

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 23/24 (1894)  
**Heft:** 17

**Artikel:** Ueber die Regulierung von Turbinen  
**Autor:** Stodola, Aurel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18670>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Ueber die Regulierung von Turbinen. — Die Bruchprobe der Eisenbahnbrücke in Wohlhusen. — Miscellanea: Winterbetrieb auf Zahnradbahnen. Elektrotechnischer Unterricht am eidg. Polytechnikum. Unfall an einer schwebenden Drahtseilbahn. Die 34. Jahresversammlung des deutschen Vereins von Gas- und Wasserfachmännern. — Preisaus-

schreiben: Verein deutscher Eisenbahn-Verwaltungen. — Konkurrenzen: Synagoge in Köln. — Vereinsnachrichten: Einladungsschreiben des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine an den Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein. Stellenvermittlung.

## Ueber die Regulierung von Turbinen.

Von *Aurel Stodola*, Professor am eidgenössischen Polytechnikum.

Die über diesen Gegenstand im letzten Bande der Schweizerischen Bauzeitung veröffentlichte Studie des Verfassers stellt eine erste Uebersicht über die bei der Regulierung von Turbinen in Betracht zu ziehenden prinzipiellen Momente dar. Wie am Schlusse der Abhandlung hervorgehoben, bedarf dieselbe einer Ergänzung, namentlich in zwei Beziehungen: erstens betreffend die Wirkung einer Oelbremse, zweitens, im Zusammenhange hiemit, bezüglich der Trägheit des in Wirklichkeit nie masselosen Regulators. Im Nachfolgenden soll der Einfluss insbesondere dieser beiden Faktoren ins Auge gefasst werden.

Dank einem ausserordentlich aner kennenswerten Entgegenkommen des Hauses Escher Wyss & Cie. und des Herrn Ing. Peter, Direktor des städt. Wasserwerkes, ist der Verfasser in der Lage, auch über Versuche an einer kleinen Probeturbine zu berichten. Es wurde ein sogen. Löffelrad von 300 mm Durchmesser, System Escher Wyss & Cie., von der genannten Maschinenfabrik in ihren neuen, im Hard gelegenen Werkstätten aufgestellt, während Herr Direktor Peter dazu eine ungefähr 200 m lange Leitung aus gusseisernen Muffenröhren von 70 mm Durchmesser montieren liess, da die an der Versuchsturbine zu gewinnenden Erfahrungen eine Nutzenanwendung finden sollten bei künftigen Erweiterungen der Motorenanlage im städt. Wasserwerk. Das Triebwasser wurde abwechselnd dem Fabrikreservoir und der städtischen Leitung entnommen, entsprechend einem Druck von 28 bzw. 45—60 m. Die Turbine konnte mittelst eines Prony'schen Zaumes gebremst werden; für gewöhnlich benutzte man eine feste Backenbremse, die leichter als der Pronysche Zaum eine momentane Aenderung der Belastung zu bewirken gestattet. Es war ein Windkessel von etwa 700 mm Durchm., 1400 mm Länge vorgesehen, welcher mittelst der Dampfspeisepumpe im Kesselhaus aufgefüllt werden konnte. Durch Umschaltventile war die Möglichkeit geboten, mit kleiner oder grosser Leitungslänge zu arbeiten; die Variation der Schwungmasse erfolgte durch wechselweises Aufkeilen von kleineren und grösseren Schwungrädchen auf die Turbinenachse.

Die Versuche sollten vor allem die Wirksamkeit eines Windkessels praktisch darthun, da von mancher Seite aus der Praxis die Meinung ausgesprochen worden war, dass ein Windkessel unter allen Umständen zu zunehmenden Schwankungen führen müsse. Der Versuch bewies, dass diese Meinung eine irrige ist, dass vielmehr der Windkessel in der That schon von mässigen Grössen an ausserordentlich günstig wirkt. Die Turbine arbeitete meist mit einer Belastung von etwa 1 P. S., und es genügten schon 10—15 l Luftinhalt, um insbesondere die Druckschwankungen auf einen sehr kleinen Betrag zu reduzieren. In Uebereinstimmung mit der Theorie führte der Versuch auch auf folgende sehr interessante und wohl wenigen bekannte Erscheinung. Während bei mässigem Luftinhalt bei einer plötzlichen Absper rung der Leitung durch die Regulierung der Ausgleich der Geschwindigkeit sich in Form von Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollzog, war von einer bestimmten Grösse des Luftraumes an von solchen Schwingungen nichts mehr zu bemerken. Der Druck ging vom Anfangswerte in asymptotischer Weise in den Endwert über. Diese Erscheinung macht es plausibel, warum an einer Turbine, durch Vergrösserung des Windkessels, die Schwingungen reduziert und zuletzt ganz aufgehoben werden können. Eine ziffernmässige Ausnützung des Materials ist wegen Zeitmangel noch nicht erfolgt, auch ist dieselbe, wie man sehen wird, keineswegs einfach.

