Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 47/48 (1906)

Heft: 18

Artikel: Ueber den horizontalen Balken

Autor: Kiefer, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26097

allgemeinen willkommen sein, die den in Fachkreisen aufgeworfenen Tagesfragen ein Interesse entgegenbringen. Es sind überdies Fragen, deren Bedeutung weit über die Fachkreise hinausragt und die die lebendigsten Interessen des Volkes berühren. *J. A. Lux.*

Ueber den horizontalen Balken.

Von *A. Kiefer*, Zürich.

Wenn auf einen horizontalen Balken, der in den beiden Endpunkten M, N unterstützt ist, vertikale, in der Ebene durch MN gelegene Kräfte wirken, so können die Auflagerreaktionen, die Momente und Biegungsmomente und deren Aenderungen für beliebige vertikale Schnitte auf folgende Weise ermittelt werden.

Abbildung 1. P_1 sei eine solche Kraft und zwar liege ihr Anfangspunkt A_1 auf MN und P_1 bedeute zugleich

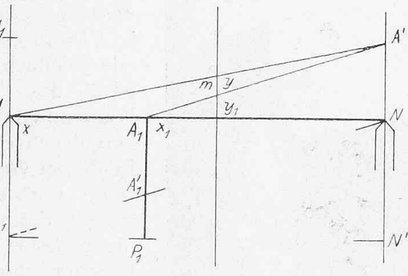

Abb. 1.

den Endpunkt der Kraft. Zieht man durch P_1 die Parallele $N'M'$ zu NM und verbindet den Punkt M', in welchem sie die Vertikale durch M schneidet mit N, so teilt diese Linie die Kraft P_1 in zwei Teile, von denen der obere $A'_1 A_1$ gleich der Auflagerreaktion in M und der andere gleich derjenigen in N ist; denn die Linie NM' teilt P_1 im Verhältnis der Abstände von N und M

$$A'_1 A_1 : P_1 A'_1 = NA_1 : M' P_1.$$

Zieht man durch A_1 die Parallele zu $M'N$, so trifft sie die Vertikale durch N in A' so, dass $NA' = MM_1$ d. h. gleich der Auflagerreaktion in M ist; verbindet man ferner M mit A', so sind für einen beliebigen Vertikalschnitt die in ihm gelegenen Strecken y, y_1, $m = y - y_1$ beziehungsweise proportional dem Moment der Auflagerreaktion, dem Moment der Kraft P_1 und dem Biegungsmoment. Es seien nämlich x und x_1 die Abstände der Punkte M und A_1 von dem Schnitt, so folgt aus der Figur vermöge ähnlicher Dreiecke

$$\frac{y}{x} = \frac{NA'}{l}, \text{ also } y = \frac{1}{l}\,(MM_1 \,.\, x);$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{MM'}{l}, \text{ also } y_1 = \frac{1}{l}\,(P_1 \,.\, x_1) \text{ und}$$

$$m = y - y_1 = \frac{1}{l}\,[MM_1 \,.\, x - P_1 \,.\, x_1], \text{ wie es sein muss.}$$

Für $l = 1$ stellen also die Strecken y, y_1 und m der Reihe nach das Moment der Auflagerreaktion, das Moment der Kraft P_1 und das Biegungsmoment dar. Bei der Parallelverschiebung des Schnittes bleibt A' fest und man übersieht die Aenderung der einzelnen Momente; die Fläche des Dreiecks MA_1A' ist die Biegungs-Momentenfläche. Die Auflagerreaktion in N ist nicht eingezeichnet.

Abbildung 2. P_2 sei eine zweite Kraft und in ihrer Wirkungslinie verschoben bis der Anfangspunkt A_2 auf $A_1 A'$ fällt; man ziehe durch den Endpunkt P_2 die Parallele $M'' N''$ zu $A_1 A'$, schneide mit der Vertikalen durch M und verbinde den Schnittpunkt M'' mit A'; diese Linie teilt P_2 in zwei Teile, von denen der obere $A'_2 A_2 = M_1 M_2$ die neuhinzukommende Auflagerreaktion in M und der andere Teil diejenige in N ist; denn

$$A'_2 A_2 : P_2 A'_2 = A' A_2 : M'' P_2.$$

Zieht man ferner $A_2 A''$ parallel $M'' A'$, so ist $A' A'' = M_1 M_2$ und verbindet man noch M mit A'', so sind für einen beliebigen vertikalen Schnitt die Streken y, y_1, y_2, m beziehungsweise proportional dem Moment der Auflagerreaktion MM_2, dem Moment der Kraft P_1, dem Moment der Kraft P_2 und dem Biegungsmoment; denn zufolge ähnlicher Dreiecke hat man:

