**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

**Band:** 29/30 (1897)

**Heft:** 20

**Artikel:** Die innern Stabkräfte eines belasteten Fachwerkringes, graphisch ermittelt

**Autor:** Bohny, F.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-82472

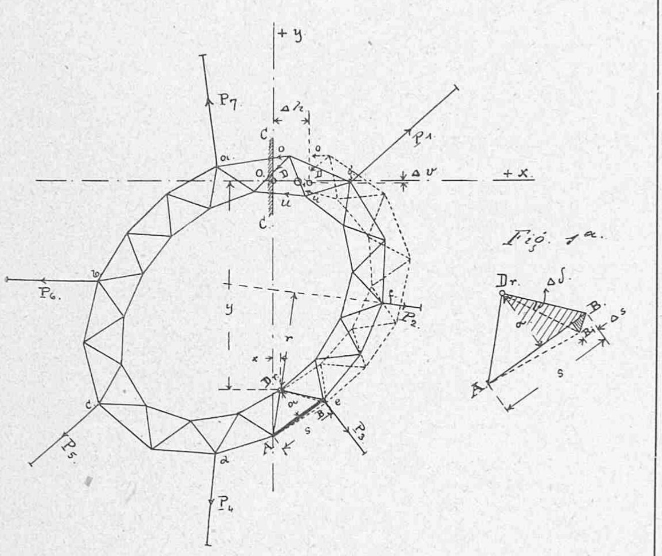
# Die innern Stabkräfte eines belasteten Fachwerkringes, graphisch ermittelt.

Von *F. Bohny*, Ingenieur.

Wird ein geschlossener Fachwerkring von äussern Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, beansprucht, so lässt sich im allgemeinen der Kräfteplan auf unendlich viele Arten durchkonstruieren, wenn man nur den, in einem durch den Ring gelegten Schnitte, getroffenen drei Stäben beliebige Kräfte zulegt. Es ist aber klar, dass für jeden Belastungsfall den vom Schnitte getroffenen Stäben nur ganz bestimmte Kräfte zukommen, bei deren Ermittelung wir von der Formänderung des ganzen Fachwerkes ausgehen müssen.

Der in Fig. 1 dargestellte Fachwerkring sei von den äussern Kräften $P_1$, $P_2$ . . . . beansprucht, welche im Gleichgewicht stehen, d. h. ihr Kräftepolygon und ihr Seilpolygon

Fig. 1 und Fig. 1a.




schliessen sich. Wir denken uns nun den Ring an irgend einer Stelle, z. B. $C - C$, durchschnitten. Den linksseitigen Anschluss an $C - C$ halten wir fest und sehen zu, wie sich der rechtsseitige Anschluss in Folge der äussern Kräfte $P_1$, $P_2$ . . . . deformiert. Ist diese Deformation erfolgt, so müssen die durch den Schnitt getroffenen Stabkräfte $O$, $D$ und $U$, bezw. deren Resultierende $R$, die Bewegung wieder rückgängig machen und die beiden Schnittenden wieder zur Deckung bringen. Dies ist die Bedingung, aus welcher sich die Ermittelung der richtigen Kräfte $O$, $D$ und $U$, bezw. deren Resultierende $R$, samt der Lage der letzteren, durchführen lässt.

Durch irgend einen Punkt des Schnittes $C - C$ legen wir ein Achsensystem $x - y$, auf welches System wir die Deformation des rechtsseitigen Schnittendes beziehen.

Von den Stäben des Ringes sei nun zunächst bloss ein einziger, z. B. der Stab $AB$ elastisch. Dann wird unter dem Einfluss der Kraft $P_2$ z. B. der rechts von $D_r$, dem Drehpunkte von $AB$, gelegene Teil des Fachwerkes eine kleine Drehung um $D_r$ machen, während der links von $D_r$ befindliche Fachwerksteil in Ruhe bleibt. Die Grösse der Drehung lässt sich ermitteln aus der Deformation des Stabes $AB$. Die Stabkraft selbst ist $\frac{P_2 \cdot r}{a}$

und somit: $$\varDelta s = \frac{P_2 \cdot r}{a} \cdot \frac{s}{F \cdot E}$$

($a$ = Hebelarm, $s$ = Stablänge, $F$ = Querschnitt des Stabes, $E$ = Elasticitätsmodul.)

