**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

**Band:** 43/44 (1904)

**Heft:** 25

**Artikel:** Rechnerische Bestimmung der Anfahrlinien elektrischer Vollbahnen

**Autor:** Kummer, W.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-24826

# Rechnerische Bestimmung der Anfahrlinien elektrischer Vollbahnen.

Von Dr. *W. Kummer*, Ingenieur in Zürich.

In einer frühern Studie [1]) hat der Verfasser die Anfahrlinien der Motorwagen elektrischer Bahnen für verschiedene Motortypen verglichen unter Vernachlässigung des quadratischen Gliedes $r_2 v^2$ in der Funktion, die den Traktionswiderstand $r$ pro Einheit des Zugsgewichts darstellt und lautet:

$$r = r_1 + r_2 v^2,$$

wo $r_1$ und $r_2$ Konstanten und $v$ die variable Geschwindigkeit bedeuten. Die Vernachlässigung des Gliedes $r_2 v^2$ war damals gerechtfertigt durch den gestellten Zweck der Vergleichung verschiedener Motortypen, wobei es wesentlich war, möglichst einfache Ausdrücke für die abgeleiteten Grössen des zurückgelegten Weges, der geleisteten Arbeit usw. zu erhalten; insbesondere wurde damals Gewicht darauf gelegt, die Anfahrgeschwindigkeitskurve aus der allgemeinen Form:

$$\varphi\ (v,t) = 0$$

in die besondere Form:

$$v = \psi\ (t)$$

überzuführen, wobei letztere analytisch möglichst einfach beschaffen sein musste, um die verschiedenen Motortypen durch einfache und charakteristische Funktionen zum Ausdruck zu bringen.

Die damals abgeleiteten Formeln haben seither beim Projektieren von Bahnen mit nicht allzugrossen Maximalgeschwindigkeiten gute Dienste geleistet und den Wunsch nach einer Vervollständigung für Bahnen mit beliebigen Maximalgeschwindigkeiten aufkommen lassen, d. h. für Bahnen, bei denen also das quadratische Glied $r_2 v^2$ im Ausdruck für den Traktionswiderstand berücksichtigt werden muss und die man als „Vollbahnen" bezeichnet.

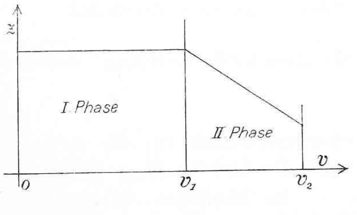
Nachstehend gelangen nun die bezüglichen Rechnungen zur Veröffentlichung; in denselben sind die charakteristischen Grössen nicht mehr im Anschluss an eine in der Form:

$$v = \psi\ (t)$$

gegebene Anfahrgeschwindigkeitskurve, sondern jeweilen auf die möglichst einfachste Art und Weise entwickelt.

Als Typ des Traktionsmotors wurde der Seriemotor mit Anlasswiderstand vorausgesetzt, der einerseits den praktisch wichtigsten Fall darstellt und anderseits die in der frühern Studie ebenfalls behandelten Typen des Seriemotors ohne Anlasswiderstand und des Drehstrommotors mit schaltbarem Rotorwiderstand als spezielle Fälle enthält.

Das untenstehende Diagramm stellt die Zugkraft des genannten Traktionsmotortyps als Funktion der Geschwindigkeit dar und lässt deutlich zwei verschiedene Phasen erkennen, von denen die erste durch Konstanz der Zugkraft und die zweite durch die als Funktion der Geschwindigkeit linear abnehmende Zugkraft gekennzeichnet ist.




In der ersten Phase, wo die konstante Zugkraft $z$ den Wert $C_0$ haben möge, gilt dann die folgende Bewegungsgleichung:

$$z = C_0 = r_1 + r_2 v^2 + \frac{1}{g} \frac{dv}{dt}$$

wenn $g = 9{,}81$ die Beschleunigung des freien Falls darstellt. Aus obiger Bewegungsgleichung folgt allgemein die Beschleunigung

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = g\ (C_0 - r_1 - r_2 v^2),$$

welche für die besondern Geschwindigkeitswerte $v = 0$ und $v = v_1$ zu Anfang und zu Ende der ersten Phase, die besondere Werte $\gamma_0$ und $\gamma_1$ hat:

$$v = 0, \qquad \gamma_0 = g\,(C_0 - r_1)$$
$$v = v_1, \qquad \gamma_1 = g\,(C_0 - r_1 - r_2 v_1^2).$$

