Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 41/42 (1903)

Heft: 25

Artikel: Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen

Autor: Prášil, Franz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24002

Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen.

Von Prof. Dr. *F. Prášil* in Zürich.

(Fortsetzung)

Die bisher betrachteten Bewegungsformen einfacher Strömungen wurden unter der Annahme der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials also für $\lambda = 0$ entwickelt.

Es soll nun im folgenden noch eine Untersuchung allgemeiner Natur für solche Strömungen durchgeführt werden für die Fälle, in welchen ein Geschwindigkeitspotential nicht existiert; die Flüssigkeit sei hiebei wieder als reibungslos vorausgesetzt.

In diesem Fall wird $2\lambda = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}$, also λ allgemein eine Funktion von r und z sein.

Die Eigenschaften dieser Funktion λ ergeben sich aus folgenden Ableitungen:

Differentiert man die Gleichung A_1 (siehe Seite 233) partiell nach r, die Gleichung B_1 partiell nach z, subtrahiert und berücksichtigt, dass $\frac{\partial^2 p}{\partial z\,\partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial r\,\partial z}$ ist, so folgt:

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial z}\right) + \frac{\partial w}{\partial r}\,\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$+ \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

oder

$$w\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Gleichung D_1 ergibt:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r}$$

Man erhält also

$$w\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z} + v\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{v}{r}\,\lambda = 0 \text{ oder}$$

$$w\cdot\frac{\partial\frac{\lambda}{r}}{\partial z} + v\cdot\frac{\partial\frac{\lambda}{r}}{\partial r} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (a$$

die Kontinuitätsgleichung D_1 kann auch geschrieben werden

$$\frac{\partial rw}{\partial z} + \frac{\partial rv}{\partial r} = 0$$

und es folgt daraus analog, wie auf Seite 235, dass

$$rw = \frac{\partial S}{\partial r};\; -rv = \frac{\partial S}{\partial z} \;\ldots\ldots\ldots (b$$

gesetzt werden kann, wobei S eine Funktion von r und z und zwar wieder die Stromlinienfunktion ist.

Aus den beiden Gleichungen b folgt durch partielle Differenziation

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial S}{\partial r};\quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

und mithin wegen $\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\lambda$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} = 2r\lambda \;\ldots\ldots (c$$

Bestimmt man w und v aus den Gleichungen b und setzt deren Werte in Gleichung a ein, so folgt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\cdot\frac{\partial\frac{\lambda}{r}}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial z}\cdot\frac{\partial\frac{\lambda}{r}}{\partial r} = 0 \;\ldots (a_1$$

und man sieht, dass durch

$$\frac{\lambda}{r} = mS + n$$

mit m und n als Konstanten die Gleichung a_1 und damit auch die Gleichung a erfüllt wird, denn es ergibt sich die Identität

$$\frac{m}{r}\,\frac{\partial S}{\partial r}\cdot\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{m}{r}\,\frac{\partial S}{\partial z}\cdot\frac{\partial S}{\partial r} = 0.$$

Mithin ist

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} = 2\,(mr^2 S + nr^2) \;\ldots (d$$

die allgemeine Differenzialgleichung der Stromlinienfunktionen für einfache Strömungen einer reibungslosen Flüssigkeit in festen Rotationshohlräumen.

Mit $m = 0$ und $n = 0$ geht diese Differentialgleichung in diejenige über, welche bei Existenz eines Geschwindigkeitspotentials entwickelt wurde.

Bekanntlich hat bereits Lagrange den praktisch wichtigen Satz entwickelt, dass bei Flüssigkeitsbewegungen, die lediglich unter dem Einfluss von Kräften erfolgen, für welche eine Kräftefunktion existiert, ein Flüssigkeitselement, welches einmal nicht rotiert (entsprechend $\lambda = 0$; $\mu = 0$; $\nu = 0$) niemals in Rotation kommt. (Siehe Grashof theoretische Maschinenlehre I. Band, Seite 392).

