

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 41/42 (1903)  
**Heft:** 19

## Inhaltsverzeichnis

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**INHALT:** Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen. — Die Vesuvbahn. III. — Alte Baudenkmäler aus dem Seelande. (Schluss). — Simplon-Tunnel. — Miscellanea: Von den Ausgrabungen zu Orchomenos in Böotien. Eine internationale Ausstellung für Wohnungs- und Baugewerbe sowie für staatliche und kommunale Unternehmungen. Monatsausweis

über die Arbeiten am Simplontunnel. Der Weinmarktbrunnen in Luzern. Das Schloss Velthurns. Albula-Bahn. Wasserversorgung der Gemeinde Grenchen (Solothurn). — Konkurrenzen: Aufnahmegeräte im Bahnhof Basel. Entwürfe für Gasbeleuchtungskörper. — Vereinsnachrichten: Gesellschaft ehemaliger Studierender: Stellen-Vermittlung.

## Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen.

Von Prof. Dr. F. Prášil in Zürich.

Die Behandlung hydrotechnischer Probleme auf Grundlage der Fundamentalgleichungen der Hydrodynamik von Lagrange oder Euler stösst bekanntlich deshalb auf Schwierigkeiten, weil die Integration der hierbei in Frage kommenden partiellen Differentialgleichungen vielfach mit den bisher bekannten Methoden nicht durchführbar ist.

Die Untersuchungen, welche für inkompressible Flüssigkeiten bereits bestehen, beziehen sich einerseits auf Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeiten durch das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials bestimmt sind und anderseits auf die Theorie der Wirbelbewegungen. Dieselben sind zum grössten Teil auf Grundlage eines räumlichen, geradlinigen und orthogonalen Koordinatensystems durchgeführt; Grashof hat in seiner theoretischen Maschinenlehre (I. Band Seite 398 u. ff.) für die allgemeine Untersuchung strömender Bewegung längst gegebener Bahnen krummlinige, orthogonale Koordinaten angewendet; mit zylindrischen Koordinaten sind bisher nur einige Spezialfälle behandelt worden. Die Untersuchung ebener Strömungen hat zur Lösung der sogenannten zweidimensionalen Probleme und darunter zur Bestimmung der Form von Flüssigkeitsstrahlen geführt. So sehr diese Untersuchungen geeignet sind, eine Reihe von Flüssigkeitsbewegungen exakt zu beschreiben, so sind dieselben doch in den wenigsten Fällen unmittelbar an aktuelle Vorgänge anschliessbar; sie geben im allgemeinen nur Vergleichsgrundlagen.

Zu den hydrotechnischen Problemen, die namentlich im Maschinenbau von aktueller Bedeutung sind, gehören unter andern auch jene, welche sich auf die Bewegung von Flüssigkeiten durch Hohlräume beziehen, die entweder direkt als Rotationshohlräume geometrisch charakterisiert (Röhren, Düsen), oder in solchen Räumen gesetzmässig gruppiert sind (Leit- und Laufräder von Turbinen und Zentrifugalpumpen).

Es ist nun naheliegend in der Transformation der anfangs genannten, auf ein räumliches, orthogonales Koordinatensystem bezogenen Fundamental-Gleichungen auf ein zylindrisches Koordinatensystem mit der Raumachse als Hauptachse ein Mittel zur eventuellen Vereinfachung der analytischen Ableitungen für die Untersuchung von Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen zu suchen. Die Resultate eines solchen Versuches bilden das Thema der folgenden Abhandlung; derselbe wurde in erster Linie zu dem Zwecke unternommen, Methoden zur Bestimmung der Meridianlinien von Saugröhren für Turbinen zu finden.

Es wird hiebei an die Erörterungen angeschlossen, die Grashof in seiner theoretischen Maschinenlehre (I. Band Seite 386 u. ff.) hinsichtlich der Fundamentalgleichungen für inkompressible und reibungslose Flüssigkeiten gegeben hat.

### I. Die transformierten Fundamentalgleichungen.

Die beabsichtigte Transformation könnte auf analytischem Wege erfolgen, indem man unter Belassung der Z Achse als Hauptachse, die Koordinaten  $x$  und  $y$  und deren Ableitungen durch Einführung der Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  ersetzen würde.

Es erscheint jedoch einfacher, die Gleichungen direkt abzuleiten.

