Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 37/38 (1901)
Heft: 19

Artikel: Ueber den Beschleunigungszustand eines Kurbelvierecks
Autor: Herzog, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22704

Ueber den Beschleunigungszustand eines Kurbelvierecks.

Von Professor Dr. *A. Herzog* in Zürich.

Die Spannungen, welche in der Schubstange eines Kurbelvierecks auftreten, sind nicht nur von den äusseren Kräften, sondern auch von den Trägheitskräften abhängig. Nach dem Prinzip von d'Alembert sind die beiden Systeme von Kräften während der ganzen Dauer der Bewegung im Gleichgewicht. Die Trägheitskraft für ein Massenelement m, das die Beschleunigung p besitzt, ist $m \cdot p$, die Richtung der Kraft ist entgegengesetzt derjenigen der Beschleunigung.

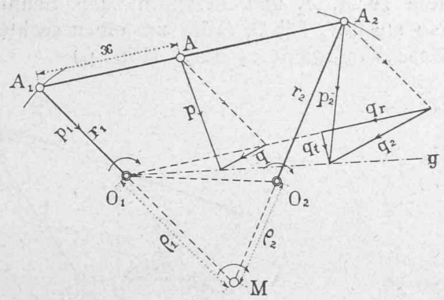

Fig. 1.

Die Beschleunigungen der sämtlichen Punkte der Schubstange können nach den von Burmester, Mohr, Rittershaus, Schadwill und Anderen angegebenen Verfahren bestimmt werden.

Im folgenden sollen zwei, meines Wissens neue Lösungen der gleichen Aufgabe abgeleitet werden und zwar unter der Voraussetzung, dass eine der beiden Kurbeln mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Die Massen der einzelnen Elemente der Schubstange kann man sich in der Achse konzentriert denken.

I.

Es seien (Fig. 1) O_1 und O_2 die Drehpunkte der beiden Kurbeln mit den Radien $r_1 = O_1 A_1$ und $r_2 = O_2 A_2$; mit ω_1 und ω_2 sollen ihre Winkelgeschwindigkeiten bezeichnet werden. Wenn ω_1 konstant ist, so ist die Beschleunigung p_1 des Punktes A_1 radial nach einwärts gerichtet und hat den Wert $\omega_1^2 r_1 = \frac{v_1^2}{r_1}$, worin v_1 die konstante Geschwindigkeit von A_1 ist. Werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im Masstabe $\frac{v_1}{r_1} = \omega_1 = 1$ abgetragen, so wird durch die Strecke r_1 nicht nur die um einen rechten Winkel gedrehte Geschwindigkeit, sondern auch die Beschleunigung p_1 des Punktes A_1 nach Grösse und Richtung dargestellt. Die Beschleunigung p eines beliebigen Punktes A der Schubstange im Abstande x von A_1 kann als Resultierende zweier Beschleunigungen aufgefasst werden: 1. Der Beschleunigung p_1 des Punktes A_1, 2. Der Beschleunigung q, welche von der Drehung der Schubstange um den Punkt A_1 herrührt. Die Komponenten q_r und q_t dieser zweiten Beschleunigung in der Richtung $A A_1$ und senkrecht dazu sind:

$$q_r = x\,\omega^2 \text{ und } q_t = x\,\frac{d\omega}{dt},$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Punkt A_1 und t die Zeit bezeichnen. Die Zerlegung von q ist für den Punkt A_2 in Fig. 1 angedeutet. Mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω rotiert die Schubstange um ihr Momentancentrum M, das im Schnittpunkt von r_1 und r_2 liegt. Aus den Ausdrücken von q_r und q_t ergiebt sich, dass q selbst mit x proportional ist und dass der Winkel γ, den die Richtung von q mit $A_1 A_2$ bildet, für alle Punkte der Schubstange den gleichen Wert hat. Es ist nämlich

$$tg\,\gamma = \frac{x\,\frac{d\omega}{dt}}{x\,\omega^2} = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}.$$

Man erkennt ferner, dass die Endpunkte der Beschleunigungen p der sämtlichen Punkte von $A_1 A_2$ auf einer Geraden g liegen, die durch O_1 geht und dass die Projektionen dieser Beschleunigungen auf eine Gerade senkrecht zur Richtungslinie von q einander gleich sind. — Diese Sätze gelten übrigens für jede Gerade eines starren, ebenen Systems.[1]) Durch den Winkel γ und die Gerade g sind die Beschleunigungen p bestimmt.