Bezeichnen wir den Drehungswinkel mit $\varDelta\delta$, so wird gemäss Fig. 1a, indem man den Weg $BB_1$ auf $AB$ projiciert und so ähnliche Dreiecke herstellt:

$$BB_1 : \varDelta s = D_r B : a.$$

Wegen der Kleinheit der Deformation dürfen wir $BB_1 = D_r B \,.\, \varDelta\delta$ setzen, somit:

$$D_r B \cdot \varDelta\delta : \varDelta s = D_r B : a$$

oder $$\varDelta\delta = \frac{\varDelta s}{a}.$$

Hierin noch den obigen Wert von $\varDelta s$ eingesetzt, giebt dies:

$$\underline{\underline{\varDelta\delta}} = \frac{P_2 \,.\, r \,.\, s}{F \,.\, E \,.\, a^2} \quad . \;.\; .\; .\; .\; . \quad (1)$$

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man an Stelle eines äussern Gurtes einen innern setzt, oder einen Diagonalstab.

Die Koordinaten von $D_r$ in bezug auf unser Achsensystem seien $y$ und $x$. Infolge der Drehung $\varDelta\delta$ wird sich also die Verschiebung des Koordinatenanfanges ermitteln zu:

$$\underline{\varDelta h} = y \cdot \varDelta\delta$$
$$\underline{\varDelta v} = x \cdot \varDelta\delta$$

oder $$\underline{\underline{\varDelta h}} = P_2 \cdot r \cdot y \cdot \frac{s}{FE \,.\, a^2} \quad . \;.\; .\; . \quad (2)$$

$$\underline{\underline{\varDelta v}} = P_2 \cdot r \cdot x \cdot \frac{s}{FE \,.\, a^2} \quad . \;.\; .\; . \quad (3)$$

Jetzt ist es leicht, auf die Formänderung der ganzen Konstruktion überzugehen, indem man die eben gemachte Untersuchung auf sämtliche von $P_2$ beeinflusste Ringstäbe ausdehnt. Es ist dies der vom fest gehaltenen Ringende an bis zur Kraft $P_2$ sich erstreckende Fachwerkteil (in Fig. 2 schraffiert.) Die Einzelverschiebungen und Einzeldrehungen infolge Deformation dieser Partie addieren sich einfach, und es wird:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\delta} &= \Sigma_o^f \varDelta\delta = P_2 \, \Sigma_o^f r \cdot \frac{s}{FEa^2} \\ \underline{h} &= \Sigma_o^f \varDelta h = P_2 \, \Sigma_o^f r \cdot y \cdot \frac{s}{FEa^2} \\ \underline{v} &= \Sigma_o^f \varDelta v = P_2 \, \Sigma_o^f r \cdot x \cdot \frac{s}{FEa^2} \end{aligned}\right\} \quad . \;.\; . \quad (4)$$

Wir nennen den Ausdruck $\frac{s}{F \,.\, E \,.\, a^2}$ eines Stabes sein *elastisches Gewicht* und bezeichnen ihn mit $\varDelta g$, ferner $\Sigma_o^f \varDelta g = G_2$. Denkt man sich diese elastischen Gewichte $\varDelta g$ in den Drehpunkten der einzelnen Stäbe wirkend, so bedeutet:

$$\Sigma_o^f r \cdot \frac{s}{F.E.a^2} = \Sigma_o^f r \cdot \varDelta g$$

das *statische Moment* aller $\varDelta g$ von $o - f$ bezüglich der *Richtung der äussern Kraft* $P_2$,

ferner: $$\Sigma_o^f r \cdot y \cdot \frac{s}{F.\,E.a^2} = \Sigma_o^f r \cdot y \cdot \varDelta g$$

das *Centrifugalmoment* aller $\varDelta g$ von $o - f$ bezüglich der *Richtung der äusseren Kraft* und bezüglich der *x-Achse*,

und drittens: $$\Sigma_o^f r \cdot x \cdot \frac{s}{F\,Ea^2} = \Sigma_o^f r \,.\, x \,.\, \varDelta g$$

das *Centrifugalmoment* aller $\varDelta g$ von $o - f$ bezüglich der *Kraftrichtung* und der *y-Achse.*