$$\frac{y}{NA''} = \frac{x}{l}, \text{ also } y = \frac{1}{l}\,(MM_2 \,.\, x);$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{MM'}{l}, \text{ also } y_1 = \frac{1}{l}\,(P_1 \,.\, x_1);$$

ferner wenn x_2 den Abstand des Punktes A_2 vom Schnitt bedeutet $\frac{y_2}{x_2} = \frac{N''A'}{l}$, also $y_2 = \frac{1}{l}\,(P_2 \,.\, x_2)$ und

$$m = y - (y_1 + y_2) = \frac{1}{l}\,[MM_2 \,.\, x - (P_1 \,.\, x_1 + P_2 \,.\, x_2)],$$

wie es sein muss.

Für $l = 1$ stellen somit die Strecken y und m das Moment der Auflagerreaktion und das Biegungsmoment dar. Bei der Parallelverschiebung des Schnittes bleibt A'' fest und man überblickt die Aenderungen der einzelnen Momente und des Biegungsmomentes. Das letztere wird immer durch den Abschnitt m gemessen, den das Polygon MA_1A_2A'' auf der vertikalen Schnittlinie erzeugt; das Polygon ist die Momentenfläche für das Biegungsmoment. Liegt der Schnitt zwischen $A_1 A_2$, so fällt das Moment von P_2 für die Ermittelung des Biegungsmomentes ausser Betracht; die Momente von P_1 und P_2 bekommen entgegengesetztes Vorzeichen und sie werden zudem einander gleich, wenn der Schnitt durch den Punkt S_1 geht. Folglich geht die Resultierende der zwei Kräfte P_1, P_2 durch den Schnittpunkt S_1 der verlängerten Polygonseiten $A_1 M$, $A_2 A''$. Die Auflagerreaktion in N ist wieder weggelassen.

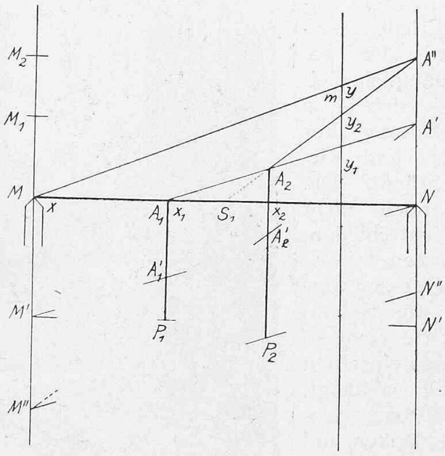

Abb. 2.

Wenn P_3 eine dritte Kraft ist, deren Anfangspunkt A_3 auf $A_2 A''$ liegt, so kann sie in gleicher Weise wie P_2 behandelt werden. Es entsteht das Polygon $MA_1A_2A_3A'''$, dessen Fläche auf einer vertikalen Schnittlinie das Biegungsmoment begrenzt und dessen Seiten und deren Verlängerungen auf der Schnittlinie die Momente der Kräfte abgrenzen. Folglich gehen durch die Schnittpunkte der verlängerten Polygonseiten die Zwischenresultierenden, nämlich durch den Schnittpunkt $A_1 M, A_2 A_3$ die Resultierende von P_1, P_2, durch $A_2 A_1$, $A_3 A'''$ die Resultierende von P_2, P_3 und durch $A_1 M$, $A_3 A'''$ diejenige von P_1, P_2, P_3. Analog ist die Behandlung, wenn noch eine vierte, oder fünfte, oder eine beliebige Zahl von Kräften vorhanden ist.

Ist ein ganzes System von Kräften auf diese Weise behandelt und kommt eine variable Kraft hinzu, so kann man für eine gewählte Lage derselben nach Abbildung 1 die Aenderungen besonders konstruieren, welche diese Kraft an der Auflagerreaktion und dem Biegungsmoment bewirkt und dann hinzufügen; ebenso eventuell für eine zweite Kraft.

Es ist oben stillschweigend angenommen worden, das Vereinigen der Kräfte erfolge von M ausgehend in der Reihenfolge wie sie neben einander liegen; das ist nicht notwendig, sondern die Reihenfolge ist beliebig und es brauchen die Kräfte auch nicht gleich gerichtet zu sein. Man kann daher beim Auftreten einer variablen Kraft dieselbe für irgend eine Lage an die letzte Polygonseite anschliessen und erhält dann die korrigierten Grössen selber.

