

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	47/48 (1906)
Heft:	24
Artikel:	Die Bestimmung der Kranzprofile und der Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen
Autor:	Prášil, F.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-26204

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Seitenfläche und 2,50 m Länge, die also über die ganze Mauer reichen würden, zusammengesetzt, so ist der Reibungswiderstand, den ein solcher Block der Stosskraft des Wassers entgegensezt, auf die halbe Breite der Sperrmauer, — denn wenn der Stein über die Hälfte der Mauer geschoben ist, fällt er von selbst herunter, — folgender:

$$u \cdot V (S - 1) \cdot \frac{2,50}{2}$$

wobei $u = 0,65$ Koeffizient der ruhenden Reibung von Mauerwerk, V = Volumen, S = spez. Gewicht des Körpers, von dem das spez. Gewicht 1 des Wassers infolge des Auftriebs abzuziehen ist und $\frac{2,50}{2}$ die halbe Mauerbreite ist. Dann ist der Reibungswiderstand =

$$0,65 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 25 (2,4 - 1,0) \cdot \frac{2,50}{2} = \\ = 0,65 \cdot 2500 \cdot 1,4 \cdot 1,25 = 2844 \text{ mkg.}$$

D. h. es bedürfte eines Arbeitsaufwands von 2844 mkg, um einen Rollscharstein von solch gewaltigen Dimensionen abzuheben. Ein Wasserwürfel von 1 m³ mit einer Geschwindigkeit von 6,0 m verfügt aber schon über ein Arbeitsvermögen von 1835 mkg. Aus diesen Vergleichen

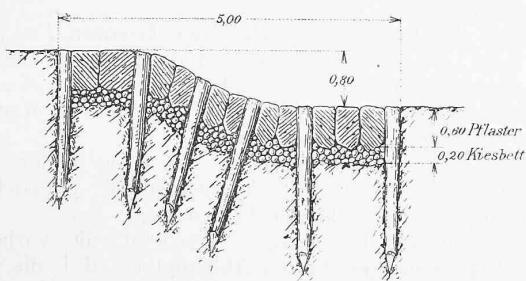


Abb. 1. Sohlenschwellen bei der Eglitz-Verbauung in Schlesien.

geht deutlich hervor, welchen bedeutenden Kräften die Rollschar ausgesetzt ist, und wie grosse Anforderungen an die Scherfestigkeit des Mörtels gestellt werden. Um diese zu vermindern, ist es zweckmäßig, die Rollschar möglichst tief in den Mauerwerkskörper einbinden zu lassen und die einzelnen Rollscharsteine durch eiserne Haken untereinander zu verbinden. Die Annahme, dass die Rollscharsteine durch die bogenförmige Anordnung der Sperre allein schon vor dem Abheben gesichert seien, ist im allgemeinen nicht zutreffend, da die bogenförmigen Mauern in der Regel so stark gebaut werden, dass sie als reine Stützmauern ohne Anlehnung an feste Widerlager standfest wären. In diesem Falle tritt natürlich solange eine Verschiebung des Untergrundes, also eine Verspannung gegen die Widerlager nicht stattgefunden hat, ein Horizontalschub der Mauer nicht auf, also auch keine Widerlagerreaktionen und damit auch keine Normalkräfte N in den Fugen a , die der Stosskraft des Wassers durch die von ihnen in den Fugen erzeugten Reibungswiderstände entgegen wirken würden (Abb. 2).

Die Resultierende aus Auftrieb und Stosskraft des Wassers würde also auch hier den Stein aus dem Verbande heben, wenn derselbe nicht schwer genug ist. Ist dagegen eine Verspannung infolge Nachgiebigkeit des Untergrundes oder infolge der durch den Erd- und Wasserdruk hervorgerufenen Formänderungen der Mauer erfolgt, so kann die Gewölbeform zur Sicherung der Rollschar beitragen.