Der Versuch zeigte aber auch, dass eine Reduktion des Schwunggewichtes nur bis zu einer bestimmten Grenze möglich ist, darüber hinaus fruchtete eine Vergrösserung des Luftraumes nichts mehr. Der Grund für dieses Verhalten konnte nur darin liegen, dass, entgegen den in der ersten Behandlung des Problems gemachten Vereinfachungen,

1. der Regulator nicht masselos ist, also einen nicht vernachlässigbaren Trägheitswiderstand aufweist;
2. der Hilfsmotor nicht momentan wirkt;
3. der Windkessel nicht in unmittelbarer Nähe des Leitapparates aufgestellt werden konnte.

Der Verfasser unternahm es deshalb, die Wirkung auch dieser Faktoren rechnerisch zu untersuchen, und gelangte zu den hier mitzuteilenden Resultaten, welche, wie gleich bemerkt werden soll, durch den Versuch in glänzender Weise bestätigt wurden. Die Turbine ist mit einem leichten, rasch laufenden Federregulator versehen, wie er vom Hause Escher Wyss & Cie. seit Jahren gebaut wird, dessen Masse etwa zehnmal geringer ist, wie die eines Gewichtregulators, und deshalb zuerst, anscheinend mit Recht, für vernachlässigbar angesehen wurde. Da indessen schon Vischnegradsky in der früher citierten Abhandlung nachgewiesen hatte, dass die Trägheit der Regulatormassen durch eine Bremse kompensiert werden muss, lag es nahe, auch hier, trotz der Kombination mit Leitung und Windkessel, eine ähnliche Wirkung zu erwarten. Diese Vermutung wurde durch die Rechnung und das Experiment bestätigt. Nachdem man am Regulator eine Oelbremse angebracht hatte, **war es in der That möglich, die Schwungmassen auf das erreichbare Minimum, d. h. auf die Masse des Laufrades allein zu reduzieren.**

Man kann nun nachweisen, dass die Oelbremse nicht bloss zum Ausgleich der Massenträgheit notwendig ist, sondern, auch in Begleitung eines idealen Regulators, das beste Mittel für die Herabsetzung der Schwankungen bildet und sich dabei in einem eigentümlichen Gegensatz zum „langsam wirkenden Hilfsmotor“ befindet, von dem man doch der unmittelbaren Anschauung nach einen ähnlichen Einfluss erwarten würde.

Im folgenden wird der erste Teil dieser Arbeit als bekannt vorausgesetzt und die dort benutzte Bezeichnung auch hier beibehalten.

### I. Hauptgleichungen.

1. Die Regulatormassen werden unter dem Einfluss der durch eine Geschwindigkeitsvariation hervorgerufenen „Energie“ (besser „Stellkraft“) eine Geschwindigkeit und damit eine lebendige Kraft annehmen, welche sie zwingt, über die Gleichgewichtslage hinauszuschlagen.

Der Regulator kann hier als ein beliebiger, mit Massen ausgestatteter, zwangsläufiger Mechanismus gedacht werden, der um eine Achse rotiert, und dabei der Einwirkung der Schwere, der Fliehkräfte und gewisser innerer, z. B. Federkräfte unterworfen ist. Er hat der Bedingung zu genügen, dass sein Gleichgewicht innerhalb des benutzten Ausschlages ein stabiles sei.

Es bezeichne:

- $m$ , ein beliebiges kleines Massenpartikel des Regulators,
- $y$ , den Abstand dieses Partikels von der Achse,
- $\omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit der Achse,
- $F = my\omega_0^2$  die auf das Partikel wirkende Fliehkraft,
- $F' = my(\omega_0 + \Delta\omega)^2$  die der Aenderung von  $\omega_0$  auf  $\omega_0 + \Delta\omega$  entsprechende Fliehkraft,
- $E$ , die Stellkraft, d. h. die Kraft, welche an einem bestimmten, „Hülse“ genannten Punkt des Regulators angreifen muss, um das Gleichgewicht der Kräfte bei der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0 + \Delta\omega$  herzustellen,





$$T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_o w' - x = 0 \quad (62a)$$

Die Koeffizienten  $T$  und  $T'$  haben die Dimension einer Zeit, und es ist insbesondere  $T$  ein Mass für das Verhältnis der Regulatormasse zur „Energie“;  $T'$  ein Mass für das Verhältnis des Kataraktwiderstandes zur Energie.