Das statische Moment und die Centrifugalmomente der Gewichte der Ringpartie $o - f$ bezüglich beliebiger Achsen lassen sich sehr einfach darstellen, indem man mit Hülfe der $\varDelta g$, in den einzelnen Drehpunkten wirkend, eine

*Centralellipse* zeichnet (Fig. 2), analog wie man für jede geschlossene ebene Figur eine Centralellipse zeichnen kann. Diese Ellipse lässt sich sowohl analytisch leicht berechnen, als auch graphisch mittelst fünf Seilpolygonen konstruieren. Für die Ringpartie *o — f* sei dieselbe gegeben samt ihrem Mittelpunkt $S_2$. Dann ist sofort:

$$\Sigma_o^f r \, \Delta g = G_2 \, . \, r_2 .$$

Ferner wenden wir den bekannten Culmann'schen Satz an: (vergl. Culman, Graphische Statik, II. Auflage, p. 404.)

*Das Centrifugalmoment irgend einer ebenen Figur bezüglich zweier beliebiger Achsen ist gleich dem Flächeninhalte der Figur mal der Entfernung des Schwerpunktes von der einen Achse, mal der Entfernung des Antipoles dieser Achse von der zweiten.*

In unserem Falle ist der Flächeninhalt der Figur identisch mit $\Sigma_o^f \Delta g = G_2$, somit, wenn $A_2$ der Antipol bezüglich der Kraftrichtung $P_2$, ist:

$$\Sigma_o^f \Delta g \, r \, . \, y = G_2 \, . \, r_2 \, . \, y_2$$

und

$$\Sigma_o^f \Delta g \, r \, x = G_2 \, r_2 \, . \, x_2 .$$

So einfach nun diese Thatsache ist, so umständlich ist es doch, besonders bei vielen Kräften, für die verschiedenen Ringpartien *o — a, o — b. . . . . o — g*, und schliesslich für den ganzen Ring die einzelnen Centralellipsen zu konstruieren. Wir müssen daher suchen, die Antipolpunkte $A_1$, $A_2$ . . . . bezw. deren Koordinaten $x_1 \; y_1$, $x_2 \; y_2$ . . . . auf anderem Wege zu ermitteln.

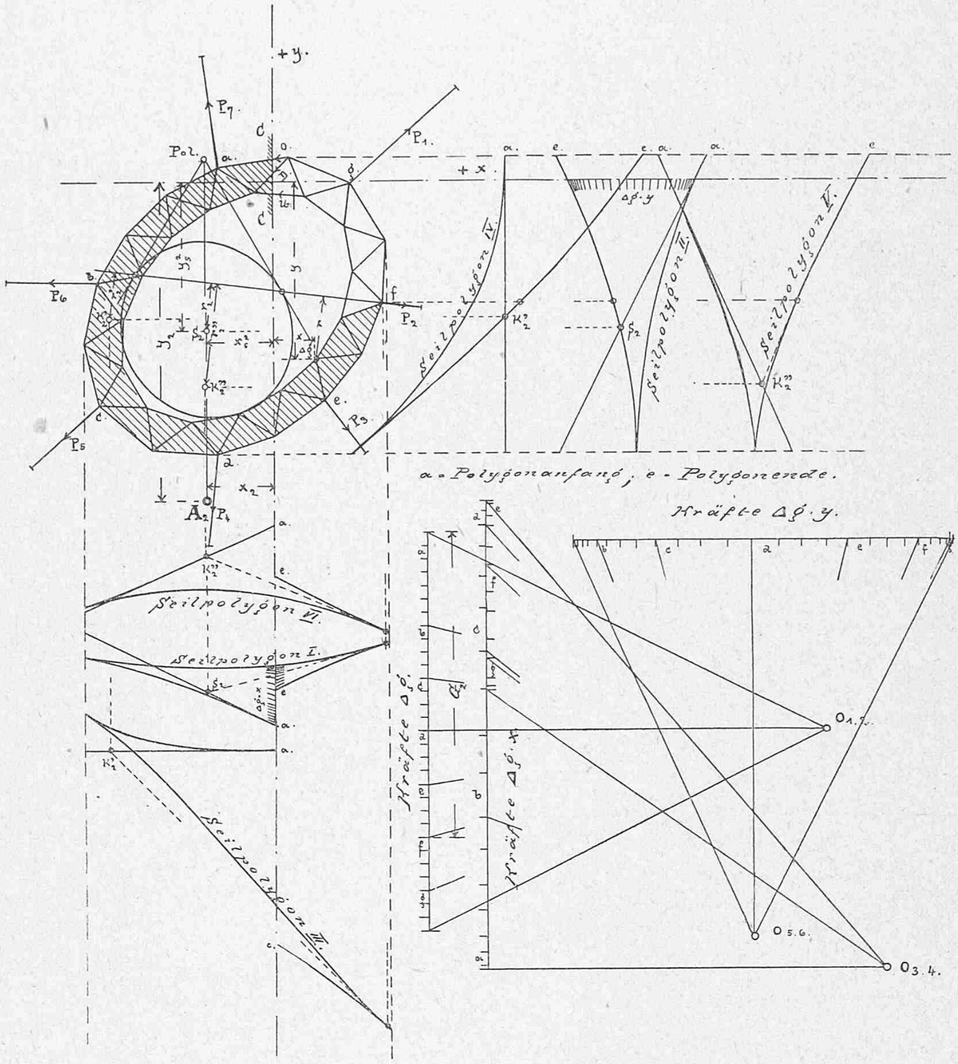
Dies ist in Fig. 2 geschehen, wobei speciell für die Ringpartie *o—f* mit der äussern Kraft $P_2$ die einzelnen fraglichen Strecken und Punkte ermittelt sind.