Die Flügel der Geröllsperrre dienen dazu, das Wasser dem Ueberfall zuzuweisen und die Sperrmauer vor Umgehung zu schützen. Bei den meisten Wildbachverbauungen, sowohl im Tyrol, als auch im schlesischen Riesengebirge und in Böhmen habe ich die von Prof. Heim erwähnten, muldenförmig sanft gegen den Ueberfall abfallenden Flügel gefunden. Es scheint, dass diese Form den Vorteil vor

den, bei den neuern st. gallischen Verbauungen angewandten, mit Neigung von $1/5$ zum Ueberfall abfallenden Flügeln, voraus hat, dass dadurch das Durchflussprofil weniger kontrahiert wird, bei steigendem Wasser daher die Geschwindigkeit nicht so rasch wächst, infolgedessen auch die auf den Flügel einwirkende Reibung des durchströmenden Wassers vermindert wird. Auch bieten sie den vom Wasser mitgeführten Felsblöcken und Baumstämmen weniger Angriffspunkte, sodass auch ein Anstauen derselben im Ueberfallsprofil weniger zu befürchten ist. Durch diese muldenförmige Form der Flügel wird dann allerdings das Anschliessen von senkrechten oder nur wenig geneigten Ufermauern verhindert. Dieser Uebelstand würde jedoch nicht sehr ins Gewicht fallen, da steile Ufermauern doch nicht empfehlenswert sind, weil sie bei den geringsten Untersuchungen am Fundament umkippen. Wo letztere nicht durch steile Hänge bedingt werden, sind Ufermauern aus Trockenmauerwerk mit Neigung bis zu 45° , die am Fusse womöglich noch flacher in die Sohle verlaufen, vorzuziehen, da diese bei eventuellen Auskolkungen viel besser nachsacken können und die Reparaturen infolgedessen nicht so umfangreich werden.

Dies sind einige Gesichtspunkte, die mir bei Wildbachverbauungen und namentlich beim Bau von Geröllsperrern berücksichtigswert erscheinen. Dass aber Wildbachverbauungen, auch beim grössten Aufwand an Opfern, immer sehr vergängliche Werke sind, hat das Schicksal der neuen und so schön ausgeführten Flibachverbauung gezeigt. Hoffentlich lassen sich die dadurch Betroffenen in ihrem Kampfe mit den trotzigen Naturgewalten der Gebirgwelt nicht entmutigen!

Berlin, im November 1906.

H. Schuler,
Ingenieur im kgl. preuss. Ministerium für Landwirtschaft,
Domänen und Forsten.

Eine uns vom Kantonsingenieur von St. Gallen mittlerweile zugegangene Entgegnung auf den Artikel des Herrn Prof. Heim werden wir in der nächsten Nummer veröffentlichen.

Die Red.

Die Bestimmung der Kranzprofile und der Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen.

Von Professor Dr. F. Prášil in Zürich.

(Fortsetzung.)

III. Aufzeichnung von Schaufelkurven mittels konformer Abbildungen.

Als weitere Vorbereitung für die folgenden Untersuchungen sei noch ein geometrisches Problem behandelt, das für die Aufzeichnung von Schaufelprofilen aller Art von praktischem Nutzen ist und sein Vorbild in der Landkartendarstellung hat; die stereographischen Landkarten sind bekanntlich konforme Abbildungen der Erdoberfläche auf Ebenen.

In jeder Rotationsfläche bilden die Parallelkreise und die Meridianlinien ein Netz von Linien, die sich senkrecht schneiden; konstruiert man sich, wie dies für die Darstellung der beiden polaren Erdhemisphären durchgeführt wird, zu dem Netz der Rotationsfläche, in einer Ebene senkrecht zur Drehachse, ein konformes Netz, bestehend aus konzentrischen Kreisen und Radien, sodass also jedem Kreis der Ebene, ein Parallelkreis, jeder radialen Geraden eine Meridianlinie entspricht, so entspricht jeder Figur in der Rotationsfläche eine Figur in der Ebene von der Eigenschaft, dass die Linien der ebenen Figur die Kreise und radialen Geraden des Netzes unter denselben Winkeln schneiden, wie die Linien der Figur auf der Rotationsfläche die entsprechenden Parallelkreise und Meridianlinien des Netzes auf der Rotationsfläche.¹⁾

¹⁾ Kaplan in Brünn hat in der Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen ein Verfahren angegeben, dem die Idee winkelrichtiger ebener Abbildungen bereits zugrunde liegt.

