Frage kommen, zu bieten. Es soll gezeigt werden, dass es a priori möglich ist, die ungefähren Betriebskurven von Seriemotoren allein auf Grund der Annahme einer nominellen Normalleistung und Normalgeschwindigkeit aufzustellen, sodass der projektierende Bahningenieur der Beihülfe des Motoren bauenden Elektroingenieurs für den Entwurf vollständiger Elektrifizierungsprojekte garnicht bedarf. Die hier entwickelte Berechnungsweise der Betriebskurven, deren Einfachheit auf Abstraktionen beruht, die weiter unten noch eingehend diskutiert werden sollen, kommt an die tatsächlichen Verhältnisse so nahe heran, dass sie auch von Seiten des Motoren bauenden Elektroingenieurs beim ersten Entwurf neu auszuführender Motormodelle für die Aufstellung der Betriebskurven hinreichend genau ist. Selbsverständlich ist es für bloss umzuwickelnde und abzuändernde wohlbekannte Motormodelle möglich, auf Grund empirisch aufgenommener Verlust- und Magnetisierungscharakteristiken die Motorbetriebskurven noch erheblich genauer zum Voraus zu ermitteln; für den projektierenden Bahningenieur ist diese grössere Genauigkeit jedoch vollständig belanglos.

Die wichtigste Betriebskurve eines Eisenbahnmotors ist diejenige, welche den Zusammenhang der Zugkraft mit der Umfangsgeschwindigkeit an der Spur der Triebräder des Zuges ergibt und die unter dem Namen der mechanischen Charakteristik des Eisenbahnmotors bekannt ist. An den Verlauf dieser Charakteristik stellt nun das Problem der elektrischen Traktion bestimmte Forderungen, deren wichtigste die folgenden sind:

1. Möglichst konstante Geschwindigkeit für einen grossen Bereich der Zugkräfte zum Zwecke der Einhaltung eines bestimmten Fahrplans bei verschiedenen Zugsgewichten.

2. Die Möglichkeit, bei hohen Zugkräften kleinere Geschwindigkeiten zu entwickeln, als bei niedern Zugkräften zum Zwecke der Energieökonomie in besondern Umständen, wie beim Anfahren und beim Bergwärtsbefahren erheblicher Steigungen.

Dass die Seriemotoren für Gleichstrom und Einphasenwechselstrom den beiden Anforderungen im Allgemeinen entsprechen, sobald von der Spannungsregulierungsanlage auf dem Zuge gewisse Bedingungen erfüllt werden, ist bekannt; es soll nun an Hand der nachfolgenden Darlegungen gezeigt werden, welches diese Bedingungen sind und bis zu welchem Grade die beiden Anforderungen eingehalten werden können, ohne besondere Komplikationen der Spannungsregulierungsanlage auf dem Zuge zu verursachen.

Bei unsern Darlegungen können wir den Gleichstromseriemotor als Spezialfall des Wechselstromseriemotors behandeln, wodurch eine Vereinfachung der vergleichenden Rechnungen ermöglicht wird. Den Wechselstromseriemotor selbst bringen wir dem Verständnis des Lesers dadurch am nächsten, dass wir ihn dem Begriff der allgemeinen Wechselstromdrosselspule subsumieren können; als solche muss er die ihm aufgedrückte äussere Wechselstromklemmenspannung, die von sinusförmigem Verlaufe sein möge, in zwei zu einander senkrechte Komponenten zerlegen, eine Watt-Komponente und eine wattlose Komponente; für jeden Betriebszustand besteht somit ein rechtwinkliges Dreieck der wirksamen Spannungen, wobei die aufgedrückte Klemmenspannung C_0 die Hypothenuse ist und die beiden Katheten $C_0 \cos \varphi_0$ und $C_0 \sin \varphi_0$ durch die Winkelfunktionen des Phasenwinkels φ_0 zwischen Klemmenspannung und Wattkomponente dargestellt sind. Die Wattkomponente ihrerseits zerfällt nun in die zwei algebraischen Bestandteile der gegenelektromotorischen Kraft E und des durch Ohm'schen Widerstand, beziehungsweise durch den sog. effektiven Wechselstromwiderstand verursachten Spannungsabfalls.

Die nachfolgende Behandlung des Wechselstromseriemotors kann ohne weiteres sinngemäss auf den gewöhnlichen Repulsionsmotor übertragen werden, nicht jedoch auf den kompensierten Repulsionsmotor, wegen der veränderten Bedeutung, welche die Motorreaktanz erlangt.

Wir führen nun die weitere Untersuchung zunächst am verlustlosen Wechselstromseriemotor weiter, wobei alle Wechselstromgrössen effektiv zu verstehen sind, bekommen damit für die gegenelektromotorische Kraft und die Spannungswattkomponente denselben Ausdruck:

$$E = C_0 \cos \varphi_0 = C_0 \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_0} \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

Wir können bei Einführung der Stromstärke J auch schreiben:

$$E = \sqrt{C_0^2 - \left(\frac{C_0^2 \sin^2 \varphi_0}{J^2}\right) J^2}$$

wobei dann der Ausdruck:

$$\frac{C_0 \sin \varphi_0}{J}$$