Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 49/50 (1907)
Heft: 2

Artikel: Zur Berechnung gelenkloser Brückengewölbe
Autor: Ritter, Max
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26661

doch 55 809 Fr. auf das schwere Geläute und den Glockenstuhl entfallen. Die Umgebungsarbeiten (Stützmauern, Freitreppen und Anlagen) verlangten 48 535 Fr. Der kubische Inhalt, vom Gelände bis zu den Dachgesimsen bezw. bis zur Scheitelhöhe der Gewölbe gemessen, beträgt 15 364 m^3; der Einheitspreis ist demnach rund 34 Fr. für den m^3.

Zur Berechnung gelenkloser Brückengewölbe.

Von *Max Ritter*, cand. ing., Zürich.

Die statische Berechnung weit gespannter Brückengewölbe ohne Gelenke pflegt gegenwärtig stets mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu erfolgen. Dabei wird die Voraussetzung gemacht, dass die Dehnungen ε den zugehörigen Spannungen σ proportional seien, dass also der Quotient

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

d. i. der Elastizitätsmodul des Materials, einen konstanten Wert habe (Hooke'sches Gesetz). Indessen weiss man schon lange, dass dieses einfache Gesetz für die üblichen Gewölbematerialien, die natürlichen Gesteine und Beton, nicht gilt. Bei diesen sinkt der Elastizitätsmodul mit zunehmender Spannung; beispielsweise ergaben Versuche von *C. Bach* für Beton (1 Zement, 2,5 Sand, 5 Kies) innerhalb der Spannungsgrenzen $\sigma = 0$ bis 8 kg/cm^2 im Mittel $E = 306\,000$, dagegen innerhalb $\sigma = 32$ bis 40 kg/cm^2 nur noch $E = 194\,000$.

Allgemein lässt sich die Abhängigkeit der Dehnungen von den Spannungen durch die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

ausdrücken, wo E_0 und n konstante, nur von Material abhängige Grössen sind. Dieses „Potenzgesetz" gilt zwar nicht mit voller Strenge, doch ist die Annäherung an die Wirklichkeit innerhalb der zulässigen Spannungsgrenzen eine ganz überraschend gute.

Dieses eigentümliche, elastische Verhalten der Gewölbebaustoffe legt nun die wichtige Frage nahe, ob die Anwendung der gewöhnlichen, auf dem Hooke'schen Gesetz fussenden Elastizitätstheorie zur Berechnung der eingespannten Gewölbe überhaupt berechtigt erscheint. Die Frage ist nicht ohne weiteres zu beantworten; die Ansichten unserer bedeutendsten Statiker darüber gehen sehr auseinander. Zurzeit scheint ein gewisses Misstrauen gegen die Ergebnisse der Elastizitätstheorie weite Kreise zu beherrschen, ein Misstrauen, das durch die Wahl übertrieben hoher Sicherheitskoeffizienten deutlich zum Ausdruck kommt. Ein bedeutender Fachmann hat kürzlich sogar empfohlen, die Elastizitätstheorie wieder fallen zu lassen und alle Gewölbe als Dreigelenkbogen zu behandeln.

Um die Frage zu beantworten, geht man wohl am besten von dem erwähnten Potenzgesetz aus. Mit seiner Hilfe muss es möglich sein, eine der Wirklichkeit eng angepasste Gewölbetheorie aufzustellen; ein Vergleich der darnach ermittelten Auflagerreaktionen und Spannungen mit den nach der gewöhnlichen Elastizitätstheorie berechneten wird dann über die Anwendbarkeit der letztern sofort aufklären. Dies soll im Folgenden kurz näher dargelegt werden.

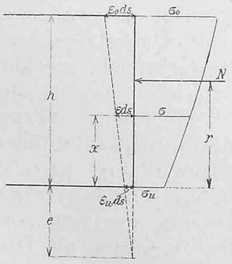

Abb. 1.