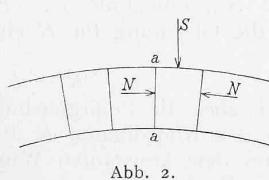


Abb. 2.

Ist somit $a b$ ein Kurvenstück (Abb. 4) auf der Rotationsfläche, deren Meridianlinie $p_a p_b$ ist; sind r_a und r_b die Radien der Parallelkreise, auf denen die Punkte a und b der Kurve liegen, ist ferner $A B$ die konforme Abbildung von $a b$ in der Ebene, d. h. entsprechen den Kreisen mit den Radien R_a und R_b die Parallelkreise mit den Radien r_a und r_b , so schneidet die Kurve $A B$ die ebenen Kreise durchwegs unter denselben Winkeln wie die Kurve $a b$ die Parallelkreise. Die praktische Brauchbarkeit dieser Abbildungsmethode für die Aufzeichnung von Schaufelkurven liegt auf der Hand, sie gestattet die in Rotationsflächen liegenden Schaufelprofile in einer ebenen Figur winkelrichtig zu entwerfen und dann dieselben in die Rotationsflächen in einfacher Weise zu übertragen.

Die Bestimmung der Radien R für die Kreise des ebenen Netzes ergibt sich aus folgender Ueberlegung:

Konforme Abbildungen sind bekanntlich in ihren kleinsten Teilen ähnlich, ohne dass dabei im allgemeinen die Bilder selbst geometrisch ähnlich sind.

Jedem Punkt der Rotationsfläche entspricht ein Punkt in der Ebene; die Entfernung zweier unendlich naher Punkte ist bestimmt,

für die Rotationsfläche: durch $ds^2 = dl^2 + r^2 d\varphi^2$, für die Ebene durch: $ds^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2$.

Zwei Flächenelemente, die zwei zugehörige Punkte enthalten, sind ähnlich, wenn für alle von den beiden Punkten ausgehenden Richtungen das Verhältnis $\frac{ds}{dl} = m =$ konstant ist; nun hat man

$$\frac{ds^2}{dl^2} = m^2 = \frac{dl^2 + r^2 d\varphi^2}{dR^2 + R^2 d\varphi^2} = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\left(\frac{dl}{r}\right)^2 + d\varphi^2}{\left(\frac{dR}{R}\right)^2 + d\varphi^2}$$

und es wird m unabhängig von der Richtung, wenn $\frac{dR}{R} = \pm \frac{dl}{r}$ ist; es ist dann $m^2 = \frac{r^2}{R^2}$ wohl verschieden von Punkt zu Punkt, die verschiedenen Parallelkreisen angehören, aber für ein Punkt konstant in allen Richtungen.

Die Theorie der konformen Abbildungen, die von Gauss begründet bereits vollkommen durchgebildet und ein wichtiges Hilfsmittel der Potentialtheorie geworden ist, zeigt, dass jedem der beiden Zeichen \pm eine Abbildung entspricht; dieselben sind auch untereinander konform und gleichzeitig spiegelbildähnlich.

Nimmt man für den vorliegenden Zweck das $+$ -Zeichen, so ergibt sich durch Integration:

$$R = R_0 e^{\int_{l_0}^l \frac{dl}{r}} \quad I$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Aufzeichnung von Schaufelkurven mittelst konformer Abbildungen.

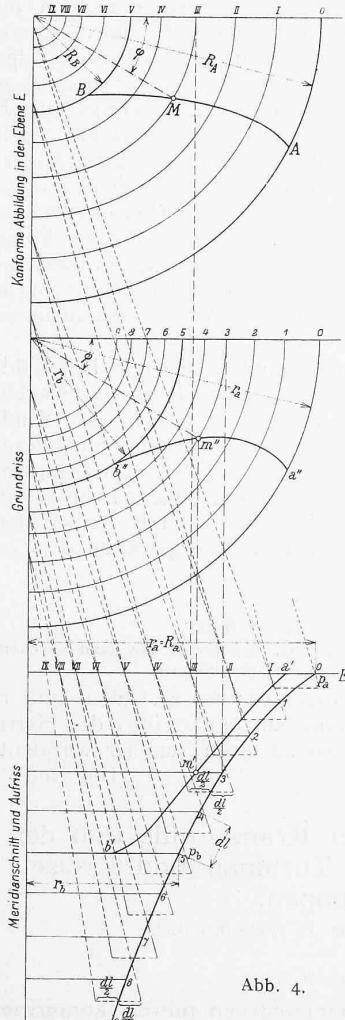


Abb. 4.