In Abbildung 3 liegt die Kraft P_3 zwischen P_1, P_2. Die Momentenfläche $MA_1A_2A_3A'''$ wird ein überschlagenes Polygon und im übrigen bestehen die gleichen Verhältnisse.[1])

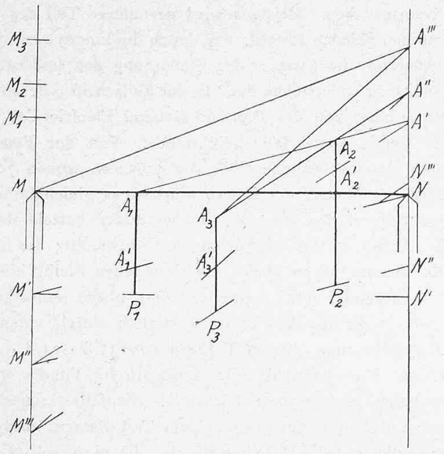

Abb. 3.

Die Konstruktionen sind ohne Kräfte- und Seilpolygon entstanden; es ist indessen klar, dass man sie auch im Sinne solcher Polygone deuten kann. Ist das übliche Kräftepolygon gezeichnet und wählt man den Pol auf der Horizontalen durch den Anfangspunkt in einem Abstand gleich und gleich gerichtet zu MN, so wird, wenn die erste Parallele durch M gelegt wird, das entstehende Seilpolygon zum Polygon der auseinander gesetzten Konstruktion. Es ist ferner klar, dass die letztere verallgemeinert werden kann, indem man anstatt A_1 auf MN zu wählen, durch die Punkte A_1, P_1 in beliebiger Richtung parallele Linien zieht und dann verfährt wie auseinandergesetzt; ferner braucht MN nicht horizontal zu sein und es kann alles auf beliebige parallele Kräfte ausgedehnt werden.[2])

Aus den Abbildungen, die übrigens leichter zu betrachten als zu beschreiben sind, lassen sich einige Folgerungen ziehen:

Wenn $P_1 = P_2$ ist, so fällt S_1 in die Mitte zwischen P_1, P_2. Wenn alle Kräfte einander gleich sind, in gleichen Abständen aufeinander folgen und in dieser Reihenfolge genommen sind, so schneidet jede Polygonseite die Gerade MN in der Mitte zwischen der zuletzt genommenen Kraft und P_1. Ist der Balken MN gleichmässig und kontinuierlich belastet, so bekommt das Polygon unendlich viele Seiten, welche Tangenten einer Kurve sind. Jede Tangente schneidet MN in einem Punkt, der in der Mitte zwischen M und der Vertikalen durch den Berührungspunkt der Tangente liegt. Das ist aber bekanntlich die Eigenschaft einer Parabel, welche M als Scheitelpunkt und MN als Scheiteltangente besitzt. Bezeichnet man den Parameter der Parabel mit q, wählt M als Nullpunkt und MN als Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet die Gleichung der Parabel $x^2 = 2qy$.
Wenn P die totale Belastung bedeutet, so ist die Kurvenordinate in N gleich $\frac{P}{2}$, der Auflagerreaktion und man hat

$$l^2 = 2q\,\frac{P}{2},$$

somit $q = \frac{l^2}{P}$ und die Gleichung der Parabel

$$x^2 = 2\,\frac{l^2}{P}y.$$

Der Brennpunkt wird gefunden, indem man den Kurvenpunkt l, $\frac{P}{2}$ mit der Mitte von MN verbindet, dort auf die Verbindungslinie das Lot errichtet und mit der Vertikalen durch M schneidet.

Wird die Belastung durch eine Fläche dargestellt, die auf MN liegt, so wird das Polygon ebenfalls zu einer Kurve und die Tangente in irgend einem Punkte trifft MN in dem Punkt, wo die Vertikale durch den Schwerpunkt des Flächenstückes hindurchgeht, das die Vertikale durch den Berührungspunkt abschneidet. Wächst demnach die Belastung proportional mit der Abszisse, so beträgt der Tangentenabschnitt auf MN, von M aus gemessen $^2/_3$ und vom Fusspunkt der Ordinate aus gemessen $^1/_3$ von der Abszisse des Berührungspunktes, was die Gleichung bedingt

$$x^3 = sy.$$

[1]) Es braucht wohl nicht gesagt zu werden, dass beim praktischen Zeichnen die Punkte N'.., A'_1.., M_1... nicht bestimmt zu werden brauchen.

