

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 41/42 (1903)  
**Heft:** 22

**Artikel:** Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen  
**Autor:** Prášil, Franz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23996>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

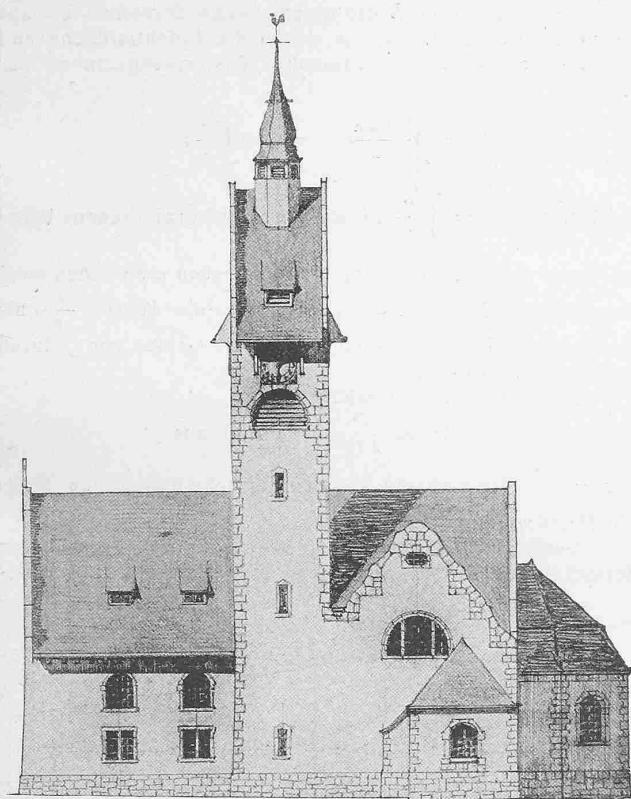
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

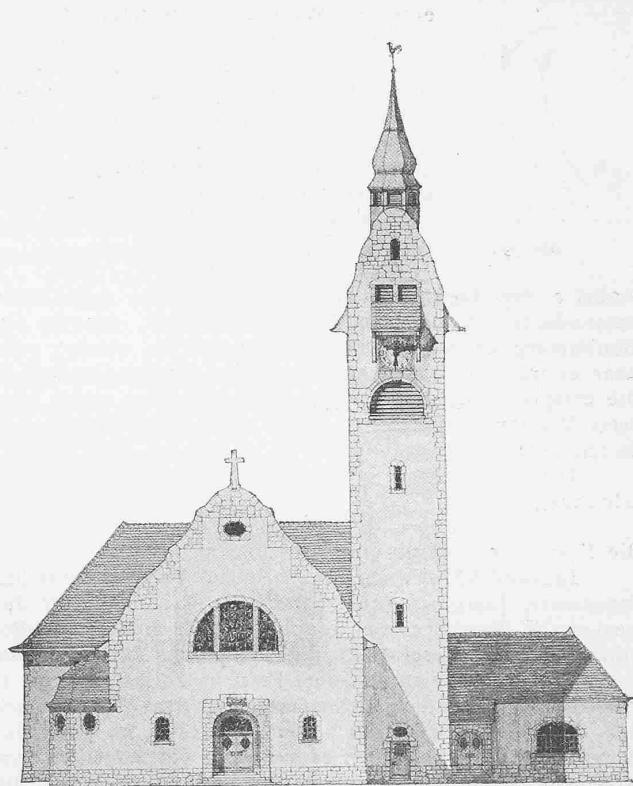
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Wettbewerb für eine evangelische Kirche in Bruggen.

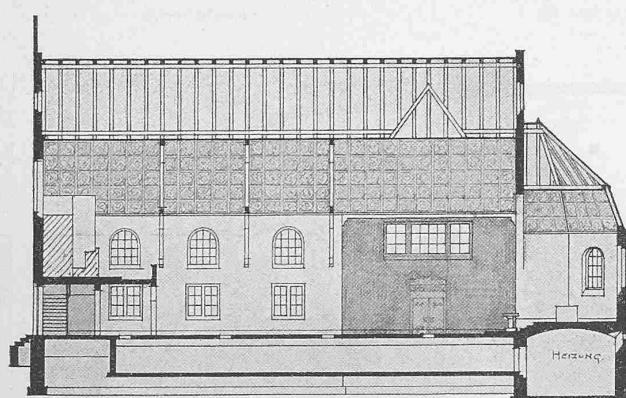
Ehrenmeldung. — Entwurf Nr. 63. Motto: «Kreuz»

Verfasser: *E. Heman*, Architekt in Basel.