Kann bei gegebener Meridiankurve l explizite als Funktion von r bestimmt werden, mit $l = f(r)$, so folgt $dl = f'(r) dr$ und die Gleichung I erhält die Form

$$R = R_0 e^{\int_{r_0}^r \frac{f'(r)}{r} dr} \quad I$$

Ist l nicht explizite als Funktion von r erhältlich oder ist die Funktionsform eine solche, dass die Integration $\int \frac{f'(r)}{r} dr$ auf komplizierte Ausdrücke führt, so kann man das Integral zwischen zwei Grenzen einfach durch Planimetrierung erhalten, indem man in einem orthogonalen ebenen Koordinatensystem auf die von einem Anfangspunkt gemessenen Bogenlänge l als Abszissen die Werte $\frac{l}{r}$ als Ordinaten aufträgt (Abb. 5). Der Inhalt der Fläche zwischen der Abszissenachse, der Anfangsordinate, der den Werten l und $\frac{l}{r}$ entsprechenden Endordinate und der durch obige Konstruktion bestimmten Kurve gibt den Wert des Integrals zwischen den Grenzen $l = 0$ und $l = l$ bzw. $r = r_0$ und $r = r$ und dieser Wert kann für die Berechnung des der Bogenlänge l der Meridianlinie, bzw. dem zugehörigen Radius r entsprechenden Radius R in die Gleichung I eingesetzt werden.

Ein anderes rein konstruktives, jedoch nur angennähertes Verfahren ist aus der Abbildung 4 ersichtlich, dasselbe bedarf weiter keiner Erläuterung.

Als Beispiel, das geeignet erscheint, die vorher erwähnte Eigenschaft konformer Abbildungen, d. i. die Ähnlichkeit der kleinsten Teile derselben zu veranschaulichen, diene folgender Fall:

Die Radien R für die konforme Abbildung einer Kreiszylinderfläche auf eine Ebene senkrecht zur Achse, ergeben sich, da für den Zylinder $r = \text{konstant} = k$ ist, aus der Formel

$$R = k \cdot e^{\int_0^l \frac{dl}{k}} = k \cdot e^{\frac{l}{k}}$$

Eine auf der Zylinderfläche liegende Schraubenlinie von konstanter Neigung wird in der Ebene durch eine logarithmische Spirale abgebildet, wie sich aus Folgendem ergibt:

Die Länge l des Abstandes eines Punktes der Schraubenlinie von der Abbildungsebene ist $l = k(\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg} \alpha$, wenn durch φ_0 derjenige Punkt des Kreises mit dem Radius k bestimmt ist, in dem die Schraubenlinie die Abbildungsebene schneidet, und wenn α der Steigungswinkel der Schraubenlinie ist. Setzt man diesen Wert von l in die Gleichung für R ein, so folgt

$$R = k e^{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg} \alpha}$$

d. i. aber die Polargleichung einer logarithmischen Spirale mit den Koordinaten R und φ , die die Kreise R ebenfalls unter dem konstanten Winkel α schneidet.

Denkt man sich auf der Zylinderfläche drei solcher Schraubenlinien mit verschiedener Steigung verzeichnet, die auf der Zylinderfläche ein unendlich kleines Dreieck abgrenzen, so werden die entsprechenden logarithmischen Spiralen in der Ebene ebenfalls ein unendlich kleines Dreieck abgrenzen, dessen Winkel gleich denen des Dreieckes auf der Zylinderfläche sind; die beiden Dreiecke sind also ähnlich; die Abbildungen sind also in den kleinsten Teilen ähnlich, ohne dass die Bilder selbst geometrisch ähnlich sind.