Es handle sich zunächst um die *Bestimmung der Randspannungen* im Gewölbe, wenn die Schnittkräfte bekannt sind und das Material dem Potenzgesetz folgt. Dabei betrachten wir nur den praktisch stets zutreffenden Fall, dass das Gewölbe bloss Druckspannungen erleidet. Wir setzen ferner voraus, dass ebene Querschnitte nach der Deformation eben bleiben; dies wird hier nahezu erfüllt sein, weil die in den Querschnitten wirkenden Schubkräfte verschwindend klein sind. Wegen der grossen Krümmungsradien können die Spannungen unbedenklich wie für einen geraden Träger berechnet werden. Wirkt dann auf den rechteckigen Querschnitt von der Breite = 1 die Normalkraft N im Abstande r vom entferntern Rand (Abb. 1), so hat die Dehnung ε an irgend einer Stelle den Wert

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{e + x}{e + h},$$

wenn mit e die Entfernung der Nullinie von der nähern Laibung bezeichnet wird. Nach dem Potenzgesetz ist aber

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0{}^n}{E_0},$$

woraus

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{e + x}{e + h}\right)^{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

und für $\sigma = \sigma_u$,

$$e = h \, \frac{\sigma_u{}^n}{\sigma_0{}^n - \sigma_u{}^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

folgt. Die Normalspannungen σ stehen mit der Längskraft N im Gleichgewicht; sie müssen also den Bedingungen

$$N = \int_0^h \sigma \, dx, \text{ und } N(e + r) = \int_0^h \sigma \, (e + x) \, dx$$

genügen. Setzt man für σ den Wert von Gleichung 2 ein, so erhält man nach Ausführung der Integrationen:

$$\frac{n + 1}{n} N = \sigma_0 \, (e + h) - \sigma_u \, e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

$$\frac{2n + 1}{n} N(e + r) = \sigma_0 \, (e + h)^2 - \sigma_u \, e^2 \quad . \quad . \quad 5$$

Aus den Gleichungen 3, 4 und 5 können zu jedem N und r die Randspannungen gefunden werden. Die direkte Auflösung der Gleichungen nach e, σ_0 und σ_u ist jedoch sehr umständlich; es empfiehlt sich daher die Anfertigung einer interpolierbaren Tabelle, indem man für σ_0 und σ_u möglichst viele Werte annimmt und die zugehörigen N und r als Funktionen von h berechnet. Der Koeffizient n liegt zwischen 1,1 und 1,2; nach C. Bach ist für Granit $n = 1{,}12$, für Zementbeton $\left(1 : 2\frac{1}{2} : 5\right)$ etwa $n = 1{,}14$.

Die evangelische Kirche in Rorschach.

Erbaut von Architekt *Albert Müller* in Zürich.

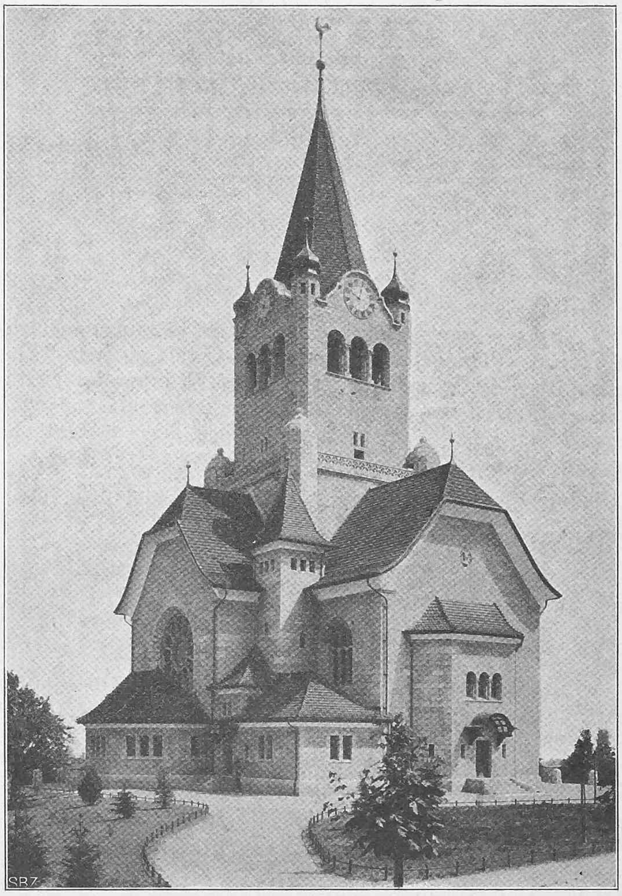

Abb. 5. Ansicht der Kirche von der Promenadenstrasse.