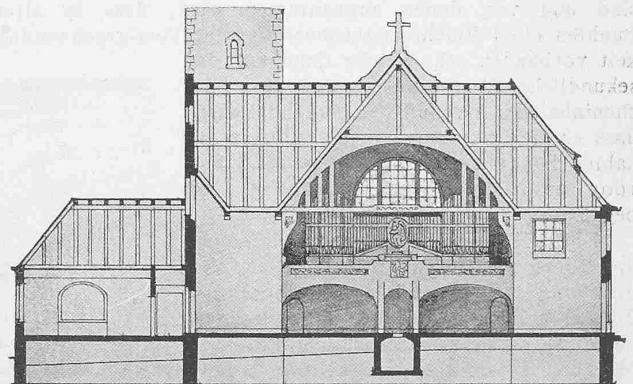
Seitenfassade. — Masstab 1:400.



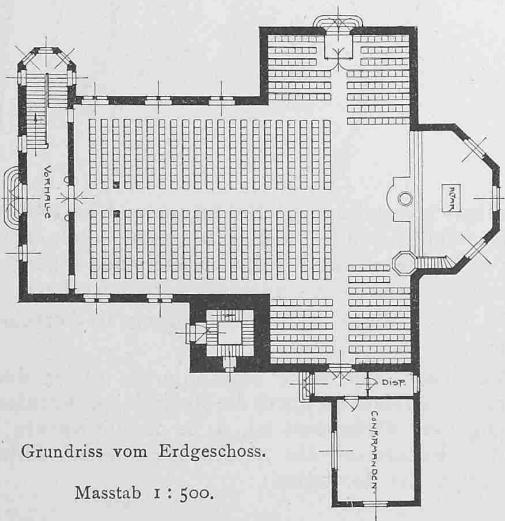
Vorderfassade. — Masstab 1:400.



Längsschnitt. — Masstab 1:400.



Querschnitt. — Masstab 1:400.



Grundriss vom Erdgeschoss.

Masstab 1:500.

## Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen.

Von Prof. Dr. *F. Prášil* in Zürich.

(Fortsetzung.)

Soll nun in einem Rohr, dessen Meridianlinie in der geschilderten Weise bestimmt wurde, tatsächlich die Flüssigkeitsbewegung in der durch die Gleichungen bestimmten Weise erfolgen, so müssen, wie schon auf Seite 235 erwähnt, der Eintritt in das Rohr und der Austritt aus demselben unter Bedingungen geschehen, die einerseits bezüglich Geschwindigkeits- und Pressungs-Verhältnissen mit denjenigen übereinstimmen, welche der angenommenen Form entsprechen, und die anderseits physikalisch möglich sind.

Wenn z. B. ein derartig bestimmtes Rohr als Saugrohr an einer Turbine angebracht ist, so sind folgende Bedingungen massgebend:

1. Es muss die Geschwindigkeit unmittelbar hinter dem Laufrad der Turbine der Grösse und Richtung nach die Werte besitzen, die sich aus den beiden Funktionen  $F$  und  $S$  für die Punkte  $a, 1, 2, 3 \dots b$  der Austrittskante  $ab$  ergeben. Wird die Berechnung der Turbine unter der Annahme einer, der Grösse nach über die ganze Austrittsfläche gleichen absoluten Austrittsgeschwindigkeit gemacht, so muss demnach die Austrittsfläche eine Fläche gleicher Totalgeschwindigkeit sein, d. h. es wäre bei gegebener Rohrform die Meridianlinie  $ab$  der Austrittsfläche mit Hilfe der Gleichung

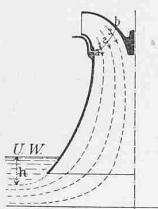


Abb. 9.

$$c^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2$$

zu bestimmen, wobei  $c$  den konstanten Wert der absoluten Austrittsgeschwindigkeit hinter dem Laufrad bedeutet, der für die Bestimmung der Radschaufelung angenommen wurde; oder aber es muss bei angenommener Form der Meridianlinie  $ab$  die entsprechende Rohrform bestimmt werden, welch letzteres Verfahren allerdings grosse rechnerische Schwierigkeiten verursacht.