Betrachtet man eine krumme Linie auf einer Rotationsfläche als die Bahnkurve, die einer Flüssigkeitsströmung entspricht, so ist $\frac{dl}{dt} = c_m = \sqrt{w^2 + v^2}$ die totale, in der Meridianebene liegende Komponente der Strömungsgeschwindigkeit; $\frac{rd\varphi}{dt} = u$ ist die dazu senkrechte in der

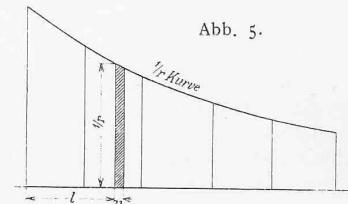


Abb. 5.

Ebene des Parallelkreises liegende Komponente. Man kann nun auch die Abbildung der krummen Linie in der Ebene als eine Bahnkurve betrachten und erkennt leicht, dass in derselben die Geschwindigkeitskomponente C_m dem Wert

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R}{r} \frac{dl}{dt}, \text{ also } C = \frac{R}{r} c_m$$

entspricht, wobei dann C die Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung ist; es folgt dann weiter

$$\frac{C}{c_m} = \frac{R}{r} = \frac{R \frac{dq}{dt}}{r \frac{dq}{dt}} = \frac{U}{u} \text{ und mithin}$$

$$C : c_m = U : u = R : r,$$

wobei U die zu C senkrechte Komponente der Geschwindigkeit des Punktes am Radius R ist.

Die Geschwindigkeiten zweier entsprechender Punkte verhalten sich demgemäss wie die Radien der beiden Punkte.

Besitzt die Strömung in der Rotationsfläche ein Geschwindigkeitspotential, so besteht eine Potentialfunktion auch für die Abbildungsebene, wie sich aus Folgendem ergibt.

Es ist, wenn F die das Geschwindigkeitspotential der Rotationsfläche darstellende Funktion bedeutet,

$$C_m = \frac{\partial F}{\partial l} \text{ und } ur = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \text{ mithin}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{r}{R} \cdot C \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{r^2}{R^2} UR$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial l \cdot \partial \varphi} = \frac{r}{R} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varphi} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \cdot \partial l} = \frac{\partial}{\partial l} r^2 \frac{U}{R}$$

Da aber $dl = \frac{r}{R} dR$ ist, so folgt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \cdot \partial l} = \frac{r}{R} \cdot \frac{\partial \left(\frac{r}{R}\right)^2 UR}{\partial R}$$

d. h. es ist $\frac{\partial \left(\frac{r}{R}\right)^2 C}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\frac{r}{R}\right)^2 UR}{\partial R}$, was erfüllt ist, wenn

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 C = \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \left(\frac{r}{R}\right)^2 UR = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \text{ ist;}$$

Φ ist somit die gesuchte Potentialfunktion der Abbildung.

Auch die Kontinuitätsgleichung kann auf die Geschwindigkeitswerte der Abbildung bezogen werden, was weiter unten in Betracht kommen wird.

Es ist noch von Interesse, zu untersuchen, in welcher Beziehung die Abbildungen mehrerer Rotationsflächen zueinander stehen, deren Meridianlinien gleicher Art sind, d. h. deren Gleichungen sich nur durch den Wert eines Parameters unterscheiden.

Die Gleichung der Meridianlinienschar sei durch eine Funktion S von r und z gegeben, sodass aus derselben der Ordinatenwert $z = f(r, S)$ als Funktion von r mit dem Parameter S folgt; dann wird

$$dl = \sqrt{dr^2 + dz^2} = dr \sqrt{1 + f'^2} \text{ mit } \frac{dz}{dr} = \frac{d(f(r, S))}{dr} = f'.$$

Das allgemeine Integral $J = \int V_1 + f'^2 \frac{dr}{r}$ gibt so-

mit einer Funktion Σ von r und S , die zu einer Funktion von r und z wird, wenn man S wieder durch den Funktionsausdruck für die Meridianlinienschar ersetzt. Die Gleichung $\Sigma(r, z) = \text{Konstante}$ gibt dann eine Kurvenschar, deren einzelne Kurven durch den Wert der Konstanten bestimmt sind.

In beistehender Abbildung Nr. 6 ist t eine Schar von Meridianlinien S und die dazu gehörige Kurvenschar Σ dargestellt.