Ferner hat Helmholtz in seiner Theorie der Wirbelbewegungen folgende Sätze entwickelt:

Eine Wirbellinie wird beständig von denselben materiellen Punkten gebildet.

Das Produkt aus dem Querschnitt und der Rotationsgeschwindigkeit eines Wirbelfadens bleibt an jeder Stelle unverändert.

(Siehe hierüber ebenfalls Grashof theoretische Maschinenlehre I. Band, Seite 394 u. f.)

Die Gleichung

$$w\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} + v\,\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{v}{r}\,\lambda = 0,\ \text{Gleichung } a$$

und $\frac{\lambda}{r} = mS + n$ entsprechen, wie aus folgendem ersichtlich ist, diesen Sätzen:

Schreibt man nämlich die erste dieser Gleichungen

$$w\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} + v\,\frac{\partial\lambda}{\partial r} = \frac{v}{r}\,\lambda$$

und setzt auf der linken Seite

$$w = \frac{dz}{dt};\quad v = \frac{dr}{dt}$$

so folgt

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}\,\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{v}{r}\,\lambda$$

oder

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{v}{r}\,\lambda$$

d. h. die zeitliche Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit irgend eines Elementes erfolgt linear nach der Rotationsgeschwindigkeit selbst; ist dieselbe einmal gleich Null, so ist sie jederzeit gleich Null.

Die Gleichung a gibt mit $w = \frac{dz}{dt}$ und $v = \frac{dr}{dt}$

$$\frac{d\frac{\lambda}{r}}{dt} = 0;$$

d. h. die zeitliche Aenderung von $\frac{\lambda}{r}$ irgend eines Flüssigkeitselementes ist gleich Null oder bei fortschreitender Bewegung des Elementes bleibt für dasselbe $\frac{\lambda}{r}$ konstant; nun ist S für eine Stromlinie, also für die Bahn eines Elementes konstant und daher die Gleichung $\frac{d\frac{\lambda}{r}}{dt} = 0$ durch die Gleichung $\frac{\lambda}{r} = mS + n$ erfüllt; da nun sämtliche Punkte eines Parallelkreises gleiche Bewegungszustände haben und die Parallelkreise gleichzeitig bei Existenz einer Rotationsgeschwindigkeit λ die Wirbellinien darstellen, so folgt aus obigen, dass jede dieser Linien immer von denselben materiellen Punkten gebildet wird.

Nach der entsprechenden Definition von Helmholtz nennt man einen fadenförmigen Raum von unendlich kleinem Querschnitt, den man erhält, wenn man durch sämtliche Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche die betreffenden Wirbellinien zieht, einen Wirbelfaden; derselbe besteht nach obigen immer aus denselben Flüssigkeitselementen und bildet im vorliegenden Fall einen Ring; bezeichnet man mit Ω den unendlich kleinen Querschnitt des Fadens und mit r den mittleren Radius desselben, so folgt, dass $2\,r\,\pi\,\Omega =$ konst. sein muss; nun ist aber nach dem früheren $\frac{\varphi}{r} = \frac{2\lambda}{r}$ für jedes auf der Bahn $S =$ konst. fortschreitende Element konstant, es folgt daher $\lambda\,\Omega =$ konst. entsprechend dem erwähnten Satz von Helmholtz.

Die Gleichungen a, b, c, d können somit die Grundlage für die Untersuchung allgemeiner einfacher Strömungen in festen Rotationshohlräumen bilden.

III. Einfache Strömungen mit kreisender Bewegung.

Als einfache Strömungen mit kreisender Bewegung seien solche Strömungen bezeichnet, für welche eine Geschwindigkeitskomponente u vorhanden ist, wobei aber einerseits wieder sämtliche Punkte eines Parallelkreises gleichen Bewegungs- und Pressungszustand besitzen, und andererseits $\omega = 0$ ist, die Bewegung also lediglich durch ein festes Rohr erfolgt.