Dementsprechend würde im Beispiel Seite 234 die Gleichung

$$c^2 = 16 k^2 z^2 + 4 k^2 r^2$$

die Form der Austrittskante bestimmen.

Im Band XXXXV der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Jahrgang 1901, Seite 1602 u. f. hat Herr Ingenieur N. Baashaus ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten der Austrittsfläche einer Francisturbine oder amerikanischen Turbine angegeben, welches dem Wesen nach auf denselben Grundsätzen basiert, die oben an Hand der Theorie entwickelt wurden; es werden in eine angenommene Rohrform Stromlinien eingezeichnet und zu denselben die orthogonalen Trajektorien als die Meridianlinien von Rotationsflächen gezogen, welche als Niveauflächen bezeichnet sind und von denen angenommen wird, dass in allen Punkten einer Fläche angenähert dieselbe Totalgeschwindigkeit vorhanden sei, welche dann aus der sekundlichen Wassermenge und dem Flächeninhalt der Niveauflächen gerechnet wird; dass es sich nur um eine angenäherte Annahme handelt, wird auf Seite 1604 und 1605 ausdrücklich hervorgehoben und begründet.

Diese Niveauflächen sind nun, sofern die Rohrform überhaupt eine derartige Strömung zulässt, nach dem früheren die Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials und hat daher tatsächlich in denselben die Totalgeschwindigkeit im allgemeinen nur in den Punkten eines Parallelkreises gleiche Grösse und Richtung gegen die Achse; in den verschiedenen Punkten der Meridianlinie dieser Niveauflächen sind dieselben verschieden; es unterliegt aber keiner Schwierigkeit, die Verteilung der Geschwindigkeit längs einer beliebigen Meridianlinie und damit im ganzen Raum mit der Genauigkeit, welche bei einem graphischen Verfahren erreichbar ist, zu bestimmen.

Es seien  $F_a$  und  $F_b$  die Meridianlinien zweier unendlich naheliegender Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials und  $r_{a1b}, r_{a2b} \dots$  Strecken, die durch dieselben auf den Stromlinien  $S_1, S_2 \dots$  abgeschnitten werden; man kann dieselben als die Abstände  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$  der beiden Flächen  $F_a$  und  $F_b$  betrachten.

Aus der allgemeinen Potentialtheorie folgt dann, dass die Totalgeschwindigkeit in irgend einem Punkte  $1, 2, \dots$  der Potentialfläche  $F_a$  umgekehrt proportional dem zugehörigen Abstand  $\varepsilon_1 = r_{a1b}; \varepsilon_2 = r_{a2b} \dots$  ist, dass also die Gleichungen bestehen:

$$c_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon_1}; c_2 = \frac{\alpha}{\varepsilon_2}; \dots$$

wobei  $\alpha$  der Proportionalitätsfaktor ist. (Siehe hierüber u. A.; Clausius die Potentialfunktion Seite 5.)

Da nun die Totalgeschwindigkeit in jedem Punkt der Potentialfläche senkrecht auf dieselbe steht, so folgt, wenn  $dl$  das Bogenelement der Meridianlinie  $F_a$  am Radius  $r$ ,  $l$  die Länge der Meridianlinie von der Achse bis zum betrachteten Punkt und  $L$  die ganze Länge derselben bis zur Rohrwand bedeuten, für die durch die Potentialfläche und hiemit durch das Rohr strömende Wassermenge in  $m^3$  per Sekunde

$$Q = \int_0^L \frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} dl = 2\pi\alpha \int_0^L \frac{r}{\varepsilon} dl.$$

Das Integral  $J = \int_0^L \frac{r}{\varepsilon} dl$  kann nun auf graphischem Wege bestimmt werden, indem man die Strecken  $\varepsilon$  zwischen zwei benachbarten Meridianlinien  $F$  misst, die Werte  $\frac{r}{\varepsilon}$  als Funktion der Länge  $l$  darstellt und die Grösse von  $J$  durch Quadratur bestimmt.