Setzt man $M O_1 = \varrho_1$, $M O_2 = \varrho_2$, so ist

$$v_1 = r_1\,\omega_1 = (\varrho_1 + r_1)\,\omega.$$

Hieraus folgt:

$$0 = (\varrho_1 + r_1)\frac{d\omega}{dt} + \omega\,\frac{d\varrho_1}{dt} \text{ oder}$$

$$\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2} = -\frac{\frac{d\varrho_1}{dt}}{(\varrho_1 + r_1)\,\omega} = -\frac{\frac{d\varrho_1}{dt}}{v_1};$$

$$tg\,\gamma = -\frac{\frac{d\varrho_1}{dt}}{\varrho_1}\cdot\frac{\varrho_1}{v_1}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich eine einfache Konstruktion des Winkels γ. (Fig. 2.)

Die Verbindungslinie der Momentancentra für zwei unendlich benachbarte Lagen der Schubstange ist die gemeinsame Tangente MN der beiden Polbahnen des ebenen Systems, dem die Gerade $A_1 A_2$ und der Punkt M angehören. Nach dem Satze von Bobillier ist der Winkel τ zwischen $O_1 M$ und MN gleich dem Winkel $Q M O_2$, wenn Q der Schnittpunkt von $O_1 O_2$ und $A_1 A_2$ ist. Bezeichnet man noch mit φ_1 den Winkel $Q O_1 A_1$, dann erhält man:

$$tg\,\tau = \frac{\varrho_1\,d\varphi_1}{d\varrho_1} = \frac{\varrho_1\,\omega_1}{\frac{d\varrho_1}{dt}}.$$

Es ist somit

$$tg\,\gamma = -\frac{1}{tg\,\tau}\cdot\frac{\varrho_1\,\omega_1}{v_1} = -\frac{1}{tg\,\tau}\cdot\frac{\varrho_1}{r_1}.$$

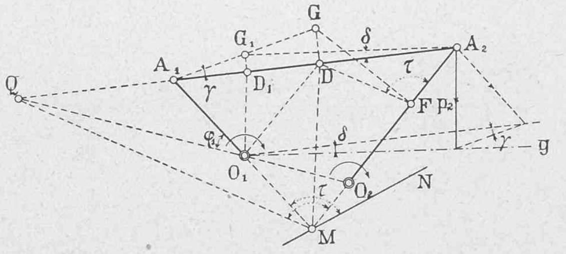

Fig. 2.

Zieht man nun $O_1 D \parallel M A_2$ und $D F \parallel Q M$ und errichtet in D und F die Senkrechten auf $A_1 A_2$, bezw. $M A_2$, so ist, wenn mit G der Schnittpunkt der beiden Perpendikel bezeichnet wird,

$$\sphericalangle\, D A_1 G = \gamma.$$

Es ist nämlich

$$\sphericalangle\, D G A_2 = 180^0 - \tau,$$

folglich

$$tg\,\gamma = -\frac{1}{tg\,\tau}\cdot\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{DG}{DA_2}\cdot\frac{DA_2}{DA_1} = \frac{DG}{DA_1}.$$

Ebenso einfach gestaltet sich die Bestimmung der Geraden g; sie bilde mit $A_1 A_2$ den Winkel δ. Für den Punkt A_2 der

[1]) Burmester, Lehrbuch der Kinematik.

Schubstange ergiebt sich, wenn $A_1 A_2 = a$ gesetzt wird, die Beschleunigungskomponente

$$q_r = a\,\omega^2 = a \frac{r_1^2}{(\varrho_1 + r_1)^2}\,\omega_1^2 = \frac{a\, r_1^2}{(\varrho_1 + r_1)^2},$$

da bei der Zeichnung $\omega_1 = 1$ gewählt wurde. Verbindet man M mit D und zieht $O_1 D_1 \parallel M D$, so wird

$$q_r = a \frac{\overline{A_1 D}^2}{a^2} = \frac{\overline{A_1 D}^2}{a} = A_1 D \frac{A_1 D_1}{A_1 D} = A_1 D_1 .$$