4. Der Regulator sei versehen mit einem langsam wirkenden Hilfsmotor. Es finden dann die Formeln (30)–(33) des ersten Teiles Anwendung, mit folgenden kleinen Modifikationen: die Variable  $w$  sei definiert durch die Gleichung

$$\frac{s' - s_o'}{s_r} = \frac{1}{\delta_o} w \quad (63)$$

dann ist

$$\frac{ds'}{dt} = \sigma_o \frac{s - s'}{s_r} = \sigma_o \left[ \frac{s - s_o}{s_r} + \frac{s_o - s'}{s_r} \right] = \sigma_o \left[ w' - \frac{1}{\delta_o} w \right]$$

und mit der Bezeichnung

$$T_o = \frac{s_r}{\sigma_o} \quad (63a)$$

die Bewegungsgleichung

$$T_o \frac{dw}{dt} + w - \delta_o w' = 0 \quad (64)$$

5. Die Bewegung des Laufrades ist zu beurteilen wie in Abschnitt II beim „langsam wirkenden Hilfsmotor“; es gilt also Gleichung (2) in Gruppe (35)

$$T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_o w + x - \frac{3}{2} \chi = II \quad (65)$$

6. Zwischen Leitapparat und Windkessel befinde sich eine Rohrleitung, für welche bezeichnen mögen

- $L'$  die Länge,
- $F'$  den konstanten Querschnitt,
- $d'$  „ „ Durchmesser,
- $p$  „ Ueberdruck am Leitapparat,
- $p'$  „ „ im Windkessel,
- $c'$  die Geschwindigkeit,
- $p_o, p_o', c_o'$  die Anfangswerte von  $p, p', c'$ ,
- $\chi' = (p' - p_o') : p_o$  die Pressungsänderung im Windkessel, in Teilen von  $p_o$ ,
- $y' = (c' - c_o') : c_o'$  die Geschwindigkeitsänderung in Teilen von  $c_o'$ ,
- $\xi = \frac{L'}{d'} \frac{c'^2}{2g}$  die Reibungshöhe, inklusive Krümmer etc.

Das Wasserniveau im Windkessel wird in einer Höhe mit der Leitradmündung vorausgesetzt.

Die Gleichung der lebendigen Kraft, angewendet auf das Rohrstück  $L'$  (bis knapp zum Leitapparat) gibt dann

$$T_2' \frac{dy'}{dt} = \chi' - \chi - \epsilon' y'$$

$$\text{mit } T_2' = \frac{L'}{h_o} \frac{c_o'^2}{g} \quad \epsilon' = \left( 1 + \xi \frac{L'}{d'} \right) \frac{c_o'^2}{h_o g} \quad (66)$$

7. Die Gleichung, welche aussagt, dass der Abfluss aus dem Windkessel gleich ist der Summe aus dem Zufluss und der Ausdehnung des Luftvolumens, lautet

$$F_c + F \frac{dl}{dt} = F' c',$$

unter Beachtung, dass  $F c_o = F' c_o'$ , und nach Einführung der Variablen  $\chi', y, y'$  erhält man

$$T_3 \frac{dz'}{dt} = y - y',$$

wobei

$$T_3 = \frac{l_o}{c_o} \frac{p_o}{p_o' + p_a} \quad (67)$$

8. Für die Bewegung der Druckwassersäule gilt wie im ersten Teil

$$T_2 \frac{dy}{dt} + \epsilon y + \chi' = 0.$$

9. Die Kontinuitätsgleichung sagt aus, dass im Beharrungszustand der Zufluss und Abfluss gleich sind, und lautet

$$fu = F' c',$$

woraus bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung folgt

$$\alpha_o w + y' - \frac{1}{2} \chi = 0 \quad (68)$$

10. Die in 1. bis 9. entwickelten 7 Gleichungen reichen mit den Anfangsbedingungen hin, um die sieben Variablen

$w', w, x, y, \chi, y', \chi'$  zu bestimmen. Das Gleichungssystem lautet:

$$\left. \begin{aligned} T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_o w' - x &= 0 \\ T_o \frac{dw}{dt} + w - \delta_o w' &= 0 \\ T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_o w + x - \frac{3}{2} \chi &= II \\ T_2' \frac{dy'}{dt} + \epsilon' y' - \chi' + \chi &= 0 \\ T_2 \frac{dy}{dt} + \epsilon y + \chi' &= 0 \\ T_3 \frac{dz'}{dt} + y' - y &= 0 \\ \alpha_o w + y' - \frac{1}{2} \chi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