Bei gegebenem  $Q$  erhält man

$$\alpha = \frac{Q}{2\pi J} \text{ und damit aus}$$

$c = \frac{\alpha}{\varepsilon}$  die Grössen der Totalgeschwindigkeiten längs der Meridianlänge  $F_a$ .

Verfährt man in gleicher Weise für eine Anzahl von Meridianlinien  $F$ , so erhält man eine Darstellung der Ge-

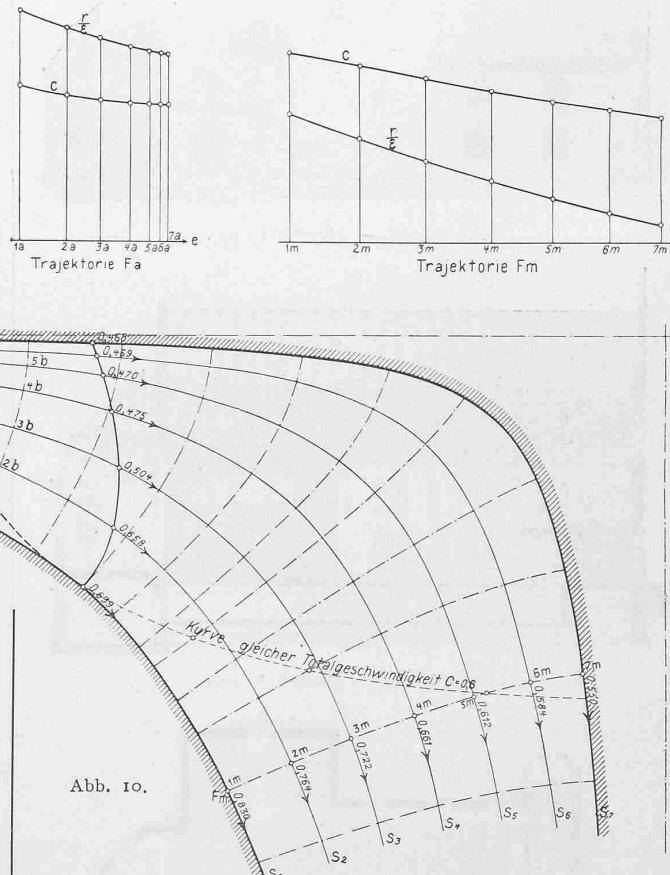


Abb. 10.

schwindigkeitsverteilung im Hohlraum und ist es nun leicht die Meridianlinien der Flächen gleicher Totalgeschwindigkeit zu zeichnen oder für die Punkte einer angenommenen Meridianlinie die Geschwindigkeiten zu berechnen.

In dieser Weise ist die Abbildung 10 berechnet und gezeichnet.

Man kann nun auch kontrollieren, ob in der angenommenen Rohrform die durch die Stromlinien charakterisierte Strömung eine wirbelfreie ist, d. h. ob die Kurven  $F$  und  $S$  tatsächlich Funktionen der in den allgemeinen Ableitungen bezeichneten Art darstellen:

Zu dem Zwecke zieht man durch einen beliebigen Punkt des benachbarten Gebietes eine Parallele zur  $Z$ -Achse und eine darauf senkrechte Linie, bestimmt die Schnittpunkte mit den Meridian- und Stromlinien  $F$  und nimmt jede dieser, derart geteilten Linien als Abszissenachse, auf welche man in den einzelnen Teilpunkten die zu jedem Punkt gehörige Geschwindigkeitskomponente  $v$  resp.  $w$  als Ordinaten aufträgt, so zwar dass man  $w$  als Funktion von  $v$  und  $v$  als Funktion von  $z$  erhält; mit Rücksicht darauf, dass für wirbelfreie Strömung

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z} \text{ sein muss,}$$

folgt, dass die Tangenten an die beiden erhaltenen Kurven im Punkte, von welchen man bei der Konstruktion der Kurven ausgegangen ist, gleiche Neigung gegen die Abszissenachse haben müssen.