Die Anfahrzeit ergibt sich zu:

$$dt = \frac{1}{g} \frac{dv}{(C_0 - r_1) - r_2 v^2}$$

$$t = \frac{1}{2gM} lg \frac{M + r_2 v}{M - r_2 v},$$

$$\text{wo: } M = \sqrt{(C_0 - r_1)\, r_2}.$$

Seien 0 und $t_1$ die Zeitpunkte für die Geschwindigkeitswerte $v = 0$ und $v = v_1$ und sei $T_1$ der zwischen den Zeitpunkten 0 und $t_1$ liegende Zeitabschnitt, dann ist:

$$T_1 = \Big[ t \Big]_0^{t_1} = \frac{1}{2gM} \left[ lg \frac{M + r_2 v}{M - r_2 v} \right]_0^{v_1}$$

$$T_1 = \frac{1}{2gM} lg \frac{M + r_2 v_1}{M - r_2 v_1}.$$

Den Anfahrweg $S_1$ in der ersten Phase erhält man zu:

$$S = \int_0^{S_1} ds = \int_0^{t_1} v dt = \frac{1}{g} \int_0^{v_1} \frac{v\, dv}{C_0 - r_1 - r_2 v^2} = \frac{1}{2\, g r_2} lg \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right)$$

Ferner folgt die Arbeit $A_1$ während der ersten Phase zu:

$$A_1 = \int_0^{S_1} z\, ds = C_0 \int_0^{S_1} ds = C_0 \cdot S_1 = \frac{C_0}{2\, g r_2} lg \left( \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right)$$

Damit sind für die erste Phase die charakteristischen Grössen bereits abgeleitet.

In der zweiten Phase stellen wir die Zugkraft $z$ als Funktion der Geschwindigkeit dar durch die mechanische Charakteristik des Traktionsmotors:

$$z = a - b \cdot v,$$

$a$ und $b$ sind die charakteristischen Motorkonstanten. Es folgt

$$a - bv = r_1 + r_2 v^2 + \frac{1}{g} \frac{dv}{dt}$$

Ist $\gamma = \frac{dv}{dt}$ allgemein in die Beschleunigung während der zweiten Phase, dann hat dieselbe für die Geschwindigkeitswerte $v = v_1$ und $v = v_2$ zu Anfang und zu Ende der zweiten Phase die besondern Werte:

$$\gamma_1 = g\ (a - r_1 - b \cdot v_1 - r_2\ v_1^2)$$
$$\gamma_2 = g\ (a - r_1 - b \cdot v_2 - r_2 \cdot v_2^2).$$

Die Anfahrzeit folgt aus:

$$dt = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{(a - r_1) - bv - r_2 v^2}$$

$$t = \frac{1}{2gN} lg \frac{N + \frac{b}{2} + r_2 v}{N - \frac{b}{2} - r_2 v},$$

$$\text{wo: } N = \sqrt{\frac{b^2}{4} + r_2\ (a - r_1)}.$$

Seien $t_1$ und $t_2$ die Zeitpunkte zu Anfang und zu Ende der zweiten Phase entsprechend den Geschwindigkeitswerten $v_1$ und $v_2$ und sei $T_2$ die Zeitdauer der zweiten Phase, dann ist:

$$T_2 = \Big[ t \Big]_{t_1}^{t_2} = t_2 - t_1 = \frac{1}{2gN} lg \frac{\left(N + \frac{b}{2} + r_2 v_2\right)\left(N - \frac{b}{2} - r_2 v_1\right)}{\left(N + \frac{b}{2} + r_2 v_1\right)\left(N - \frac{b}{2} - r_2 v_2\right)}$$

[1]) Siehe Schweiz. Bauzeitung, Bd. XLIV, Nr. 2 und 3.

Für $T_2 = \infty$ resultiert der Maximalwert von $v_2$, der zugleich der überhaupt grösste Geschwindigkeitswert während der gesamten Anfahrperiode ist und daher als $v_{max}$ bezeichnet werden möge.