Aus Fig. 1 folgt aber:

$$q_r\, tg\, \gamma = (a - q_r)\, tg\, \delta \text{ oder:}$$

$$A_1 D_1 \cdot tg\, \gamma = (a - A_1 D_1)\, tg\, \delta = A_2 D_1 \cdot tg\, \delta .$$

Errichtet man also in D_1 die Senkrechte auf $A_1 A_2$ und verlängert sie bis zum Schnittpunkte G_1 mit $A_1 G$, so ist:

$$\sphericalangle\, A_1 A_2 G_1 = \sphericalangle\, \delta .$$

Die durch O_1 zu $A_2 G_1$ gezogene Parallele ist die Gerade g, auf der die Endpunkte der Beschleunigungen p liegen.

Wenn die Punkte M und Q nicht zugänglich sind, lassen sich durch eine einfache Zwischenkonstruktion, die hier nicht weiter ausgeführt werden soll, der Punkt F und damit auch die Punkte G und G_1 bestimmen.

II.

Bei der gewöhnlichen Schubkurbel beschreibt A_2 eine durch O_1 gehende Gerade; der Drehpunkt O_2 liegt also im Unendlichen und zwar ist $O_1 O_2$ normal zur Schubrichtung $A_2 O_1$. (Fig. 3.)

Man erkennt leicht, dass in diesem Falle die Punkte Q und D sich decken; der Punkt F fällt mit dem Momentancentrum M zusammen. Zieht man durch F die Senkrechte zu $M A_2$, d. h. die Parallele zur Schubrichtung und durch D die Senkrechte zu $A_1 A_2$, so erhält man den Punkt G und damit

$$\sphericalangle\, \gamma = \sphericalangle\, G A_1 A_2 .$$

Da der Punkt A_2 sich geradlinig bewegt, so fällt die Gerade g mit der Schubrichtung zusammen. In der Figur ist die Konstruktion der Beschleunigungen p_2 und p der Punkte A_2 und A der Schubstange angedeutet; man sieht, dass p_2 auch durch die Strecke $B O_1$ dargestellt wird. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1 O_1 B$ und $A_1 M G$ ergiebt sich

$$p_2 = \frac{M G}{M A_1} \cdot r_1 .$$

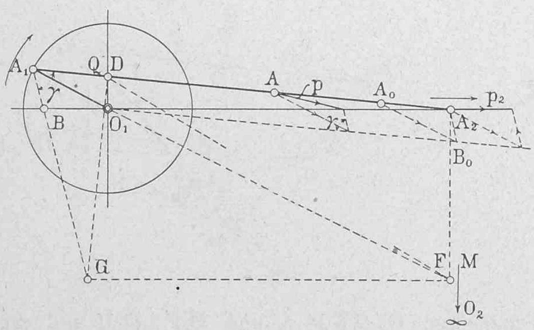

Fig. 3.

In der Zeichnung ist noch der Punkt A_0 angegeben, dessen Beschleunigung der Richtung nach mit der Achse der Schubstange zusammenfällt. Man findet diesen Punkt, wenn man $A_2 B_0 \parallel A_1 G$ und $B_0 A_0 \parallel O_1 A_1$ zieht. Bei der Konstruktion der Beschleunigungen könnte man auch von einem früher erwähnten Satze Gebrauch machen, nach welchem ihre Projektionen auf eine zu $A_1 G$ senkrechte Gerade einander gleich sind.

In den beiden Totlagen der Kurbel liegt das Momentancentrum in A_2 und die beiden Punkte D und G fallen mit O_1 zusammen; ferner ist $M A_1 = A_2 A_1 = a$ und $M G = a \mp r_1$. Das obere Zeichen ist zu wählen, wenn O_1 zwischen A_1 und A_2, das untere, wenn O_1 ausserhalb der Strecke $A_1 A_2$ liegt. Man erhält also:

$$p_2 = \frac{a \mp r_1}{a} r_1 .$$

Wenn die Kurbel zur Schubrichtung senkrecht steht, so liegen M und G im Unendlichen, D und A_1 fallen zusammen. Errichtet man in A_1 die Senkrechte zu $A_1 A_2$ und sucht ihren Schnittpunkt B mit der Schubrichtung, so ist

$$p_2 = B O_1 .$$

III.