11. Die Integration dieses Gleichungssystems hat nach dem bekannten Schema zu erfolgen, welches im ersten Teil dieser Arbeit mehrfach verwendet wurde. Sie führt indessen auf eine charakteristische Gleichung 7. Grades, von deren allgemeiner Auflösung, also auch von der expliziten Darstellung der Funktionen  $w, w', \dots$  keine Rede sein kann. Von grosser Wichtigkeit wäre es nun, zumindest die Natur der Wurzeln, insbesondere das Vorzeichen ihres reellen Teiles konstatieren zu können. Wenn wir auch die komplexen Wurzeln nach diesem Vorzeichen kurzweg positiv oder negativ nennen, so kann man sagen, dass schon eine einzige positive Wurzel hinreicht, um die Variablen über alle Grenzen wachsen, oder die Amplitude der Oscillation endlos zunehmen zu lassen. Auch hier besteht also die Forderung, dass die charakteristische Gleichung nur negative Wurzeln enthalten dürfe.

Die Algebra war bis heute nicht im stande, auf die Frage, unter welchen Bedingungen die obige Forderung erfüllt sei, eine Antwort zu erteilen. Herr Prof. Hurwitz hatte nun die ausserordentliche Freundlichkeit, sich für dieses Problem zu interessieren, und entwickelte die im nachfolgenden mit seiner Erlaubnis mitgeteilten, höchst eleganten Lehrsätze, deren Begründung demnächst in den „Mathematischen Annalen“ veröffentlicht werden soll.

Es sei

$$c_o x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

eine Gleichung  $n$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten und es werde  $c_o > 0$  vorausgesetzt. Die Bedingung dafür, dass alle Wurzeln der Gleichung negative reelle Teile besitzen, lautet dann:

1. Es müssen sämtliche Koeffizienten der Gleichung  $> 0$  sein;

2. Es müssen die nach dem Schema

$$A_k = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots & c_{2k-1} \\ c_o & c_2 & c_4 & c_6 & \dots & c_{2k-2} \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & \dots & c_{2k-3} \\ 0 & c_o & c_2 & c_4 & \dots & c_{2k-4} \\ 0 & 0 & c_1 & c_3 & \dots & c_{2k-5} \\ 0 & 0 & c_o & c_2 & \dots & c_{2k-6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_k \end{vmatrix} \quad (70)$$

gebildeten  $n-2$  Determinanten, welche entstehen, wenn  $k$  successive die Werte 2, 3, 4,  $\dots$  ( $n-1$ ) annimmt, sämtlich positive Werte haben. Die Koeffizienten  $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots$  sind  $= 0$  zu setzen. Das Bildungsgesetz der Determinanten ist leicht zu übersehen, wenn man die 1., 3., 5.,  $\dots$ -te, sodann die 2., 4., 6.,  $\dots$ -te Zeile mit einander vergleicht.

Man ist hiernach im stande, aus probeweise angenommenen  $T, T', T_o, T_1, \dots$  und den daraus sich ergebenden Koeffizienten der charakteristischen Gleichung durch Berechnung der Hurwitz'schen Determinanten den Nachweis zu erbringen, ob in dem konkreten Fall nur negative Wurzeln vorkommen oder nicht. In diesem Sinne ist das Problem vollständig gelöst.

Bei der im gegenwärtigen Moment noch geringen Erfahrung in Bezug auf automatische Regulierung von Hochdruckturbinen wäre es sehr wichtig, allgemeine Beziehungen zwischen den Koeffizienten  $T, T', \dots$  aufstellen zu können,

welche diese Faktoren von vorneherein so zu berechnen gestattet, dass die charakteristische Gleichung keine positive Wurzel enthielte.

Da aber schon die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung komplizierte, aus den Konstanten  $T T' \dots$  gebildete Ausdrücke sind, wird es wohl schwer gelingen, in den noch viel verwickelteren Determinanten den Einfluss jedes einzelnen der  $T T' \dots$  zu verfolgen.

Man gelangt am ehesten zu einer gewissen Uebersicht durch Zerlegung der allgemeinen Aufgabe in einfachere Spezialfälle, indem man einzelne der Koeffizienten  $T T' \dots = 0$  setzt. Es ist wichtig zu bemerken, dass dieser Grenzübergang ohne weiteres zulässig ist.