Aus obiger Gleichung von $T_2$ folgt:

$$v_2 = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{L \cdot e^{2gNT_2}\left(N - \frac{b}{2}\right) - \left(N + \frac{b}{2}\right)}{1 + L \cdot e^{2gNT_2}}$$

$$= \frac{1}{r_2} \cdot \left\{ \frac{N - \frac{b}{2}}{1 + \frac{1}{L \cdot e^{2gNT_2}}} - \frac{N + \frac{b}{2}}{1 + L \cdot e^{2gNT_2}} \right\},$$

$$\text{wo: } L = \frac{N + \frac{b}{2} + r_2 v_1}{N - \frac{b}{2} - r_2 v_1}$$

$$T_2 = \infty, \quad v_2 = v_{max} = \frac{N - \frac{b}{2}}{r_2}$$

$$= \frac{\left(N - \frac{b}{2}\right)\left(N + \frac{b}{2}\right)}{r_2 \left(N + \frac{b}{2}\right)} = \frac{a - r_1}{N + \frac{b}{2}}$$

Die Schreibweise:

$$v_{max} = \frac{a - r_1}{N + \frac{b}{2}}$$

erlaubt uns den Wert von $v_{max}$ für $r_2 = 0$ zu schreiben, der zu: $v_{max} = \frac{a - r_1}{b}$ folgt und als solcher in der weiter oben erwähnten frühern Abhandlung abgeleitet wurde.

Mit Hülfe der eingeführten Geschwindigkeit $v_{max}$ kann der Ausdruck von $T_2$ umgeformt werden.

Es ist nämlich:

$$\left(N + \frac{b}{2}\right) = \frac{a - r_1}{v_{max}}; \quad \left(N - \frac{b}{2}\right) = r_2 \, v_{max}$$

$$\left(N + \frac{b}{2}\right)\left(N - \frac{b}{2}\right) = (a - r_1)\, r_2$$

$$N = \frac{b}{2} + r_2 \, v_{max}.$$

$$\text{Also: } lg \frac{\left(N + \frac{b}{2} + r_2 v_2\right)\left(N - \frac{b}{2} - r_2 v_1\right)}{\left(N + \frac{b}{2} + r_2 v_1\right)\left(N - \frac{b}{2} - r_2 v_2\right)} =$$

$$= lg \frac{\left(N + \frac{b}{2}\right)\left(N - \frac{b}{2}\right) + r_2 v_2 \left(N - \frac{b}{2}\right) - \left(N + \frac{b}{2}\right) r_2 v_1 - r_2 v_2 r_2 v_1}{\left(N + \frac{b}{2}\right)\left(N - \frac{b}{2}\right) + r_2 v_1 \left(N - \frac{b}{2}\right) - \left(N + \frac{b}{2}\right) r_2 v_2 - r_2 v_2 r_2 v_1}$$

$$= lg \frac{(a - r_1)\left(1 - \frac{v_1}{v_{max}}\right) + r_2 v_2 (v_{max} - v_1)}{(a - r_1)\left(1 - \frac{v_2}{v_{max}}\right) + r_2 v_1 (v_{max} - v_2)}$$

$$T_2 = \frac{1}{2g\left(\frac{b}{2} + r_2 v_{max}\right)} \, lg \frac{(a - r_1)\left(1 - \frac{v_1}{v_{max}}\right) + r_2 v_2 (v_{max} - v_1)}{(a - r_1)\left(1 - \frac{v_2}{v_{max}}\right) + r_2 v_1 (v_{max} - v_2)}$$

Der während der zweiten Phase zurückgelegte Weg folgt zu

$$s_2 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \frac{1}{g} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v\,dv}{(a - r_1) - bv - r_2 v^2}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2 r_2 g} \, lg\,(a - r_1 - bv - r_2 v^2) - \frac{b}{4 r_2 N g} \, lg \frac{N + \frac{b}{2} + r_2 v_2}{N - \frac{b}{2} - r_2 v_2} \right|_{v_1}^{v_2}$$

$$= \frac{1}{2 r_2} \left\{ \frac{1}{g} \, lg \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - b \cdot T_2 \right\}$$