Die Beschleunigung p_2 des Punktes A_2 der Schubstange kann auch dadurch gefunden werden, dass man ihre radiale und ihre tangentiale Komponente ermittelt. Bezeichnet man mit v_2 die Geschwindigkeit und mit p_r und p_t die beiden Komponenten der Beschleunigung von A_2, so ist

$$p_r = \frac{v_2^2}{r_2} \text{ und } p_t = \frac{d v_2}{d t} .$$

Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sind den Abständen $M A_1$ und $M A_2$ proportional. Zieht man also durch O_1 die Parallele zu $A_1 A_2$ und bestimmt den Schnittpunkt J mit $M A_2$, so stellt $A_2 J \,\#\, O_1 D$ die um einen rechten Winkel gedrehte Geschwindigkeit v_2 dar. (Fig. 4.)

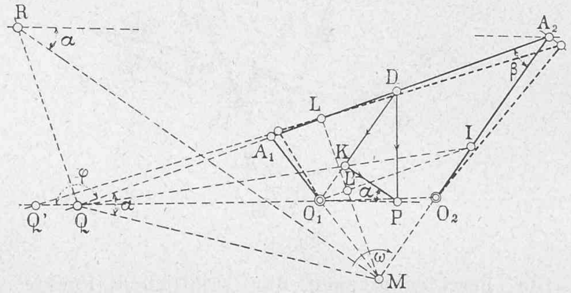

Fig. 4.

Die Verbindungslinie $J Q$ schneide die Gerade $O_1 D$ im Punkte K. Man erhält dann:

$$\frac{D K}{O_1 D} = \frac{A_2 J}{O_2 A_2} \text{ oder}$$

$$D K = \frac{v_2^2}{r_2} = p_r .$$

Zur Bestimmung von $p_t = \frac{d v_2}{d t}$ kann man folgenden Weg einschlagen: Bezeichnet man den Abstand der beiden Drehpunkte mit c und die veränderliche Strecke $O_1 Q$ mit z, so ist

$$\frac{v_2}{r_2} = \frac{z}{z + c} .$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{d v_2}{d t} = r_2 \frac{c}{(z + c)^2} \cdot \frac{d z}{d t} = p_t .$$

Der Ausdruck $\frac{d z}{d t}$ bedeutet die Geschwindigkeit u, mit der sich der Schnittpunkt Q von $A_1 A_2$ und $O_1 O_2$ bewegt. Um den Wert von u zu finden, betrachten wir zwei benachbarte Lagen der Geraden $A_1 A_2$; diese schneiden sich im Fusspunkte L des vom Momentancentrum auf die Gerade gefällten Perpendikels. Es sei φ der Winkel zwischen $A_1 A_2$ und $O_1 O_2$. Dann ist:

$$d z = Q Q' = \frac{L Q \cdot d \varphi}{\sin \varphi},$$

$$\frac{d z}{d t} = \frac{L Q}{\sin \varphi} \frac{d \varphi}{d t} = \frac{L Q}{\sin \varphi}\, \omega .$$

Setzt man

$$\sphericalangle\, L Q M = \alpha, \quad \sphericalangle\, L A_2 M = \beta,$$

so wird

$$L Q = \frac{L M}{tg\, \alpha} = \frac{A_2 M \cdot \sin \beta}{tg\, \alpha},$$

$$L Q \cdot \omega = \frac{A_2 M \cdot \omega \sin \beta}{tg\, \alpha} = \frac{v_2 \sin \beta}{tg\, \alpha} .$$

Da ferner

$$\frac{r_2}{z + c} = \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} \text{ und } \frac{c}{z + c} = \frac{O_2 J}{r_2} \text{ ist,}$$

so ergiebt sich:

$$p_t = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta} \cdot \frac{O_2 J}{r_2} \cdot \frac{v_2 \sin\beta}{tg\,\alpha \cdot \sin\varphi} = \frac{O_2 J}{r_2} \cdot \frac{v_2}{tg\,\alpha},$$

$$p_t = \frac{O_1 K}{v_2} \frac{v_2}{tg\,\alpha} = \frac{O_1 K}{tg\,\alpha}.$$

Um p_t zu konstruieren, errichtet man in Q und M die Senkrechten auf $A_1 A_2$, bezw. $M A_2$; wenn der Schnittpunkt der beiden Perpendikel mit R bezeichnet wird, so ist