Dieses graphische Verfahren gibt jedenfalls eine für die Praxis genügend genaue Darstellung der Strömung in einem solchen Hohlraum.

2. Die Sohle des Abflussgrabens und die Niveaueverhältnisse des Unterwasserspiegels müssen eine Fortsetzung der gesetzmässigen Strömung nach den Stromlinien theoretisch natürlich bis ins Unendliche, praktisch hingegen wenigstens so weit gestatten, dass eine Rückwirkung der durch die äusseren Verhältnisse verursachten Abweichungen von verschwindendem Einflusse ist.

Dies wird erreicht sein, wenn die Meridianlinie der Sohle selbst eine Stromkurve ist und wenn die Fortsetzung der Rohrfläche nach unten wenigstens in der Nähe des Austrittes eine Grenzfläche bildet in dem Sinne, dass dort die Bewegung in eine diskontinuierliche Strömung in das Unterwasser übergeht.

Zur Erläuterung sei an das Beispiel des Rohres angeknüpft, das auf Seite 234 mit Hilfe der Funktion

$$F = 2kz^2 - kr^2$$

bestimmt und worin ein Zahlenbeispiel gerechnet wurde.			
Es wurde hierfür gefunden (Seite 235)			
	<i>Allgemeine</i>	<i>Speziell für <math>k = -\frac{3}{16}</math></i>	
$F =$	$2 k \tilde{z}^2 - k r^2$	$= -\frac{3}{8} \tilde{z}^2 + \frac{3}{16} r^2$	
$w = \frac{\partial F}{\partial \tilde{z}}$	$= 4 k \tilde{z}$	$= -\frac{3}{4} \tilde{z}$	
$v = \frac{\partial F}{\partial r}$	$= -2 k r$	$= +\frac{3}{8} r$	
$c^2 = w^2 + v^2 =$	$16 k^2 \tilde{z}^2 + 4 k^2 r^2 =$	$\frac{9}{16} \tilde{z}^2 + \frac{9}{64} r^2$	
$S =$	$r^2 \tilde{z}$		

für die Rohrmeridianlinie wurde der konstante Wert  $S_m = 1,71$  gefunden bei Annahme eines Wasserdurchflusses von  $v = 4 \text{ m}^3/\text{Sek.}$  und einer achsialen Eintrittsgeschwindigkeit ins Rohr von  $4 \text{ m}/\text{Sek.}$

Aus der Gleichung für  $w$  ist zu ersehen, dass für  $z = 0, w = 0$  wird, also in einer Ebene, welche senkrecht zur Achse steht und durch den Koordinatenursprung geht nur radiale Strömung herrscht; diese Ebene kann demnach die Sohle des Untergrabens bilden, ihr Abstand von der Eintrittsfläche ist

$$\chi_e = -\frac{w_e}{4k} = -\frac{16}{3} = 5,333 \text{ m.}$$

Damit die Fortsetzung der Rohrfläche nach unten eine Grenzfläche im oben angedeuteten Sinn sein kann, ist notwendig, dass in den einzelnen Punkten  $P$  derselben, die von der ruhenden Flüssigkeit oberhalb der Grenzfläche her-

rührende Pressung gleich derjenigen ist, welche diesen Punkten nach dem durch die Rohrform bedingten und durch die Gleichung

$$\frac{p - p_a}{\gamma} + \frac{c^2 - c_a^2}{2g} + (\zeta - \zeta_a) = 0$$

bestimmten Gesetz zukommt, (siehe Abbildung 11) d. h. es muss,  $\frac{p - p_a}{\gamma} = b$ , gleich dem Vertikalabstand des Punktes  $P$  vom Unterwasserspiegel sein.

Abb. II.