Die während der zweiten Phase aufgewendete Arbeit $A_2$ ergibt sich zu

$$A_2 = \int_{s_1}^{s_2} z\,ds = \frac{1}{g} \int_{v_1}^{v_2} \frac{(a - bv)\, v\, dv}{(a - r_1) - bv - r_2 v^2}$$

$$A_2 = \frac{1}{g} \int_{v_1}^{v_2} \left\{ \frac{b}{r_2} + \frac{\left(a + \frac{b^2}{r_2}\right) v - \frac{a - r_1}{r_2} \cdot b}{(a - r_1) - bv - r_2 v^2} \right\} dv$$

$$= \left(a + \frac{b^2}{r_2}\right) \cdot S_2 + \frac{b}{r_2} \left[ \frac{v_2 - v_1}{g} - (a - r_1)\, T_2 \right]$$

In die zweite Phase fällt der Maximalwert der momentanen Leistung, der sich zu

$$E_{max} = \frac{a^2}{4b}$$

ergibt und für den Geschwindigkeitswert

$$(v)_{E_{max}} = \frac{a}{2b}$$

eintritt.

Für beide Phasen zusammen lassen sich die Integrationswerte:

$$S = S_1 + S_2, \quad T = T_1 + T_2, \quad A = A_1 + A_2,$$

sowie die Mittelwerte:

$$v_{mittel} = \frac{S_1 + S_2}{T_1 + T_2}, \quad z_{mittel} = \frac{A_1 + A_2}{S_1 + S_2}, \quad E_{mittel} = \frac{A_1 + A_2}{T_1 + T_2}$$

ausdrücken.

Die Motorkonstanten $a$ und $b$ bestimmen sich mit Hülfe der Beziehungen für die zweite Phase und zwar wie folgt. Es war:

$$N = \frac{b}{2} + r_2 \cdot v_{max}$$

Diesen Wert setzt man ein in

$$v_{max} = \frac{a - r_1}{N + \frac{b}{2}},$$

Woraus folgt:

$$a = r_1 + r_2 \, v^2_{max} + b \, v_{max}.$$

Definiert man

$$r_{max} = r_1 + r_2 \, v^2_{max}$$

so folgt: $$v_{max} = \frac{a - r_{max}}{b}$$

und: $$a = r_{max} + b \cdot v_{max}.$$

In die Gleichung:

$$\gamma_1 = g\,(a - r_1 - b v_1 - r_2 v_1^2)$$

setzt man ein:

$$a - r_1 = b \, v_{max} + r_2 \, v^2_{max}$$

und bekommt:

$$b = \frac{\frac{\gamma_1}{g} - r_2 (v^2_{max} - v_1^2)}{v_{max} - v_1},$$

$$a = r_{max} + \frac{v_{max}}{v_{max} - v_1} \left[ \frac{\gamma_1}{g} - r_2 \, (v^2_{max} - v_1^2) \right]$$

Sind nun in einem praktischen Falle gegeben $r_1$, $r_2$, $v_{max}$ und $E_{max}$, so folgen damit $a$ und $b$ aus:

$$\left| \begin{array}{l} a = r_{max} + b \cdot v_{max} \\ \frac{a^2}{4b} = E_{max} \end{array} \right.$$

woraus:

$$b = \frac{2 E_{max} - r_{max} v_{max} \pm \sqrt{E^2_{max} - r_{max} v_{max} E_{max}}}{v^2_{max}},$$

$$a = r_{max} + b \cdot v_{max}.$$

Diejenigen Werte von $a$ und $b$ sind richtig, für welche

$$(v)_{E_{max}} = \frac{a}{2b} \leq v_{max}.$$

Die als gegeben zu betrachtende charakteristische Grösse $E_{max}$, welche die Ueberlastbarkeit des oder der Traktionsmotoren eines gegebenen Zuges darstellen, können nun in eine bestimmte Beziehung zur nominellen Leistung des oder der Traktionsmotoren gebracht werden, indem man den Ausdruck

$$r_{max} \cdot v_{max}$$

als „nominelle Leistung" definiert. Dann ist der Koeffizient:

$$K_1 = \frac{E_{max}}{r_{max} \, v_{max}}$$

charakteristisch für die zweite Phase der Anfahrt, in welcher die Grösse $E_{max}$ auftritt.