Die Vereinfachung soll damit beginnen, dass  $T_2' = 0$   $\varepsilon' = 0$  gemacht werde. Man kann dann  $\gamma'$  und  $y'$  eliminieren, und erhält

$$\left. \begin{aligned} T^2 \frac{d^2 w'}{dt^2} + T' \frac{dw'}{dt} + \delta_o w' - x &= 0 \\ T_o \frac{dw}{dt} + w - \delta_o w' &= 0 \\ T_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_o w + x - \frac{3}{2} \gamma &= II \\ T_2 \frac{dy}{dt} + \varepsilon y + \gamma &= 0 \\ T_3 \frac{dz}{dt} - \alpha_o w - y + \frac{1}{2} \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

12. Es ist angemessen, auf die mechanische Bedeutung der Koeffizienten  $T_1 T_2 T_3, \varepsilon$  nochmals zurückzukommen.

$T T' T_o$  sind schon vorhin definiert worden, wir wollen kurzweg  $T$  auch als Regulatormasse und  $T'$  als Katarakt bezeichnen, ferner  $T_o$  neben Regulierungsdauer auch Verschleppung oder Verzögerung nennen.

Es sei

$$\frac{1}{\psi} = \frac{f_o}{f_1} \quad (72)$$

wo  $f_o$  wie früher den Leitradquerschnitt im Anfangszustand  $f_1$  denselben bei voller Oeffnung bezeichnet und es werde  $\frac{1}{\psi}$  der „Belastungsfaktor“ genannt, da die Belastung diesem Werte angenähert proportional ist. Da im Leerlauf immer noch mindestens 2—5% des Leitradquerschnittes  $f_1$  offen bleiben, wird  $\psi$  zwischen 1 und etwa 20—50 variieren. Die im ersten Teil  $\alpha_o$  benannte Grösse, dort als Mass der Astasie definiert, wird nach Formel (1) resp. (1<sup>b</sup>)

$$\alpha_o = \frac{f_1}{f_o} \frac{1}{\delta_o} = \frac{\psi}{\delta_o} \quad (73)$$

Wir schreiben nun  $T_1 = \frac{M v_o}{P_o} = 2 \left[ \frac{1}{2} M v_o^2 \right] : P_o v_o$  und erkennen aus dieser Form:

$\frac{1}{2} T_1$  ist das Verhältnis der lebendigen Kraft der Schwingmassen zur effektiven Leistung pro Sekunde.

Sodann war

$$T_2 = L c_o : h_o g = 2 \left[ \frac{1}{2} M_L c_o^2 \right] : [\gamma V_o h_o];$$

hierin bedeutet  $M_L$  die Wassermasse der ganzen Zuleitung,  $V_o$  das pro Sekunde abfliessende Wasservolumen, also  $\gamma V_o h_o$  die vor der Mündung verfügbare Arbeitsfähigkeit desselben, die wir kurz „absolute Leistung“ nennen wollen. Dies giebt die Definition

$\frac{1}{2} T_2$  ist das Verhältnis der „Leitungsenergie“ zur absoluten Leistung pro Sekunde.

Es war  $T_3 = l_o p_o : c_o (p_o + p_a)$ , bei grossen Gefällen können wir  $p_a$  neben  $p_o$  vernachlässigen, und schreiben  $T_3 = [F l_o p_o] : [F c_o p_o] = W p_o : \gamma V_o h_o$ , hierin ist  $W p_o$  die Arbeitsfähigkeit eines Accumulators von gleichem Volumen wie der Windkessel, und man kann sagen

$T_3$  ist das Verhältnis der Arbeitsfähigkeit eines dem Windkessel äquivalenten Accumulators zur absoluten Leistung pro Sekunde.

Schliesslich schreiben wir  $\varepsilon = 2 \left[ \gamma_r \frac{L}{d} \frac{c_o^2}{2 g} \right] : h_o$ ; der Klammerausdruck ist nach der Bezeichnungsweise der Hy-

draulik die „verlorene“ Druckhöhe;  $h_o$  die „nützliche“ Druckhöhe, somit ist  $\frac{1}{2} \varepsilon$  das Verhältnis der „verlorenen“ zur „nützlichen“ Druckhöhe in der Zuleitung.