Nachdem die elastischen Gewichte $\Delta g$ für den ganzen Ring berechnet (es genügt in den meisten praktischen Fällen, dieselben bloss für die Gurten zu bilden und die Diagonalen zu vernachlässigen), trägt man dieselben in irgend einem Masstabe in einem Kräftepolygon auf und konstruiert mit irgend einem beliebigen Pole $O_{1.2}$ die Seilpolygone I. und II. Im ersten wirken die Kräfte $\Delta g$ vertikal, im zweiten horizontal; es stehen also die Seilpolygonseiten von II. normal zu den Strahlen aus $O_{1.2}$. Der Schwerpunkt der Ringpartie *o — f* findet sich, indem man in beiden Polygonen die erste Tangente und diejenige in *f* zum Schnitte bringt und diese Schnitte in die Ringfigur überträgt. Mit $S_2$ ist auch die Grösse $r_2$ gefunden und:

$$\underline{\underline{\delta}} = \underline{P_2 \, G_2 \, r_2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

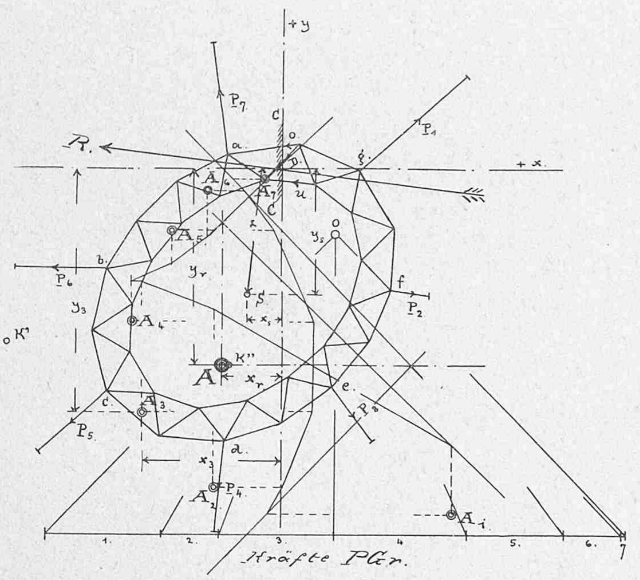
Zur Ermittelung der Centrifugalmomente bedürfen wir der Ausdrücke $\Sigma_o^f \Delta g \, . \, r \, . \, y$ und $\Sigma_o^f \Delta g \, . \, r \, . \, x$. Die Grössen $y \, . \, \Delta g$ und $x \, . \, \Delta g$ kommen dabei bei jeder äussern Kraft und jeder Ringpartie wieder vor, wir können dieselben also sofort von vornherein berechnen. In Fig. 2 sind dieselben auch graphisch konstruiert als Abschnitte der Seilpolygon-Seiten von Polygon I und II auf den Koordinatenachsen. Jedoch bilden sich auf diese Weise die Gewichtsmomente bezüglich der Achsen nur sehr klein und daher ungenau, so dass es sich empfiehlt, diese einfachen Produkte rechnerisch durchzuführen und dann separat in grösserem Masstabe aufzutragen, wie es Fig. 2 rechts unten