In ähnlicher Weise kann für die erste Phase der Anfahrt ein charakteristischer Koeffizient der Ueberlastbarkeit gewonnen werden, welcher die maximale Zugkraft $C_0$, die in dieser Phase auftritt, in Beziehung bringt zu der als „nominelle" Zugkraft zu betrachtenden Zugkraft $r_{max}$ und den man schreibt:

$$K_2 = \frac{C_0}{r_{max}} = \frac{z_{max}}{r_{max}}$$

Da in den beiden Definitionsgleichungen die Grösse $r_{max}$ auftritt, so können diese Gleichungen in eine einzige vereinigt werden, welche lautet:

$$K = \frac{K_1}{K_2} = \frac{E_{max}}{v_{max} \cdot z_{max}}.$$

Durch die Annahme von $z_{max}$ oder des charakteristischen Koeffizienten $K_1$ werden die Grössen $\gamma_0$ und $\gamma_1$ sowie $v_1$ festgelegt und zwar mittels der Beziehungen:

$$\gamma_1 = g\ (C_0 - r_1 - r_2\ v_1{}^2)$$

und

$$b = \frac{\frac{\gamma_1}{g} - r_2\ (v^2{}_{max} - v_1{}^2)}{v_{max} - v_1},$$

woraus sich bilden lässt:

$$v_1 = v_{max} - \frac{C_0 - r_{max}}{b};$$

schreibt man noch:

$$\gamma_0 = g\ (C_0 - r_1)$$
$$\gamma_1 = \gamma_0 - g \cdot r_2 \cdot v_1{}^2$$

so sind damit alle charakteristischen Grössen der ersten Phase aufgestellt.

Der Anschaulichkeit wegen sollen nun an einem konkreten Zahlenbeispiele die Anfahrlinien studiert werden.

Es seien gegeben die Werte:

$$r_1 \quad = 2{,}3 \times 10^{-3}\ \frac{kg \text{ Widerstandskraft}}{kg \text{ bewegtes Gewicht}}$$

$$r_2 \quad = 1{,}3 \times 10^{-5}\ \frac{kg \text{ Widerstandskraft}}{kg \text{ bewegtes Gewicht}} \times (sek/m)^2$$

$$v_{max} = 27{,}5\ m/sek$$
$$K_1 \quad = \backsim 1{,}5$$
$$K_2 \quad = \backsim 3{,}4.$$

Für die Werte $K_1$ und $K_2$ wurden statt der approximativen Werte 1,5 und 3,4 die exakten Werte:

$$K_1 = 1{,}4988 \quad \text{und} \quad K_2 = 3{,}3717$$

benutzt, um zu einfachen Werten von $E_{max}$ und von $v_1$ zu gelangen.

Mittels der angeschriebenen Gleichungen ergeben sich für die beiden Phasen die charakteristischen Grössen, wie folgt, und zwar für die zweite Phase:

$$r_{max} = 12{,}131 \times 10^{-3}$$
$$r_{max} \cdot v_{max} = 0{,}3336$$
$$E_{max} = 0{,}5000$$
$$a = 57{,}34 \times 10^{-3} \qquad ; \qquad b = 1{,}644 \times 10^{-3}$$
$$(v)_{E_{max}} = 17{,}44\ m/sek$$

und für die erste Phase:

$$C_0 = 0{,}04090$$
$$v_1 = 10{,}00\ m/sek$$
$$\gamma_0 = 0{,}3787\ m/sek/sek; \quad \gamma_1 = 0{,}3659\ m/sek/sek.$$

Die abgeleiteten Grössen der ersten Phase sind dann:

$$E_1 = 0{,}4090\ sekmkg/kg$$
$$T_1 = 26{,}71\ sek$$
$$S_1 = 134{,}3\ m$$
$$A_1 = 5{,}493\ mkg/kg$$

und diejenigen der zweiten Phase mit $v_2 = 18{,}0\ m/sek$

$$\gamma_2 = 0{,}2084\ m/sek/sek$$
$$E_2 = 0{,}4995\ sekmkg/kg$$
$$T_2 = 28{,}45\ sek$$
$$S_2 = 408{,}9\ m$$
$$A^2 = 13{,}52\ mkg\ kg.$$