Die Koeffizienten  $T_1 T_2 T_3 \varepsilon$  ändern ihren Wert mit der Belastung der Turbine. Es mögen  $T_{1m}, T_{2m}, T_{3m}, \varepsilon_m, c_m, P_m$  die der Vollbelastung entsprechenden Werte von  $T_1, T_2, T_3, \varepsilon, c, P$  bedeuten. Man kann approximativ die Leistung der Turbine dem Leitradquerschnitt proportional setzen, und von der geringen Verschiedenheit der Umfangsgeschwindigkeit, wegen der Kleinheit von  $\delta_o$ , absehen. Es ergibt sich dann

$$P_o = P_m \frac{f_o}{f_1} = P_m \frac{1}{\psi} \quad \text{und}$$

$$c_o = c_m \frac{f_o}{f_1} = c_m \frac{1}{\psi}, \quad \text{somit}$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{M v_o}{P_m} \psi = \psi T_{1m}, & T_2 &= \frac{L}{h_o} \frac{c_m}{g} \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi} T_{2m} \\ T_3 &= \frac{l_o}{c_m} \frac{p_o}{p_o + p_a} \psi = \psi T_{3m}, & \varepsilon &= \frac{\gamma_r L}{g} \frac{c_m^2}{h_o d_o} \frac{1}{\psi^2} = \frac{1}{\psi^2} \varepsilon_m \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

13. Die Substitution von  $w' = \omega_o + m' e^{q' t}$ ;  $w = \omega_o + m e^{q t}$ ,  $x = \xi_o + a e^{q' t}$ , u. s. w., und passende Bestimmung der Grössen  $\omega_o, \omega_o', \xi_o, \dots$  in den Gleichungen (71) führt auf die folgende charakteristische Gleichung

$$a'' q^6 + a' q^5 + a q^4 + b q^3 + c q^2 + d q + e = 0. \quad (75)$$

Hierin bedeuten

$$\left. \begin{aligned} a'' &= T^2 T_o T_1 T_2 T_3 & a' &= j m + b p \\ a &= k m + j n + b p & b &= l m + k n + j p \\ c &= q m + l n + k p & d &= l p + \varepsilon q T_3 - q' T_2 \\ & & e &= \psi (1 - \varepsilon) + \delta_o p \\ b &= T^2 T_o T_1, & j &= T^2 (T_o + T_1) + T' T_o T_1, \\ k &= T^2 + T' (T_o + T_1) + \delta_o T_o T_1, & l &= T' + \delta_o (T_o + T_1) \\ m &= T_2 T_3 & n &= \frac{1}{2} T_2 + \varepsilon T_3 \\ p &= 1 + \frac{\varepsilon}{2}, & q &= \psi + \delta_o, & q' &= \psi - \frac{\delta_o}{2} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Diese Form lässt erkennen, dass zunächst die Koeffizienten  $a'' a' \dots e$  homogene Funktionen der Konstanten  $T T' T_o \dots$  sind, und ihr Grad übereinstimmt mit dem Exponenten der zugehörigen Potenz von  $q$ . Man kann demnach die charakteristische Gleichung auch in der Gestalt  $\left( \frac{a''}{T_k^6} \right) (T_k q)^6 + \left( \frac{a'}{T_k^5} \right) (T_k q)^5 + \left( \frac{a}{T_k^4} \right) (T_k q)^4 + \dots + e = 0$  schreiben, wo  $T_k$  irgend eine der Grössen  $T T' \dots$  bedeutet und  $(T_k q)$  als Wurzel erscheint. In den Koeffizienten dieser Gleichung kommen nur die Verhältnisse  $T : T_k, T' : T_k, \dots$  vor. Da sämtliche  $T$  positiv sind, wird das Vorzeichen von  $q$  mit dem von  $T_k q$  übereinstimmen, und wir haben den Satz:

Die Regulierfähigkeit einer Turbine hängt nicht von den absoluten Grössen der Coefficienten  $T T' \dots$  ab, sondern bloss von den Verhältnissen derselben untereinander.

Angenommen diese Verhältnisse bleiben konstant, und die Wurzeln seien imaginär, dann wird eine davon

$$T_k q_\lambda = R + i S, \quad \text{woraus}$$

$$q_\lambda = \frac{R}{T_k} + i \frac{S}{T_k} = r + i s$$

wo  $R$  und  $S$  ebenfalls konstant bleiben. Der von dieser Wurzel stammende Anteil in dem Integral einer der Funktionen  $w' w \dots$  hat die Form

$$e^{rt} [A \cos st + B \sin st],$$

das ganze Integral besteht aus einer Summe ähnlicher Ausdrücke. Die Periode für die obige Teilschwingung ist

$$t_o = \frac{2\pi}{s} = \frac{2\pi}{S} T_k,$$

Die Abnahme der Schwingungsamplitude hängt ab vom Faktor  $e^{rt}$ , und in diesem ist  $rt_o = 2\pi R : S$  also ebenfalls konstant. Wir haben somit den Satz:

Wenn bei konstantem Verhältnis der Coefficienten  $T T' \dots$  ihr absoluter Wert wächst, so nimmt



die Schwingungsdauer in geradem Verhältnis zu, die Konvergenz der Schwingungen aber bleibt ungeändert.