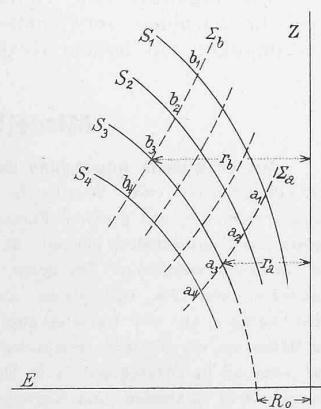


Abb. 6.

Die auf Seite 290 abgeleitete Gleichung I für den Abbildungsradius hat sich ergeben aus

$$R = R_0 e^{\int_{l_0}^l \frac{dl}{r}} = R_0 \cdot e^{\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \sqrt{1 + f'^2}}$$

Es wird daher z. B. für die Meridianlinie S_b

$$R_b = R_0 e^{\int_{r_0}^{r_b} \frac{dr}{r} \sqrt{1 + f'^2}}$$

$$R_a = R_0 e^{\int_{r_0}^{r_a} \frac{dr}{r} \sqrt{1 + f'^2}}$$

mithin

$$(R_b - R_a) = R_0 \cdot e^{\int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} \sqrt{1 + f'^2}} = R_0 e^{\Sigma_b - \Sigma_a}$$

Für eine andere Meridianlinie gilt dasselbe, nur ist für diese das entsprechende R_0 zu nehmen, es sind daher die Verhältnisse $\frac{R_b - R_a}{R_0} = \text{Konstante}$; daraus ergibt sich der für die praktische Verwendung wichtige Grundsatz:

Die konformen Abbildungen sämtlicher Rotationsflächen, deren Meridianlinienschar durch eine Funktion S bestimmt ist, auf eine Ebene senkrecht zur Drehachse sind einander ähnlich.

Die für die Berechnung und Aufzeichnung von konformen Abbildungen von Rotationsflächen gefundenen Regeln und Grundsätze werden im Verein mit den im vorigen Kapitel gefundenen Grundsätzen im Folgenden Verwendung finden.

Da nach dem eben Erörterten es jederzeit möglich ist, Strömungen in Rotationsflächen mit krummliniger Meridianlinie konform in einer Ebene senkrecht zur Drehachse abzubilden, so werden in erster Linie ebene Strömungen entsprechend denjenigen in rein radialen Systemen (Radialturbinen und Kreiselpumpen mit ebenen Mantelflächen) besprochen werden.

IV. Die Schaufelformen der reinen Radialturbinen und Pumpen.

Die Kranzprofile der reinen radialen Systeme sind, soweit die Kanalbegrenzung in Frage kommt, durch zwei parallele, zur Drehachse senkrecht stehende Ebenen bestimmt.

Die Ausbildung der Schaufelprofile kann erfolgen:

- a) unter der Annahme $\lambda = 0; \mu = 0; \nu = 0$ entsprechend dem 1. Fall in Kapitel II.
- b) unter der Annahme $\lambda = 0; \mu = 0; \nu = \omega$ entsprechend dem 2. Fall in Kapitel II;

Es wird in beiden Fällen zu untersuchen sein, unter welchen Umständen Gleichheit der Geschwindigkeitsverhältnisse längs eines Parallelkreises möglich ist.

Da $w = 0$ und in beiden Fällen wegen $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ auch $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ sind, folgt, dass die Geschwindigkeitsverhältnisse in sämtlichen zur Drehachse senkrecht stehenden Ebenen kongruent sind; die Bestimmung der Strömungsverhältnisse, der Stromlinien, der Linien gleicher Geschwindigkeit, der Linien gleicher Pressung gehört daher für diese Fälle zu den rein zweidimensionalen Problemen, die in der Hydrodynamik unter Benutzung der Funktionentheorie in weitgehendstem Masse bereits behandelt und für welche Lösungen gefunden sind, die zu den scharfsinnigsten Produkten der mathematischen Physik gehören. In den Publikationen von Euler, Helmholtz, Kirchhoff, Riemann-Weber, Wien u. a. m. sind Probleme dieser Art behandelt, allerdings ohne Hinweis auf deren Gebrauchsfähigkeit für die uns hier beschäftigenden speziellen Fragen.