$$\sphericalangle\, M R A_2 = \alpha.$$

Zeichnet man ferner in K die Normale zu $O_1 D$ und zieht durch O_1 die Parallele $O_1 P$ zu $A_2 R$, so wird

$$K P = \frac{O_1 K}{tg\,\alpha} = p_t.$$

Die Beschleunigung p_2 des Punktes A_2 wird also nach Grösse und Richtung durch die Strecke DP dargestellt. Aus p_1 und p_2 ergeben sich dann die Beschleunigungen aller Punkte der Schubstange und aus diesen die Trägheitskräfte, durch welche die Schubstange sowohl auf Zug, bezw. Zerknicken, als auf Biegung beansprucht wird.

Die ehemalige Cistercienser-Abtei Wettingen und ihre Chorstühle.[1])

Oberhalb der Stadt Baden im Aargau liegt auf einer Landzunge der Limmat die ehemalige Abtei Wettingen (Fig. 1 u. 2), die heute anderen als klösterlichen Zwecken dient, indem sie das Lehrer-Seminar des Kantons Aargau beherbergt. Obschon die Anlage durch zahlreiche Um- und Neubauten starke Veränderungen erfahren hat, verleugnet sie ihre ursprüngliche Bestimmung keineswegs. Sobald wir die Abtei betreten, werden unsere Blicke immer wieder durch ein Wappen gefesselt, das auf grünem Dreiberge einen von zwei Lilien flankierten Hammer zeigt, über dem ein goldener Stern glänzt. Zuweilen ist dieses Wappen mit einem anderen vereinigt, das ein ebenfalls sternüberstrahltes Meerweibchen im Schild führt, beide bekrönt von Inful und Pedum. Dies lässt vermuten, dass der Träger dieses Wappens wohl ein baulustiger Abt war, dessen Thätigkeit sich beinahe über die ganze Klosteranlage erstreckte und ihr ein bestimmtes Gepräge aufdrückte. In der That trifft diese Annahme zu, denn Abt Peter II, der sich durch diese Wappentafeln ein Denkmal seiner Bauthätigkeit setzte, darf als der Regenerator des Klosters betrachtet werden.

Eine Sage meldet, dass Heinrich von Rapperswil (genannt Wandelber), auf einer Wallfahrt nach dem heiligen Grabe vom Sturm bedroht, gelobt habe, der heiligen Maria ein Kloster zu gründen, wenn er heil zu den Seinen zurückkehre. Ein funkelnder Stern habe darauf in der Wetternacht dem Ritter die Erhörung seiner Bitte verkündigt. Als er, nach Hause zurückgekehrt, einen passenden Ort zur Erfüllung seines Gelübdes gesucht habe, sei ihm in der Wildnis dieser Stern wieder erschienen und er habe jenen Ort zum Baugrund des Klosters bestimmt, dem er den Namen Maria Meerstern (S. Maria Marisstella) gab, einen Namen, der jedoch im Volksmund nie Anklang fand, sodass selbst in Urkunden und auf Siegeln die Benennung des Klosters nach dem benachbarten Dorfe Wettingen häufiger vorkommt. Die Altertumsforscher, die jeder mündlichen Ueberlieferung kritisch auf den Leib rücken, wollen zwar von dieser Sage nichts wissen; immerhin geben sie zu, dass Heinrich von Rapperswil der Stifter des Klosters war. Bei der Klostergründung soll Heinrich von Rapperswil in seiner Gemahlin, Anna von Homberg, eine eifrige Förderin gefunden haben. Den Baugrund erhielt er vom Frauenstift Schännis geschenkt. Das nahegelegene Dorf Wettingen erwarb er im Jahre 1226 vom Grafen Hartmann von Dillingen. So eifrig wurde der Bau gefördert, dass schon im darauf folgenden Jahre der Konvent seinen Einzug halten konnte. Als König Heinrich VII anno 1228 nach Zürich reiste, nahm er die Abtei in seinen Schutz und seit 1232 zählte sie auch die Habsburger zu ihren Wohlthätern. Trotzdem scheinen die Vergabungen nicht so reichlich geflossen zu sein, dass der Bau der Kirche mit dem des Klosters gleichen Schritt halten konnte, denn die Altarweihe erfolgte erst vom 16. bis 19. März 1256 und 38 Jahre später fand eine zweite Weihe statt, woraus zu schliessen ist, dass zu dieser Zeit die ganze Anlage in ihrem ursprünglichen Umfange ausgeführt war. Ein Jahr nach dem Tode seiner Gattin, anno 1231, soll Heinrich von Rapperswil ins Kloster eingetreten sein, wo er am 30. Januar 1246 starb.