Bezeichnet man mit  $y$  den Abstand der Punkte des Unterwasserspiegels von der ebenen, horizontalen Sohle, welcher Abstand bei ebenem Unterwasserspiegel mithin konstant ist, so müsste, weil  $y = z + b$  ist, nach dem obigen

28  
es müsste die Geschwindigkeit  $c$  in allen Punkten der Grenzfläche dieselbe sein; nun ist nach obiger Zusammenstellung

$$c^2 = 16 k^2 \zeta^2 + 4 k^2 r^2 \text{ und } S_m = r^2 \zeta \text{ somit}$$

für die Grenzfläche

$c^2 = 16 k^2 z^2 + 4 k^2 \frac{S_m}{z}$ , es ist also die notwendige Bedingung der Konstanz von  $c$  nicht im ganzen Verlauf der Grenzfläche erfüllt, sondern nur in unmittelbarer Nähe der Punkte für welche  $\frac{dc}{dz} = 0$  ist, d. h. für diejenigen Punkte für welche

$$\begin{aligned} \zeta &= 0,5 \sqrt[3]{S_m} ; \quad r = 1,41 \sqrt[3]{S_m} \\ \text{im Spezialfall} \quad S_m &= 1,71 \\ z &= 0,6 \text{ m} \quad r = 1,60 \text{ m ist.} \end{aligned}$$

Verlängert man daher das früher nur für 4 m Länge berechnete Rohr so weit nach unten, dass die unteren Endordinaten der Rohrmeridianlinie obigen Strecken entsprechen (wie dies in Abb. 8 S. 235 auf der linken Seite angedeutet ist), so kann in unmittelbarer Nähe des Austrittsrandes die verlängerte Rohrfläche eine freie Grenzfläche sein, daher der Austritt in der durch die entwickelten Gleichungen bestimmten Form erfolgen.

Man erkennt leicht, dass hiebei die Oberflächengeschwindigkeit  $c$  am Austrittsrand ein Minimum ist. Sollte die verlängerte Rohrfläche auch im weiteren Verlaufe außerhalb des Rohres eine Grenzfläche sein, so müsste der Unterwasserspiegel eine Rotationsfläche bilden, deren Meridian-

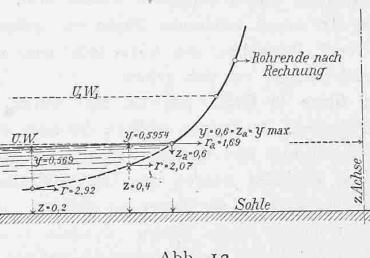


Abb. 12.

gels während des Betriebes liegen; bei einem derart geformten Rohr können demnach auch die Austrittsbedingungen mit praktisch genügender Genauigkeit erfüllt sein und wird sich bei richtigen Eintrittsverhältnissen die Strömung in der durch die Theorie gegebenen Weise einstellen.

Einfluss übend ist hierbei nur noch die Reibung an der Rohrwand, da, wie Grashof im angeführten Werk Seite 388 bereits bewiesen hat, im Falle des Bestehens eines Geschwindigkeitspotentials der Einfluss der inneren Reibung nicht in Betracht kommt; das nämliche gilt für angesaugte, oder durch die Depression frei gewordene und dann mitgerissene Luft, da in diesem Falle die Bedingung der Unzusammendrückbarkeit von vorneweg nicht mehr erfüllt ist.

Die Grösse dieser Einflüsse kann naturgemäss nur auf dem Wege der Beobachtung und Messung bestimmt werden; namentlich wird es darauf ankommen, denjenigen Wert der Depression zu bestimmen, bei welchem Luft in solcher Menge frei wird, dass die den Entwicklungen zu Grunde liegende Bedingung der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit als auch nicht mehr angenähert erfüllt zu betrachten ist. (Forts. folgt.)

## Miscellanea.

Die 44. Hauptversammlung des Vereins deutscher Ingenieure<sup>1)</sup>. Die Tagesordnung der 44. Hauptversammlung des Vereins deutscher Ingenieure, die in München und Augsburg vom Dienstag den 30. Juni bis Donnerstag den 2. Juli 1907 stattfand, ist wie folgt:

1) Bd. XLI S. 147.