Die Untersuchung beschränkt sich auch in dem Fall auf den Beharrungszustand.

Solche Bewegungen sind daher charakterisiert durch:

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Die Fundamentalgleichungen erhalten die Formen:

$$-g - g\frac{\partial p}{\partial z} = w\frac{\partial w}{\partial z} + v\frac{\partial w}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots (A$$

$$\frac{u^2}{r} - g\frac{\partial p}{\partial z} = w\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots (B$$

$$-\frac{uv}{r} = w\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots (C$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (D$$

Da die Gleichung D von u unabhängig ist, ist zu erkennen, dass die Kontinuitätsbedingung in diesem Fall durch die kreisende Bewegung nicht beeinflusst wird.

Eine solche Strömung ist wirbelfrei, wenn

$$2\lambda = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad 2\mu = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$2\nu = -\frac{1}{r}\frac{\partial ur}{\partial r} = 0 \quad \text{sind,}$$

daraus folgt, dass im ganzen Raum $ur =$ konst. sein muss.

Multipliziert man Gleichung A mit dz, B mit dr, berücksichtigt, dass für $\lambda = 0$ $\frac{\partial w}{r} = \frac{\partial v}{\partial z}$ ist, addiert und integriert, so folgt

$$\frac{p - p_0}{\gamma} + (z - z_0) + \frac{w^2 - w_0^2}{2g} + \frac{v^2 - v_0^2}{2g} + \frac{u^2 - u_0^2}{2g} = 0$$

oder da $w^2 + v^2 + u^2 = c^2$; $w_0^2 + v_0^2 + u_0^2 = c_0^2$ sind

$$\frac{p - p_0}{\gamma} + (z - z_0) + \frac{c^2 - c_0^2}{2g}.$$

Eine kontinuierliche Bewegung dieser Art ist nur möglich, wenn es auch eine innere Begrenzung gibt, in der die Stromlinien S_i (Abb. 13) verlaufen, da sonst bei endlichem Wert der Konstanten des Produktes ur in der Nähe der Raumachse u unendliche grosse Werte annehmen, die Pressung p hienach negativ werden müsste, was physikalisch unmöglich ist.

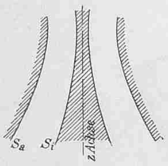


Abb. 13.

Fehlt diese Begrenzung, so wird bei genügendem Luftzutritt Trichterbildung oder sonst diskontinuierliche Bewegung, eventuell unter gleichzeitiger Luftentwickelung eintreten.

Dient das Rohr wieder als Saugrohr einer Turbine, so kann durch entsprechende Formgebung der Welle dieser Bedingung entsprochen werden.

Die bekannte Regel für Turbinen, wonach die absolute Austrittsgeschwindigkeit aus dem Laufrad senkrecht zur Umfangsgeschwindigkeit am Austrittspunkt gerichtet sein soll, findet hiedurch bei Anwendung eines Saugrohres eine weitere Begründung.

Differenziert man Gleichung A partiell nach r, Gleichung B nach z, subtrahiert und berücksichtigt,

$$\text{dass } \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} \text{ und } \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\lambda \text{ ist,}$$

so folgt in ähnlicher Weise wie auf Seite 282

$$w \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} + v\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{v}{r}\lambda - \frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

oder

$$w\frac{\partial \frac{\lambda}{r}}{\partial z} + v\frac{\partial \frac{\lambda}{r}}{\partial r} = \frac{u}{r^2}\frac{\partial u}{\partial z} \quad \ldots\ldots (a$$

Die Kontinuitätsgleichung D ist von u unabhängig und kann daher ebenso wie auf Seite 282

$$rw = \frac{\partial S}{\partial r}; \quad -rv = \frac{\partial S}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b$$

gesetzt werden, wobei S eine Funktion von r und z, aber nicht mehr die Stromlinienfunktion ist, sondern die Meridianlinien derjenigen Rotationsflächen bestimmt, in welchen die Stromlinien verlaufen; diese Rotationsflächen seien im folgenden als Stromflächen bezeichnet.