Die einfachste der dem Fall a entsprechenden Lösungen ist gegeben durch das Geschwindigkeitspotential für die Relativbewegung von der Form:

$$F = k_1 \lg. \text{nat } r + k_2 \varphi \dots \quad k_1 \text{ und } k_2 \text{ sind konstante Größen.}$$

Es folgt daraus:

$$v = \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{k_1}{r} \text{ oder } vr = k_1 \quad \dots \quad II$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{k_2}{r} \text{ oder } ur = k_2 \quad \dots \quad III$$

Die Kontinuitätsgleichung D ist erfüllt, denn es ist

$$\frac{\partial vr}{\partial r} + \frac{\partial ur}{\partial \varphi} = 0.$$

Die Stromliniengleichung in Polarkoordinaten ausgedrückt ergibt sich aus der Erwägung, dass

$$\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{v}{u} = \frac{k_1}{k_2} \text{ ist, mit}$$

$$W = k_2 \lg. \text{nat } r - k_1 \varphi \quad \dots \quad IV$$

Aus I und IV folgen die Gleichungen der Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials bzw. der relativen Bahnkurven mit $F = \text{konstant}$; $W = \text{konstant}$; $r = r_0$ für $\varphi = \varphi_0$:

$$r = r_0 e^{-\frac{k_2}{k_1}(\varphi - \varphi_0)} \quad \dots \quad I'$$

$$r = r_0 e^{\frac{k_1}{k_2}(\varphi - \varphi_0)} \quad \dots \quad IV'$$

Die Kurven sind logarithmische Spiralen; gegeneinander naturgemäß orthogonale Trajektorien und innerhalb einer Schar gegeneinander durch Drehung vertauschbar.

Die totale Geschwindigkeit ergibt sich mit:

$$c = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{r} \quad \dots \quad V.$$

Die Kurven gleicher Relativgeschwindigkeit sind also die Parallelkreise; die Bewegung zählt zu denjenigen mit gleichen Geschwindigkeitsverhältnissen längs eines Parallelkreises.

Unter Berücksichtigung von $w = 0$ und weil auch wegen $\lambda = 0$; $\mu = 0$; $v = 0$; $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial r}$ ist, reduzieren sich die Fundamentalgleichungen der Relativbewegung (A, B, C) auf

$$-g - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$-\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - rw^2 - 2uw$$

$$-\frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} = v \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + 2vrw$$

Durch Multiplikation mit dz , dr und $d\varphi$ ergibt sich

$$-gdz - \frac{g}{\gamma} dp = d\frac{v^2}{2} + d\frac{u^2}{2} - d\frac{r^2 w^2}{2} - 2w(udr - vrd\varphi);$$

$udr - vrd\varphi = dW$ ist aber das totale Differential der Stromlinienfunktion, das für die Stromlinien selbst gleich Null wird. Es folgt daraus, wenn man $c^2 = v^2 + u^2$ einführt, allgemein:

$$gz + \frac{g}{\gamma} p + \frac{c^2}{2} - \frac{r^2 w^2}{2} - 2wW = \text{konstant.}$$

Mit $W = \text{konstant}$ entsprechend $dW = 0$, folgt die Hauptgleichung der Relativbewegung

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} - \frac{r^2 w^2}{2g} = \text{konstant.}$$

Setzt man für W den, den Stromlinien entsprechenden Funktionsausdruck ein, so ergibt sich die allgemeine Pressungsgleichung und daraus speziell mit $z = \text{konstant}$ und $p = \text{konstant}$ die Gleichung der Kurven konstanter Pressung in einer Ebene senkrecht zur Drehachse.

Dieselbe ergibt sich also für den gegebenen Fall mit der Zuordnung $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0$ mit

$$\frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) - \frac{r^2 - r_0^2}{2} \cdot w^2 - 2w k_2 \lg. \text{nat} \frac{r}{r_0} + 2k_1 w (\varphi - \varphi_0) = 0 \quad VI.$$

Auch diese Kurven sind durch Drehung vertauschbar.

Aus $-\frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = +2k_1 w$ folgt, dass längs eines Parallelkreises die Pressung linear mit φ variiert und zwar, da $2k_1 w$ von r unabhängig, für alle Parallelkreise in gleichem Masse.