Ueber die ersten Jahrhunderte der Klostergeschichte Wettingens ist nur spärliches Urkundenmaterial erhalten geblieben. Die Aebte suchten ihren Bodenbesitz zu vermehren und abzurunden; auch verstanden sie es mit den mächtigen Adelsgeschlechtern, den Grafen von Kyburg, in deren Gebiet die Abtei lag, und dem Hause Habsburg auf gutem Fusse zu leben. Als jedoch zwischen den beiden Linien der Habsburger Streitigkeiten ausbrachen, die auch das Besitztum der Abtei zu schädigen drohten, trat sie im Jahre 1293 in den Schirm der Stadt Zürich, von welcher ein nachhaltigerer Schutz erwartet werden durfte, als von den stets mit einander im Streit liegenden benachbarten Adelsgeschlechtern. Für die Aebte war es keine leichte Aufgabe in diesen schwierigen Zeiten ihr Regiment so zu führen, dass weder die adeligen Gönner, deren Burg, der Stein von Baden, kaum eine halbe Stunde von den Klostermauern entfernt lag, noch die trotzigen Schirmherren von Zürich Grund zu Klagen hatten. Daneben brachte die Verwaltung des weitverzweigten Besitzes mancherlei Streitigkeiten und Processe. Im Jahre 1415, als König Sigismund

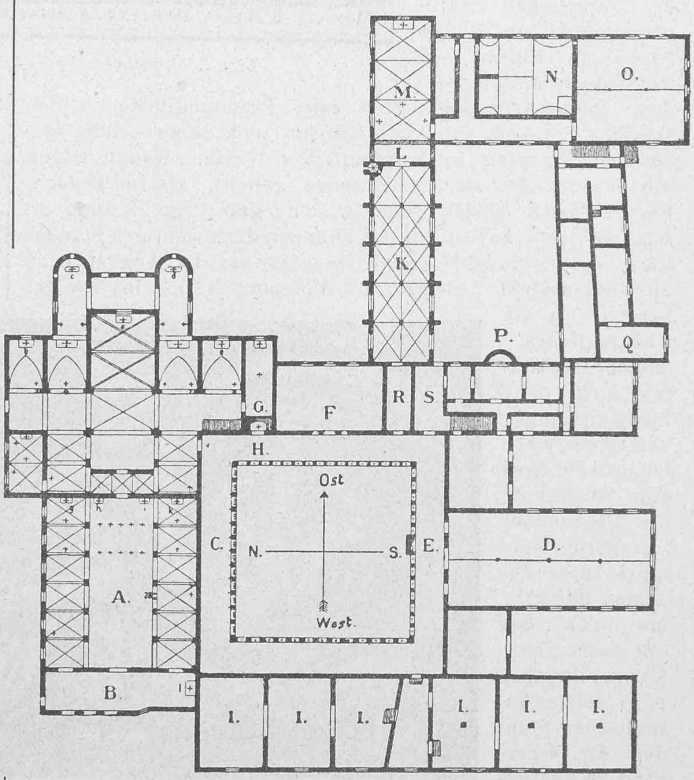

Fig. 2. Lageplan des Klosters Wettingen.

die Eidgenossen aufforderte sich der Länder des Herzogs von Oesterreich zu bemächtigen, kam das Kloster samt der Grafschaft Baden unter die Herrschaft der acht alten Orte der Eidgenossenschaft. Die neuen Schirmherren waren im allgemeinen nachsichtig, aber unter Umständen auch energisch, ohne sich allzusehr um die geistlichen Gewalten zu kümmern. Dies war um so notwendiger, als das Kloster mehrere schwache und unfähige Männer an der Spitze

[1]) Nach dem in dieser Nummer besprochenen Werke von *Hans Lehmann*. Die Abbildungen dazu verdanken wir der Gefälligkeit der Verleger des Werkes: Herren *Hofer & Cie.* in Zürich. Ueber die Chorstühle von Wettingen vergl. auch «Eisenbahn» Bd. VII Jahrgang 1877.