Fig. 2.



zeigt. Dem wechselnden Vorzeichen von $x$ und $y$ entsprechend werden die $x \,.\, \varDelta g$ und $y \,.\, \varDelta g$ zum Teil positiv, zum Teil negativ, was beim Auftragen zu beachten ist. Wir betrachten diese Produkte als weitere Kräfte und lassen sie wieder in den Drehpunkten der einzelnen Stäbe wirken und zwar auch wieder vertikal und horizontal. Die zur Konstruktion der dadurch entstehenden Seilpolygone nötigen Pole sind $O_{3.4}$ und $O_{5.6}$ und sind in beliebiger Poldistanz von der Kräftelinie gewählt.

Fig. 3.




Mit Hülfe von Seilpolygon III und IV ist es jetzt möglich, den Schwerpunkt der Produkte $\varDelta g \,.\, x$ für eine beliebige Ringpartie zu finden. Für die Ringpartie $o-f$ sei derselbe in $K_2'$ gefunden, als Schnitt der Tangenten am Ende und in Punkt $f$ der zwei genannten Seilpolygone.

In analoger Weise lässt sich für die Ringpartie $o-f$ der Schwerpunkt aller $\varDelta g \,.\, y$ finden, er sei $K_2''$ und seine Distanz von der Kraftrichtung $r_2''$. Dann ist:

$$\Sigma_o^f \varDelta g\, y\, r = r_2'' \, \Sigma_o^f \varDelta g\, y$$
$$= G_2\, r_2'' \,.\, y_s^2,$$

und durch Gleichsetzung mit obigem Werte:

$$G_2\, r_2 \,.\, y_2 = G_2\, r_2''\, y_s^2.$$

$$\underline{y_2} = \frac{r_2'' \,.\, y_s^2}{r_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Damit ist auch die Ordinate von $A_2$ gefunden.

Man sieht, dass, wenn die sechs Seilpolygone für den ganzen Ring gezeichnet sind, es einfach der Verlängerung von Seiten derselben bedarf, um auf einfachste Weise für jede Ringpartie die Punkte $S$, $K'$ und $K''$ zu ermitteln. Sind dieselben gefunden, so sind deren Abstände von der Kraftrichtung und von den Koordinatenachsen die Werte $r$, $r'$ $r''$ und $x_s$ und $y_s$. Nach Gleichung (6) und (7) lassen sich dann die Koordinaten $x$ und $y$ der Antipole bestimmen. Obacht ist dabei nur noch zu geben, in welchem Quadranten $A$ liegt. Hiebei gilt zunächst, dass Antipol und Kraftrichtung immer auf entgegengesetzten Seiten von $S$ liegen. Da weiter $x_s$ und $y_s$ dem Vorzeichen nach bekannt sind, ist es nur noch fraglich bezüglich des Vorzeichens von $r$, $r'$ und $r''$. Hiebei gilt jeweilen die Kraftrichtung als Achse; sind $r$ und $r'$, oder $r$ und $r''$, auf derselben Seite der Kraftrichtung, so sind sie mit demselben Zeichen einzuführen; liegen sie entgegengesetzt, so haben sie verschiedenes Vorzeichen. Dass sich die Ordinaten der Antipole gemäss den Gleichungen (6) und (7) aus den einzelnen Strecken $r$, $r'$ .... auch graphisch, durch Konstruktion ähnlicher Dreiecke, ermitteln lassen, braucht wohl nur erwähnt zu werden.