Vergleicht man die in dieser Weise ermittelten Spannungen mit den auf Grund des Hooke'schen Gesetzes, also mit der Formel

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}$$

berechneten Werten, so findet man stets sehr geringe Unterschiede, wie folgende vergleichende Tabelle zeigt:

$n = 1$ (Navier)		$n = 1,14$		$n = 1,2$	
σ_u	σ_0	σ_u	σ_0	σ_u	σ_0
kg/cm^2	kg/cm^2	kg/cm^2	kg/cm^2	kg/cm^2	kg/cm^2
2,5	40,0	0,7	39,3	0,0	38,9
15,0	40,0	14,7	39,8	14,6	39,7
30,0	40,0	30,0	40,0	29,9	40,0

Man erkennt, dass die bisherige Bestimmungsweise der Randspannungen aus den Schnittkräften, falls Zugspannungen nicht auftreten, auch bei Stein- und Betonkonstruktionen sehr genaue Resultate liefert, dass also die Anwendung des Potenzgesetzes praktisch durchaus entbehrt werden kann.

Für $\sigma_u = 0$ wird $e = 0$; die Gleichungen 4 und 5 gehen über in

$$N = \frac{n}{n+1} \sigma_0 \cdot h$$

und

$$r = \frac{n+1}{2n+1} h.$$

Setzt man $n = 1,14$ bis $1,20$, so wird etwa $r = 0,65\,h$. Die Stützlinie darf sich also nicht mehr als um $0,15\,h$ von der Gewölbeachse entfernen, wenn Zugspannungen vermieden werden sollen, also etwas weniger, als wenn das Hooke'sche Gesetz gelten würde.

Damit ist der eine Teil unserer Frage gelöst. Es bleibt noch zu zeigen, inwieweit sich die *Auflagerreaktionen* des eingespannten Gewölbes ändern, wenn das Material dem Potenzgesetz folgt, denn diese sind hier, wie bei allen statisch unbestimmten Bauwerken, vom Dehnungsgesetz abhängig.

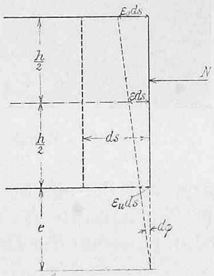

Abb. 2.

Wir betrachten ein von zwei unendlich benachbarten Querschnitten begrenztes Gewölbeelement (Abb. 2). Unter dem Einfluss der Schnittkraft N dreht sich der eine Schnitt inbezug auf den andern um den „Formänderungswinkel"

$$d\varphi = \frac{\varepsilon_u}{e} ds.$$

Nach dem Potenzgesetz ist $\varepsilon_u = \frac{\sigma_u^n}{E_0}$; also folgt, wenn noch für e der Wert von Gleichung 3 eingesetzt wird:

$$d\varphi = \frac{\sigma_0^n - \sigma_u^n}{E_0\, h} ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6.$$

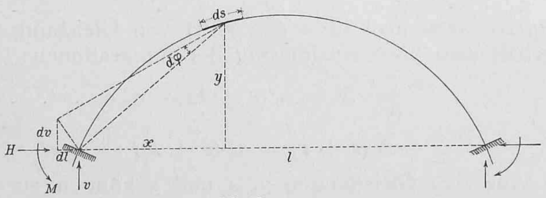

Abbildung 3.

Für das beidseitig fest eingespannte Gewölbe müssen mit Rücksicht auf Abbildung 3 die folgenden Gleichungen zutreffen:

$$0 = \Delta l = \int y\, d\varphi - \int \varepsilon\, dx,$$
$$0 = \Delta v = \int x\, d\varphi + \int \varepsilon\, dy,$$
$$0 = \Delta \varphi = \int d\varphi.$$