Wählen wir schliesslich an Stelle der Zeit die Grösse  $\tau = t : T_k$  zur unabhängigen Variablen, so wird das oben angeschriebene Teilintegral =

$$e^R [A \cos S \tau + B \sin S \tau].$$

Die Bestimmung der willkürlichen Konstanten erfolgt aus den Anfangsbedingungen, nach welchen für  $t = 0$ ,  $w' = w = x = y = z = 0$  und  $\frac{dw'}{dt} = 0$  ist. In  $A$  und  $B$  sind neben den willkürlichen Konstanten nur Produkte der Form  $T_u \varphi$  enthalten, und da diese konstant bleiben, müssen auch die willkürlichen Konstanten, so lange die Verhältnisse  $T : T' \dots$  sich nicht ändern, stets denselben Wert annehmen. Die Variablen  $w' w x \dots$  als Funktionen von  $\tau$  aufgefasst, werden demnach nicht alteriert, wenn man  $T T' \dots$  proportional vergrössert oder verkleinert. Da ferner, wie aus den Gleichungen (41<sup>b</sup>) als Beispiel erhellt, die willkürlichen Konstanten der Belastungsänderung  $\Pi$  proportional sind, kann man jede der Variablen  $w' w x \dots$  darstellen als Produkt aus  $\Pi$  und einer nur von den Verhältnissen  $T : T' \dots$  (und den Koeffizienten  $\varepsilon \psi \delta_o$ ) abhängigen Funktion von  $\tau$ . Bestimmen wir das Maximum z. B. der Geschwindigkeit, so muss dies die gleiche Form haben, und wir haben den Satz:

Durch proportionale Vergrösserung oder Verkleinerung der Koeffizienten  $T T' \dots$  wird das Verhältnis der mathematischen Druck- und Geschwindigkeitsschwankung zur prozentischen Belastungsänderung nicht geändert.

Diese Sätze waren notwendig, um von den Versuchsergebnissen im kleinen auf grosse Ausführungen, und umgekehrt, schliessen zu können. (Schluss folgt.)

### Die Bruchprobe der Eisenbahnbrücke in Wohlhusen.

In den vergangenen Tagen spielte sich auf der Bahn Bern-Luzern, bei der Station Wohlhusen, ein Ereignis ab, das seiner Eigenartigkeit wegen das Interesse aller Brückentechniker verdient.

Die im Jahre 1874 erbaute Eisenbahnbrücke über die Emme wurde, da sie den heutigen Anforderungen nicht mehr genügte, im vorigen Jahre beseitigt und durch eine neue ersetzt. Auf Anregung des Eisenbahndepartements wurde diese Gelegenheit benützt, um einmal eine ganze Brücke auf ihre Tragfähigkeit und Festigkeit zu prüfen und die Erscheinungen zu studieren, die dem Zusammensturz einer eisernen Brücke vorangehen. Die betreffende Brücke konnte in dieser Hinsicht um so lehrreicher angesehen werden, als sie in Bezug auf Spannweite, Höhe und Anordnung der Tragwände mit der im Juni 1891 eingestürzten Mönchensteinerbrücke manche Aehnlichkeit besitzt. Die Jura-Simplon-Bahn, als Eigentümerin der Brücke, zeigte sich bereit, auf diesen Plan einzugehen, und sämtliche Hauptbahnen der Schweiz vereinigten sich mit dem Eisenbahndepartement dahin, die aus der Probe erwachsenden Kosten gemeinschaftlich zu tragen.

Das Programm, das der Probe zu Grunde gelegt und bereits früher (Seite 35) an dieser Stelle in seinen Hauptzügen mitgeteilt worden ist, lautet wie folgt:

#### Programm für die Belastungsproben bis zum Bruch der Brücke.

9. April 1894.

Die auf ihren Unterstützungen gelagerte Eisenkonstruktion der Brücke wird an jedem untern und obern Knotenpunkt einnivelliert. Die Geradheitsfehler der Streben, die lokalen Mängel der Konstruktion, die senkrechte Lage der Wände werden sorgfältig aufgenommen bzw. kontrolliert.

9.—15. April.

Nach Massgabe der Anlieferung der Schienen, welche mit das Belastungsmaterial bilden, wird die Eisenkonstruktion von Feld zu Feld belastet, bis eine Last von 5,86 t per laufenden Meter sich auf die ganze Länge derselben erstreckt. Das Nivellement aller Knotenpunkte, die Beobachtung der Geradheit der Streben und der Lage der Wände werden bei Belastung der halben und der ganzen Brücke wiederholt.

16.—21. April.