In Fig. 3 seien nun auf die eben beschriebene Weise die Antipole für die verschiedenen Ringpartien gefunden, und zwar:

$A_1$ zu $P_1$ für die Ringpartie $o-g$: $x_1$, $y_1$, $r_1$, $G_1$.
$A_2$ zu $P_2$ für die Ringpartie $o-f$: $x_2$, $y_2$, $r_2$, $G_2$.
$A_3$ zu $P_3$ für die Ringpartie $o-e$: $x_3$, $y_3$, $r_3$, $G_3$ u. s. w.

Fig. 4.

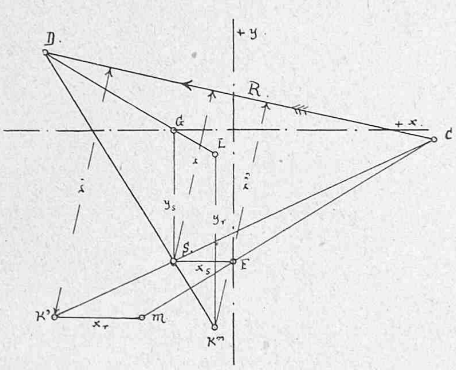
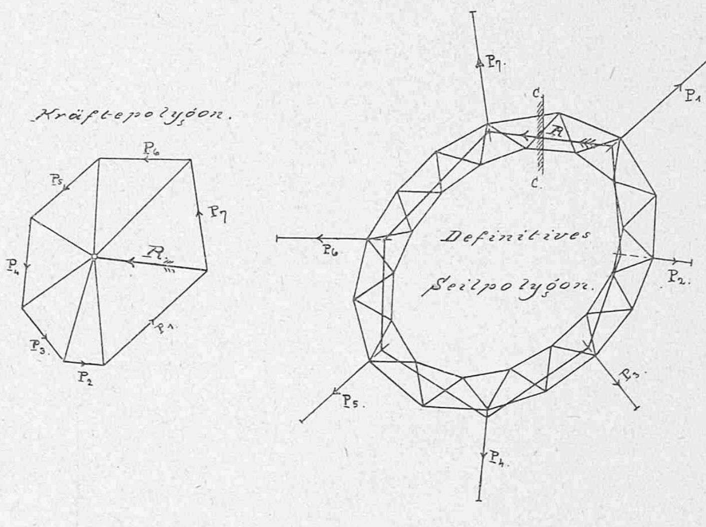


Fig. 5.




Dann ist:

$$\Sigma_o^f \varDelta g\, x \,.\, r = r_2' \,.\, \Sigma_o^f \varDelta g\, x.$$

$\Sigma_o^f \varDelta g\, x$ ist aber gleich $G_2\, x_s^2$, somit:

$$\Sigma_o^f \varDelta g\, x\, r = G_2\, r_2' \,.\, x_s^2,$$

und durch Vergleich mit obigem Ausdrucke von $\Sigma_o^f \varDelta g\, r\, x$ erhält man:

$$G_2\, r_2\, x_2 = G_2\, r_2' \,.\, x_s^2.$$

$$\underline{x_2} = \frac{r_2' \,.\, x_s^2}{r_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wodurch die Abscisse von $A_2$ gefunden ist.

Der Schwerpunkt aller $\varDelta g$ sei $S$, die Summe aller $\varDelta g = G$. Ferner sei $R$ die Resultierende der durchschnittenen Stäbe, $r$ deren Entfernung von $S$, $y_r$ und $x_r$ die Ordinaten des Antipoles $A$ von $R$ bezüglich der Centralellipse des ganzen Ringes.