Setzt man für $d\varphi$ den Wert von Gleichung 6 ein und beachtet, dass

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{2} = \frac{\sigma_0^n + \sigma_u^n}{2\, E_0}$$

ist, so erhält man die drei Elastizitätsgleichungen des eingespannten Gewölbes, dessen Material dem Potenzgesetz folgt:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= E_0 \cdot \Delta l = \int \frac{\sigma_0^n - \sigma_u^n}{h} y\,ds - \frac{1}{2} \int (\sigma_0^n + \sigma_u^n)\, dx, \\ 0 &= E_0 \cdot \Delta v = \int \frac{\sigma_0^n - \sigma_u^n}{h} x\,ds + \frac{1}{2} \int (\sigma_0^n + \sigma_u^n)\, dy, \\ 0 &= E_0 \cdot \Delta \varphi = \int \frac{\sigma_0^n - \sigma_u^n}{h} ds. \end{aligned}\right\} \; . \; 7$$

Mit $n = 1$ und $\sigma = N/F \pm M/W$ gehen die Gleichungen in die gewöhnlichen Deformationsgleichungen des elastischen Bogens über.

Um nun in einem bestimmten Falle nachzuweisen, wie stark die auf Grund des Hooke'schen Gesetzes berechneten Auflagerreaktionen von den zufolge der Gültigkeit des Potenzgesetzes bestehenden Werten — die jedenfalls der Wirklichkeit sehr nahe kommen werden — abweichen, verfährt man am einfachsten wie folgt: Man berechnet unter Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls die Auflagerreaktionen und Schnittkräfte und ermittelt aus letztern mit den Gleichungen 3, 4 und 5 die Randspannungen. Setzt man diese in die Gleichungen 7 ein, so wird man für Δl, Δv und $\Delta \varphi$ bestimmte, endliche Werte erhalten, die einen Masstab liefern, inwieweit die auf Grund des Hooke'schen Gesetzes berechneten Reaktionen von den tatsächlich bestehenden differieren.

Wenn man diese — freilich etwas zeitraubende — Rechnung durchführt, so zeigt sich, dass die linken Seiten der Gleichungen 7 *nahezu verschwinden*. Für ein Gewölbe von 40 m Spannweite und 4 m Pfeil erhielten wir unter der Annahme $E_0 = 300\,000\ kg/cm^2$ und $n = 1,2$

$$\Delta l = 0,004\ cm,\ \Delta v < 0,0001\ cm,\ \Delta \varphi < 0,00002$$

also ganz verschwindend kleine Verschiebungen, die schon durch die Elastizität der Fundamente entstehen können und zu einer Aenderung der bisherigen Berechnungsweise der Auflagerreaktionen absolut keinen Anlass geben.

Unsere einleitend gestellte Frage nach der Anwendbarkeit des Hooke'schen Gesetzes in der Gewölbetheorie ist damit in *bejahendem Sinne* beantwortet; die Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls, wie sie manche Theoretiker für nötig halten, hat praktisch gar keinen Wert.

Die statische Berechnung der eingespannten Gewölbe ist freilich trotzdem zeitraubend, wenn man genau rechnen will. Deshalb stehen zurzeit mancherlei Näherungsmethoden im Gebrauch, die aber nach unserer Ansicht nur bei Vorprojekten angewendet werden sollten. Insbesondere die oft empfohlene Vernachlässigung der Deformationen durch die Normalkräfte führt bei flachen Bögen auf viel zu niedrige Spannungen; auch das graphische Kämpferkraftverfahren liefert sehr unzuverlässige Ergebnisse. Ganz unverständlich ist uns, wie man vorschlagen kann, weitgespannte, gelenklose Gewölbe als Dreigelenkbogen zu behandeln. Letztere sind stets an einer Stelle zwischen Kämpfer und Scheitel am stärksten, während eingespannte Gewölbe unbedingt am Kämpfer das grösste Widerstandsmoment erfordern.

Zürich, im November 1906.

Miscellanea.

Wasserkraftgewinnung und Rheinschiffahrt. Der Vorstand des Vereins für die Schiffahrt auf dem Oberrhein richtet an die vom eidg. Departement des Innern ernannte und erstmals am 9. d. M. in Bern zusammentretende Kommission eine Eingabe, es möchte bei der Konzessionierung von Wasserwerkanlagen am Rhein auf künftige Bedürfnisse der Schiffahrt Rücksicht genommen werden. Wenn auch bei der Anlage der bereits bestehenden und projektierten Wasserwerke am Rhein oberhalb Basel bei Augst, Rheinfelden, Laufenburg, Rheinau usw. der Gedanke an