Für die Absolutbewegung folgt:

$$v = v = \frac{k_1}{r}; u = u + rw = \frac{k_2}{r} + rw, \dots \quad VII$$

mithin in anderer Form

$$vr = k_1 = \text{konstant}$$

$$ur = k_2 + r^2 w = \text{variabel mit } r.$$

Wieder unter Berücksichtigung, dass $\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{v}{u}$ die Differentialgleichung für die absoluten Stromlinien in Polarkoordinaten ist, folgt deren Gleichung mit

$$\mathfrak{W} = k_2 \lg. \text{nat } r + \frac{r^2 \omega}{2} - k_1 \varphi \dots \quad VIII$$

und die Gleichung einer Kurve mit $\mathfrak{W} = 0$ und der Zuordnung $r = r_0$; $\varphi = \varphi_0$;

$$k_2 \lg. \text{nat} \frac{r}{r_0} + \frac{r_2 - r_0^2}{2} \omega - k_1 (\varphi - \varphi_0) = 0.$$

Die Kurven der absoluten Stromlinienschar sind ebenfalls durch Drehung um die Rotationsachse vertauschbar.

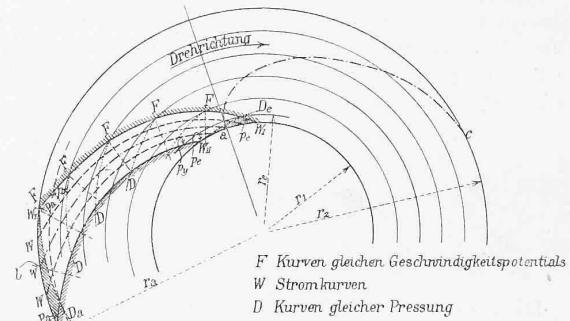


Abbildung 7.

Beistehende Abbildung Nr. 7 gibt den Schaufelplan einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe mit logarithmischen Spiralen als Stromlinien; neben diesen und einer entsprechenden Absolutbahn sind die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials und die Kurven gleicher Pressung eingezeichnet; die Parallelkreise sind nach dem Obigen Kurven gleicher Geschwindigkeit.

Von Wesenheit ist der Verlauf der Drucklinien; dieselben fallen nicht mit den Linien gleicher Geschwindigkeit zusammen.

Befindet sich die Flüssigkeit vor und nach der Strömung durch das Rad je unter konstanter Pressung, so ist eine stationäre Strömung der angegebenen Art nur innerhalb der Drucklinien D_e und D_a möglich; in den schraffierten Räumen muss ebenfalls konstante Pressung vom Betrage p_e bzw. p_a herrschen; dieser Randbedingung kann in der materiellen Ausführung durch geeignete Abrundung der Schaufelenden bei $D_e W_1$ und $D_a W_2$ in praktisch genügendem Masse entsprochen werden.

Mit Hilfe der Hauptgleichung und der Momentengleichung bezogen auf die mittlere Strombahn, erhält man die normalen Gleichungen der Zentrifugalpumpen-Theorie.

Die logarithmische Spirale kann auch als Schaufelform für Turbinen verwendet werden, dieselbe führt auf Anordnungen mit hohem Reaktionsgrad. (Schluss folgt.)

Miscellanea.

Die praktische Anwendung der Telegraphie ohne Draht hat, wie der «Prometheus» einer Statistik in *Atti della Associazione elettronica Italiana* entnimmt, viel grössere Fortschritte gemacht, als man im allgemeinen wohl anzunehmen geneigt ist. Die drei grössten Gesellschaften, die deutsche Gesellschaft Telefunken, die italienisch-englische Marconi-Gesellschaft und die französische Compagnie De Forest haben zurzeit nicht weniger als 217 Landstationen im Betriebe. Davon entfällt rund die Hälfte auf die deutsche Gesellschaft, die 107 Stationen eingerichtet hat, und zwar 26 in Deutschland, 1 in Deutsch-Afrika, 26 in den Vereinigten Staaten, 8 in Schweden und Norwegen, 7 in Russland, 6 in Dänemark, 4 in Holland, 2 in den holländischen Kolonien, 2 in Oesterreich-Ungarn,