Die Bewegungen, welche das freie Ringende infolge der Kräfte $P_1$, $P_2$ .... ausführt, sind:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, \delta &= \Sigma\, P\, G\, r \\ \Sigma\, h &= \Sigma\, P\, G\, r\, y \\ \Sigma\, v &= \Sigma\, P\, G\, r\, x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dieselben Bewegungen, nur in entgegengesetztem Sinne, muss die Kraft $R$ durch Einwirkung auf den ganzen Ring hervorbringen, wenn die durchschnittenen Ringenden wieder zum Kontakt kommen sollen. $R$ beeinflusst den ganzen Ring, somit:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\delta &= R \,.\, r \,.\, G \\ \Sigma h &= R \,.\, r \,.\, G \,.\, y_r \\ \Sigma v &= R \,.\, r \,.\, G \,.\, x_r \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} R\, r\, G &= \Sigma P G r \\ R\, r\, G\, y_r &= \Sigma P G r y \\ R\, r\, G\, x_r &= \Sigma P G r x \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

woraus sich die Koordinaten $y_r$ und $x_r$ von $A$ ergeben zu:

$$\underline{y_r} = \frac{\Sigma P G r y}{\Sigma P G r} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$$\underline{x_r} = \frac{\Sigma P G r x}{\Sigma P G r} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Die rechtsseitigen Ausdrücke für $y_r$ und $x_r$ lehren uns, auf welch einfache Weise sich $A$ graphisch finden lässt. $A$ ist nichts anderes als der *Schwerpunkt aller* $P\,G\,r$. Um $A$ graphisch zu ermitteln, lässt man in jedem der einzelnen Antipole die zugehörige Grösse $P\,G\,r$ horizontal und vertikal wirken und zeichnet zwei Seilpolygone. Der Schnitt der ersten und letzten Seilpolygonseiten ergiebt, in die Figur übertragen, den Punkt $A$ (Fig. 3). Haben dabei die Ausdrücke $P\,G\,r$ verschiedenen Drehungssinn, so ist dies beim Auftragen im Kräftepolygon zu berücksichtigen.

Die Lage der Antipolaren zu $A$, die Kraftrichtung $R$, findet sich auf folgende Weise. Analog wie für die einzelnen Ringpartien konstruieren wir die Punkte $K'$ und $K''$ für den ganzen Ring, also die Schwerpunkte aller $\varDelta g \,.\, x$ und $\varDelta g \,.\, y$. Die zunächst unbekannten Abstände von $K'$ und $K''$ von $R$ seien $r'$ und $r''$, dann ist nach Gleichung (6) und (7):

$$x_r = \frac{r' \,.\, x_s}{r}$$

$$y_r = \frac{r'' \,.\, y_s}{r}$$

bezw.: $$\frac{r'}{r} = \frac{x_r}{x_s}; \quad \frac{r''}{r} = \frac{y_r}{y_s}.$$

Von allen Grössen sind uns $x_r$ und $y_r$, $x_s$ und $y_s$ bekannt, ferner sind die Punkte $K'$ und $K''$ in der Zeichnung durch ihre Lage fest gelegt. Dies genügt, die Grössen $r'$ $r''$ und $r$ graphisch zu bilden (Fig. 4). Man trage $x_r$ horizontal von $K'$ aus auf und ziehe die Geraden $K'S$ und $MF$, ihr Schnitt sei $C$. Ferner trage man $y_r$ vertikal über $K''$ auf und ziehe die Geraden $K''S$ und $LG$, ihr Schnitt sei $D$. Dann ist $CD$ die gesuchte Lage von $R$. Der Beweis dieser Konstruktion ist einfach, denn es ist:

$$\frac{r'}{r} = \frac{K'C}{SC} = \frac{x_r}{x_s}$$

$$\frac{r''}{r} = \frac{K''D}{SD} = \frac{y_r}{y_s},$$

also die obigen Ausdrücke.

Nachdem die Lage der Kraft $R$ gefunden, finden wir noch ihre Grösse aus Gleichung (10) zu:

$$\underline{R} = \frac{\Sigma P G r}{G \,.\, r} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