Die Hälfte der Brücke Seite Bern wird entlastet, um die zweite Phase der Belastungsprobe vorzubereiten. Die Beobachtungen über die Geradheit der Streben und die Nivellemente werden nach dieser Entlastung wiederholt.

23.—25. April.

Die Belastung der Brückenhälfte Seite Luzern wird nun verdoppelt und die oben erwähnten Nivellemente und Beobachtungen erneuert.

Die Belastung wird alsdann auf der nämlichen Brückenhälfte fortgesetzt, indem jeweilen eine weitere Last von 1 t pro laufenden Meter hinzugefügt wird, bis ein Bruch oder grössere Deformationen erfolgen.

Während dieser Manipulation werden die mehrgenannten Beobachtungen soweit thunlich wiederholt.

Die auf diese Weise der absichtlichen Zerstörung geweihte Brücke besitzt eine Spannweite von 47,9 m und eine Höhe von 5,8 m. Die Streben der Tragwände sind sämtlich schief und bilden mit den Gurtungen eine Reihe von gleichschenkligen Dreiecken (Warren-Träger). Die wagrechte Entfernung der Knotenpunkte beträgt 4,3 m. Die Fahrbahn liegt unten und besteht in üblicher Weise aus Quer- und Längsträgern. Die oberen Gurtungen sind durch Riegel und Windkreuze quer verbunden. Die Brücke kreuzte den Fluss in schiefer Richtung; im Grundriss ist daher die eine Tragwand gegenüber der andern um eine Fachweite verschoben.

Die Gurtungen sind kastenförmig gebaut, die Streben haben Blechbalkenquerschnitt.

Die südliche Tragwand ist, da die Bahn auf der Brücke in einer Krümmung liegt, etwas schwächer als die nördliche.

Wie bei der Mönchensteinerbrücke sind die Streben excentrisch an den Gurtungen befestigt. Die Excentricität beträgt, horizontal gemessen, 10 cm nach jeder Seite.

Um die Probe vornehmen zu können, wurde die Brücke am Ufer des Flusses auf vier Betonsockel gelagert, und zwar so, dass die untere Gurtung etwa einen halben Meter über dem Erdboden schwebte.

Als Belastungsmaterial wurde eine Lage Eisenbahnschienen und darüber aufgeschütteter Kies verwendet. Das spezifische Gewicht des letzteren wurde zu 1,8 ermittelt.

Nachdem schon vor Beginn der Probe sämtliche Bahngesellschaften und Brückenwerkstätten der Schweiz, sowie eine grössere Zahl von einzelnen Personen vom Eisenbahndepartement in verdankenswerter Weise von dem Bevorstehenden in Kenntnis gesetzt und zur Besichtigung eingeladen worden waren, wurde denselben am Montag den 23. April telegraphisch mitgeteilt, dass von Dienstag vormittags 10 Uhr an diejenigen Belastungen aufgetragen werden würden, von denen man grössere Deformationen und schliesslichen Bruch erwarten könne.

An diesem Vormittage fand sich an der Brückenstelle eine auserlesene Gesellschaft zusammen. Das Eisenbahndepartement war durch dessen Vorsteher, Herrn Bundesrat Zemp, durch den technischen Inspektor, Hrn. Oberst Tschiemer und durch mehrere Kontrolingenieure vertreten. Die grösseren Bahngesellschaften der Schweiz hatten alle mehrere ihrer Ingenieure zum Studium des seltenen Vorganges abgesandt. Von Paris war der Brückeningenieur des Chemin de fer de l'Est erschienen. Kaum konnte der Gasthof zum Rössli die zahlreichen Gäste fassen, die sich dort zum Mittagessen vereinigten.

Die Belastung, die am Morgen dieses Tages 11,7 t auf den Meter betrug und sich über die Hälfte der Spannweite erstreckte, wurde nach und nach durch weiteres Aufschütten von Kies bis auf 13,2 t erhöht. Währenddem wurden wiederholt die Einsenkungen der Knotenpunkte und die Verbiegungen der Stäbe gemessen, erstere durch Nivellieren, letztere durch gespannte Schnüre.

Diese Messungen ergaben überall fortwährend sich steigernde Formänderungen. Die Senkung der Tragwände stieg in der Mitte auf mehrere Centimeter. Die Streben verbogen sich in der Tragwandebene teils einfach, teils S-förmig um mehrere Millimeter. Da und dort wurden auch, bald im Anstrich, bald an Verkittungsstellen kleinere Risschen sichtbar. Doch keine dieser Veränderungen nahm eine auffallende Grösse an und es war unmöglich zu sagen, wo die Gefahr eines