[2]) Siehe Schweizerische Bauzeitung, Bd. XLIII, S. 247, «Ueber Kräftezerlegung», Abschnitt 8.

Wettbewerb für ein Schulhaus mit Turnhalle in Reconvilier.

Das preisgerichtliche Urteil in diesem Wettbewerb, das uns zur Veröffentlichung zugeht, lautet wie folgt:

«Au Conseil communal de Reconvilier.

Monsieur le Président,

Messieurs,

Le Jury que vous avez nommé pour juger le concours d'un bâtiment scolaire à Reconvilier s'est réuni suivant votre ordre les 11 et 12 crt. Monsieur Béguin ayant du s'excuser au dernier moment pour cause de maladie a été remplacé par Monsieur Prince, architecte à Neuchâtel.

Quarante-deux projets sont en présence, tous arrivés dans le délai fixé par le programme. Ils sont numérotés de 1 à 42 et portent comme devise les signes distinctifs suivants: N° 1. «Crayonneur», 2. «Rauracien», 3. «Perce-neige», 4. Monogramme (dessiné), 5. «Chi sai!», 6. «Pour notre jeunesse», 7. «Bonne lumière», 8. Deux cercles concentriques, intérieur noir (dessiné), 9. «Myosotis», 10. Croquis orienté (dessiné), 11. «En haut», 12. «Chacun à son goût», 13. «Jura», 14. «Ouvrons les yeux», 15. «Une idée», 16. «Heimatschutz», 17. «Vadrouille», 18. «Fritz», 19. «Air et Lumière», 20. «Jura», 21. Emblème (dessiné), 22. «Rousseau», 23. «Simple», 24. «Montagnard», 25. «Aux petits fondeurs», 26. «Les Montagnards, 27. «Avril», 28. Tête dans un cercle (dessiné), 29. «Chaindon», 30. «Printemps», 31. «Sans suite». 32. «Simple idée», 33. Timbre suisse de 0,02, 34. «Mont», 35. «Jeunesse», 36. «Ty-Fou», 37. «Pour la jeunesse», 38. «Jura», 39. «Encore une idée», 40. «Jura», 41. «Jura Mons», 42. Sud.

Après s'être rendu sur place pour prendre connaissance du terrain affecté au bâtiment, le jury entre en séance et décide de procéder par élimination.

Au premier tour 22 projets sont écartés pour insuffisance de présentation et de conception; ce sont les projets 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 30, 31, 32, 37, 39 et 41.

Au deuxième tour 12 projets subissent le même sort, bien que pour la plupart ils présentent un réel intérêt, mais ne répondent pas d'une manière suffisamment précise au programme; ce sont les N° 3, 4, 5, 14, 15, 24, 27 28, 33, 34, 35 et 40.

Huit projets restent en présence. Ils font de la part du jury l'objet d'une étude plus approfondie qui peut être résumée comme suit:

N° 13. Plan trop ramassé. Classes en partie mal orientées. Les portes de ces classes sont peu pratiques, étant trop rapprochées les unes des autres. L'éclairage de la salle de dessin laisse beaucoup à désirer. Bonnes façades; projet très bien présenté. La halle de gymnastique est insuffisamment éclairée et a plutôt le caractère d'une chapelle.

N° 17. Bon projet, simple et pratique. Classes bien éclairées et bien orientées. Les W-C. gagneraient à être agrandis du local des vestiaires qui n'étaient pas demandés. L'escalier suffirait s'il était à simple rampe. Les façades sont très bonnes, le plan de la halle de gymnastique gagnerait à être retourné et son emplacement serait plutôt indiqué le long du chemin pour le détacher complétement du bâtiment scolaire.

N° 18. Beaucoup d'analogie avec le N° 17, mêmes qualités et mêmes défauts. L'arrangement de la halle de gymnastique est préférable.

N° 20. Les deux entrées au nord et à l'est ne sont pas recommandables. Les deux escaliers ne sont pas utiles, un seul aurait suffi. Bonne orientation; les façades sont assez intéressantes. Le toit mansardé de la halle de gymnastique est trop important.

N° 29. Bonne conception générale du plan, escaliers bien compris. L'idée de la communication entre la halle de gymnastique et le bâtiment d'école est heureuse. Il est malheureux que les W-C. soient si resserrés, ils gagneraient a être élargis ainsi que les services de la halle de gymnastique. L'extérieur est lourd, particulièrement le motif central couronné d'un