Es sei in Abb. 1 im Ringstück  $a b c d \ a_1 b_1 c_1 d_1$  ein Volumenelement dargestellt, dessen Eckpunkt  $a$  die zylindrischen Koordinaten:  $O m = z$ ;  $m a = r$  und  $\varphi$  habe; die Seitenlängen des Volumenelementes seien:

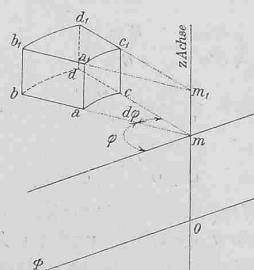


Abbildung 1.

$$\begin{aligned} a b &= \overline{a_1 b_1} = \overline{c d} = \overline{c_1 d_1} = d r \\ a c &= \overline{a_1 c_1} = \dots = r d \varphi \\ \overline{\overline{b d}} &= \overline{\overline{b_1 d_1}} = \dots = (r + d r) d \varphi \\ \overline{a a_1} &= \overline{b b_1} = \overline{c c_1} = \overline{d d_1} = m m_1 = d z. \end{aligned}$$

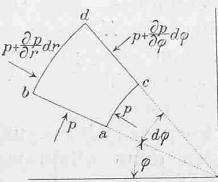
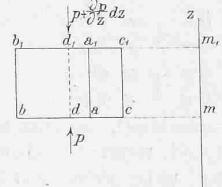


Abb. 2 und 3.

Auf Ebenen senkrecht zur Z Achse projiziert sich das Volumenelement hiemit nach Abb. 3; einen Aufriss gibt Abb. 2.

Die Masse Flüssigkeit, welche das Volumenelement ausfüllt, ist bestimmt durch

$$d M = \frac{\gamma}{g} r d \varphi \cdot d r \cdot d z,$$

wobei  $\gamma$  das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit,  $g$  die Beschleunigung der Schwere bedeuten.

Die pro Masseneinheit wirksamen Massenkräfte seien bezeichnet mit  $R$  in der Richtung  $r$ , radial nach auswärts positiv;  $Z$  in der Richtung der  $Z$  Achse, positiv im Sinne der Abbildungen 1 und 2;  $U$  senkrecht zu  $R$  und  $Z$  und positiv im Sinne der Drehung des Uhrzeigers. Die Geschwindigkeitskomponenten seien bezeichnet

mit  $v$  in radialem ( $R$ ) Richtung | positiv im selben  
„  $w$  „ achsialer ( $Z$ ) „ | Sinne wie die Kraft  
„  $u$  „ tangentialer ( $U$ ) „ | komponenten;  
 $p$  bezeichnet die Pressung an den Seitenflächen  $abcd$ ,  $aba_1b_1$ ,  $aca_1c_1$ .

Setzt man die Summe der Kraftkomponenten nach jeder der drei Richtungen gleich der Masse des Elementes multipliziert mit der betreffenden Beschleunigungskomponente, so erhält man

A) für die  $Z$  Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} r d \varphi \cdot d r \cdot d z \cdot Z + [p - (p + \frac{\partial p}{\partial z} d z)] r d \varphi \cdot d r = \\ = \frac{\gamma}{g} r d \varphi \cdot d r \cdot d z \cdot \frac{dw}{dt} \\ Z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{I} \end{aligned}$$

B) für die  $R$  Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} r d \varphi \cdot d r \cdot d z \cdot R + [p \cdot r \cdot d \varphi \cdot d r - (p + \frac{\partial p}{\partial r} d r)(r + d r) d \varphi] + \\ + p d r \cdot d z \cdot d \varphi = \frac{\gamma}{g} \left[ \frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{r} \right] \\ R - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{r} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{II} \end{aligned}$$

Das Glied  $p d r \cdot d z \cdot d \varphi$  führt von den Pressungen auf die Seitenflächen  $ab a_1 b_1$  und  $c d c_1 d_1$  her, die unter dem Winkel  $d \varphi$  wirkend, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung, in der  $r$  Richtung eine Kraft von der angegebenen Grösse ergeben.

Das Glied  $\frac{u^2}{r}$  entspricht der Zentripetalbeschleunigung des Massenelementes.

C) für die  $U$  Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} r d \varphi \cdot d r \cdot d z \cdot U + [p - (p + \frac{\partial p}{\partial \varphi} d \varphi)] d r \cdot d z = \\ = \frac{\gamma}{g} (r d \varphi \cdot d r \cdot d z) \cdot \left( \frac{du}{dt} + \frac{uv}{r} \right) \end{aligned}$$

$$U - \frac{g}{\gamma} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{du}{dt} + \frac{uv}{r} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{III}$$

Das Glied  $\frac{uv}{r}$  entspricht dem Beschleunigungszuschuss in der  $U$  Richtung, der durch die Bogenkoordinate bedingt