Die Gleichung C kann umgeformt werden in

$$w\frac{\partial ur}{\partial z} + v\frac{\partial ur}{\partial r} = 0.$$

und man ersieht, dass mit $\frac{\partial ur}{\partial z} = 0$, also $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ auch $ur =$ konstant ist, sofern der numerische Wert von $v > 0$ ist.

Setzt man die Werte von w und v aus Gleichung b in Gleichung a ein, so folgt im Falle $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} \cdot \frac{\partial \frac{\lambda}{r}}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial z} \cdot \frac{\partial \frac{\lambda}{r}}{\partial r} = 0,$$

welche Gleichung erfüllt wird mit $\frac{\lambda}{r} = mS + n$, wobei m und n Konstante sind, d. h.:

In einem festen Rohr, in welchem eine wirbelfreie oder wirbelbehaftete einfache Strömung im Sinne der Erörterungen des vorigen Abschnittes bestehen kann, ist auch eine kreisende Bewegung ohne Veränderung der Stromflächen möglich, sofern $ur =$ konstant für den ganzen Raum ist.

Setzt man in der umformten Gleichung C die Werte von w und v aus Gleichung b ein, so folgt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} \cdot \frac{\partial ur}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial z} \cdot \frac{\partial ur}{\partial r} = 0,$$

welche Gleichung durch $ur = \eta S + \delta$ .... (c

erfüllt wird, wobei η und δ Konstante sind.

Hieraus folgt, dass im Falle als $\frac{\partial ru}{\partial z}$ und damit $\frac{\partial u}{\partial z}$ nicht gleich Null ist, das Produkt ur doch für sämtliche Punkte einer Stromfläche konstant ist, da für eine solche $S =$ konstant ist. Aus Gleichung c folgt

$\frac{u}{r^2}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\eta S + \delta}{r^3} \cdot \frac{\eta}{r} \cdot \frac{\partial S}{\partial z}$ und man erhält hieraus, sowie mit den Werten von w und v aus Gleichung b mit Rücksicht auf Gleichung a

$$\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial \frac{\lambda}{r}}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z}\left(\frac{\partial \frac{\lambda}{r}}{\partial r} + \frac{\eta S + \delta}{r^3} \cdot \eta\right) = 0 \quad . . (d$$

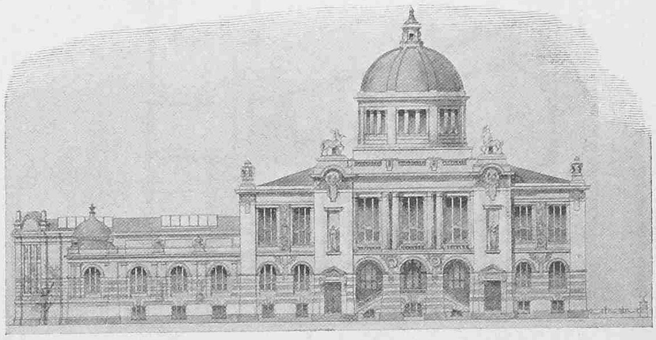
$$\text{ferner, weil } \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} = 2r\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e$$

Aus den Gleichungen d und e lässt sich λ eliminieren, und man erhält eine Differentialgleichung für S, als allgemeine Gleichung für die Bestimmung der Meridianlinien der Stromflächen, die im Verein mit b und c die Grössen w, v und u, die Gleichungen der Stromlinien und mit Hilfe der Fundamentalgleichung A, B, C die Pressungen bestimmen lässt. (Schluss folgt.)

Wettbewerb für ein neues Kunsthaus in Zürich.

III. Preis. Motto: «Frühlingszeit.» — Verf.: Arch. *J. Kunkler* in Zürich.



Fassade am Heimplatz. — Masstab 1 : 800.