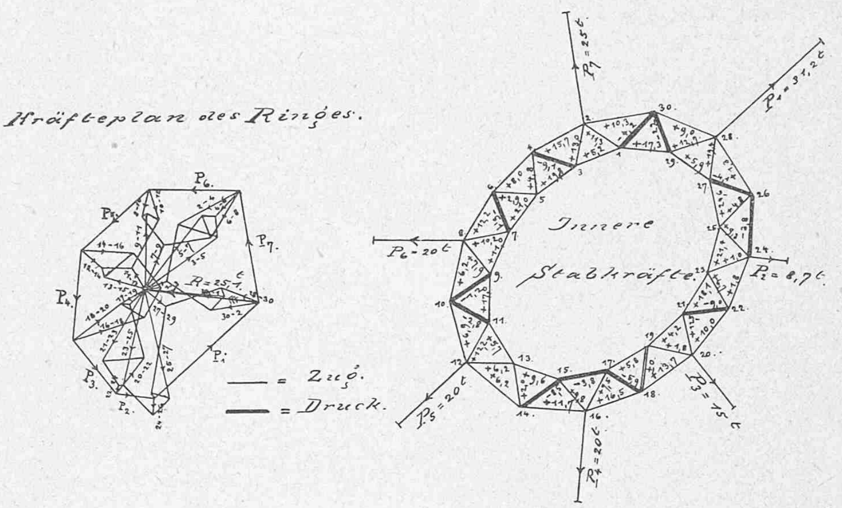
wobei beim Ausdrucke im Zähler wieder der Drehungssinn Berücksichtigung zu finden hat.

Mit der Ermittelung von $R$ nach Grösse und Lage ist die vorliegende Aufgabe gelöst. Zerlegt man $R$ noch nach der Richtung der drei durchschnittenen Stäbe $O$, $D$ und $U$, so ist es jetzt möglich, den richtigen Cremonaplan für den ganzen Ring durchzuführen.

Speziell für das in den Figuren 1—3 dargestellte Beispiel, bei welchem der Einfachheit halber alle $\varDelta g$ gleich gross angenommen wurden, erhält $R$ die in Fig. 5 dargestellte Lage und Grösse. Ist $R$ gefunden, so lässt sich im Ring sofort das *definitive Seilpolygon* zeichnen. Der Cremonaplan erhält die in Fig. 6 dargestellte Gestalt. Für die eingeschriebenen Grössen der äussern Kräfte sind die entsprechenden inneren Stabkräfte in die Figur eingetragen. Zur bessern Uebersicht sind die Druckstäbe stark, die Zugstäbe schwach ausgezogen. Dass scharfes und exaktes Zeichnen bei den verschiedenen besprochenen Konstruktionen durchwegs am Platze ist, braucht wohl nicht besonders betont werden.

Das Anwendungsgebiet der vorliegenden Aufgabe dürfte ein ziemlich grosses sein. Zunächst schliesst die Behandlung des durchschnittenen Ringes die Lösung der Berechnung des dreifach statisch unbestimmten Bogens mit Flächenauflager vollständig in sich. Ferner tritt die Frage nach den innern Stabspannungen eines Fachwerkringes namentlich bei Brückenquerrahmen, Brückenportalen etc. auf. Auch bei den Absteifungsringen von Tunnelvortrieben, den horizontalen Absteifungsringen hoher, runder Caissons kann die vorliegende Aufgabe vorkommen, ebenso zeigen oft hohe Türme Fachwerkringe als Absteifung in den einzelnen Stockwerken.

Fig. 6.




Besteht der Ring nicht aus Fachwerk, sondern bloss aus einzelnen Stäben oder Blechbalken, die in den Ecken starr vernietet sind, so ändert sich das Verfahren wesentlich. Prof. *W. Ritter* in Zürich hat für diesen Fall eines *belasteten Stabringes* das graphische Verfahren mit Hülfe von Elasticitätsellipsen entwickelt (vergl. „Schweizerische Bauzeitung" 1891, Bd. XVII p. 13). Wir möchten nicht schliessen, ohne auf die elegante Lösung dieser Aufgabe hingewiesen zu haben.

## Collège de Boudry près Neuchâtel.

*Monsieur le Rédacteur,*

Vous avez publié au cours de ces dernières années plusieurs plans de bâtiments scolaires érigés dans diverses contrées de la Suisse allemande et il vous a paru intéressant de continuer la série en présentant à vos lecteurs un type pris en Suisse romande.

Dans le canton de Neuchâtel le choix en serait grand, le nombre des collèges construits depuis peu de temps est considérable.

Celui de Boudry, petite ville près de Neuchâtel, est le plus récent; destiné à l'enseignement primaire pour filles et garçons, il renferme onze salles dont deux pour travaux manuels, ces dernières dans les combles des ailes, éclairées d'en