Für beide Phasen zusammen ergeben sich die Totalwerte:

$$T = 55{,}16\ sek$$
$$S = 543{,}2\ m$$
$$A = 19{,}01\ mkg/kg$$

und die Mittelwerte:

$$v_{mittel} = \frac{S}{T} = 9{,}847\ m/sek$$

$$z_{mittel} = \frac{A}{S} = 0{,}3499\ kg/kg$$

$$E_{mittel} = \frac{A}{T} = 0{,}3446\ sekmkg/kg.$$

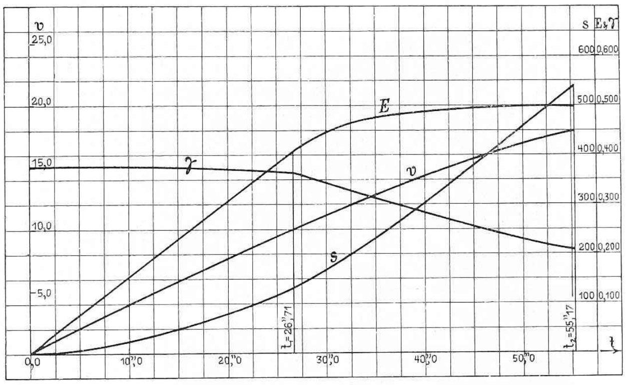
Auffallen wird an diesem Beispiel sofort die grosse Differenz zwischen dem theoretischen:

$$v_{max} = 27{,}5\ m/sek$$

und dem als praktischen Anfahrgeschwindigkeitsendwert angenommenen

$$v_2 = 18{,}0\ m/sek.$$

Dass das im allgemeinen durch die Praxis vorgeschriebene $v_2$ ein so grosses theoretisches $v_{max}$ erfordert, ist wesentlich eine Folge des Einflusses des Gliedes $r_2$ im Ausdruck für den Traktionswiderstand, wobei die Bedingung nicht allzu grosser Anfahrwege und Anfahrzeiten vorausgesetzt ist. Für die gleiche Bedingung rücken $v_2$ und $v_{max}$ sofort nahe zusammen, wenn mit so grossen Werten $r_1$ gerechnet wird, dass daneben auch bei der Endgeschwindigkeit $v_2$ die Grösse $r_2 \cdot v_2{}^2$ bedeutungslos wird; dies ist der Fall bei starken Steigungen.




Vorstehende Abbildung stellt die Anfahrlinien $v$, $\gamma$, $s$ und $E$ als Funktionen der Anfahrzeiten $t$ dar und bezieht sich auf das vorliegende Zahlenbeispiel.

Zum Schlusse mögen nun noch die in Pferdestärken umgerechneten Leistungen eines Zuges von 200 $t$ Gewicht vergleichsweise gegeben werden; dabei ist für die Umrechnungen der Faktor $\frac{200\,000}{75}$ zu benutzen und es ergeben sich:

$$\left.\begin{array}{ll} E_1 & = 1090\ P.S. \\ E_2 & = 1332\ P.S. \\ E_{mittel} & = \ \ 919\ P.S. \\ E_{max} & = 1333\ P.S. \end{array}\right\} \text{Anfahrt auf der Horizontalen.}$$

Ausserhalb der Anfahrperiode liegen die Werte

$$R_{max}\ v_{max} = 890\ P.S. = \text{nominelle Leistung},$$
$$(E)_{v=18} = 313\ P.S. = \text{dauernde Leistung auf der Horizontalen.}$$

Das vorliegende Zahlenbeispiel könnte nun noch dazu benutzt werden, um nachzurechnen, für welche Steigungen bei entsprechend gewählten Endgeschwindigkeiten die Motorkurve: $z = a - b \cdot v$ unverändert anzuwenden wäre, indem bloss für $C_0$ andere Annahmen zu machen wären; von $C_0$ ist aber bloss der Anlasswiderstand abhängig, insofern als $C_0 < a$ ist, welche Bedingung eine notwendige ist.

Ist von vornherein die Aufgabe gestellt, Traktionsmotoren zu entwerfen, die für verschiedene Steigungen bestimmte Endgeschwindigkeiten zulassen, dann wird man zunächst untersuchen, ob dieser Bedingung durch eine einzige Motorkurve:

$$z = a - b \cdot v$$

entsprochen werden kann. Wenn das nicht der Fall ist, so wird man die Motorkurve aus den Bedingungen für die grösste Steigung ableiten und für die kleinern Steigungen und die Horizontale abgeänderte Motorkurven:

$$z = a' - b' \cdot v$$

benutzen, welche in der technischen Ausführung bei Seriemotoren aus der Haupt-Motorkurve durch das Hülfsmittel der „Shuntung" der Feldwicklung erzeugt werden.

Auf diese und ähnliche Berechnungen näher einzutreten, ist überflüssig, da sie prinzipiell nichts neues bieten.