

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 17/18 (1891)  
**Heft:** 8

**Artikel:** Ueber die Festigkeitsverhältnisse einer häufig angewendeten Bolzenverbindung  
**Autor:** Föppl, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-86092>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Ueber die Festigkeitsverhältnisse einer häufig angewendeten Bolzenverbindung. — Die Nutzbarmachung eines Theiles der Wasserkräfte des Niagara. — Geschwindigkeitsmesser für Locomotiven (Berichtigung). — Nekrologie: † Alexander Kaiser. † Hans Wolff. † Theophil von Hansen. — Concurrenten: Nutzbarmachung der Wasser-

## Ueber die Festigkeitsverhältnisse einer häufig angewendeten Bolzenverbindung.

Von Dr. A. Föppl, Ing.

Durch einen Specialfall wurde ich kürzlich veranlasst, die Festigkeitsverhältnisse einer Bolzenverbindung einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Da die betreffende Verbindung in der Praxis nicht selten zur Anwendung gelangt, möge mir eine kurze Mittheilung über die dabei erlangten Resultate gestattet sein.

In Fig. 1 seien  $H$  ein Holzkörper,  $E$  und  $E'$  zwei Eisenlaschen von beliebigem Querschnitt (Flacheisen, L-Eisen, C-Eisen u. dgl.), die durch den Bolzen  $B$  mit dem Holzkörper verbunden sind und eine Kraft  $P$  auf denselben übertragen. Für meine heutige Mittheilung ist es völlig gleichgültig, wie die Construction im Uebrigen aussieht; ich habe die Figur deshalb auch nicht so gezeichnet, wie sie in dem betreffenden speciellen Falle aussah, sondern alles Unwesentliche daraus entfernt.

Gewöhnlich begnügt man sich in einem solchen Falle damit, den Bolzen auf Abscheeren zu berechnen. Wenn man noch etwas sorgfältiger verfahren will, berechnet man auch den Druck zwischen Bolzen und Lochwand in der Eisenlasche. Wird der Bolzendurchmesser mit  $d$  und die Stärke der Eisenlasche mit  $m$  bezeichnet, so erhält man (wie hier als bekannt vorausgesetzt werden soll) den grössten Druck  $p_{max}$  zwischen Bolzen und Eisenlasche aus der Formel

indem von jeder der beiden Laschen die Kraft  $\frac{1}{2} P$  übertragen wird.

Der grösste Druck, welcher von dem Bolzen auf das Holz übertragen wird, scheint dagegen bisher nicht genauer berechnet worden zu sein. Dürfte man annehmen, dass sich der Bolzen nicht biegt, so könnte dieser grösste spezifische Druck ebenfalls aus Gl. (1) bestimmt werden, wenn man darin  $\frac{1}{2} P$  durch  $P$  und  $m$  durch die Länge  $2l$  des Bolzens ersetzt. In Wirklichkeit wird er aber wegen der Biegung, welche der Bolzen erfährt, an den beiden Enden des Bohrlisches ganz erheblich grösser. Die nachfolgende Rechnung zeigt, wie die Verhältnisse in dieser Hinsicht liegen.

Zuvor will ich noch erwähnen, dass die Kraftübertragung zwischen den Eisenlaschen  $E$  und dem Holzkörper  $H$  allerdings nicht ausschliesslich durch den Bolzen, sondern zum grossen Theile durch die Vermittelung der Reibung zwischen  $E$  und  $H$  stattfindet. Auf diesen günstigen Umstand darf man aber kein zu grosses Gewicht legen. In Folge der Erschütterungen denen jede Bauconstruction ausgesetzt ist, findet ein allmähliches Abrutschen statt, so dass zuletzt die Kraftübertragung doch nur (oder wenigstens vorwiegend) an den dauernd widerstandsfähigen Punkten vor sich geht.

Bezeichnet man mit  $A$  einen Coefficienten, über dessen Grösse späterhin Weiteres bemerkt werden wird, so hat man für das Biegunsmoment  $M$  des Bolzens in einem Abstande  $x$  von der Symmetriechse desselben die Gleichung

$$M = {}^1/{}_2 P(l-x) - \int_x^l Ky \, d\xi (\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Bezeichnungen erklären sich im Uebrigen aus Fig. 2, welche die Hälfte der elastischen Linie des gebogenen Bolzens darstellt. Die  $x$ -Achse fällt mit der ursprünglichen Lage der Bolzenachse und die  $y$ -Achse mit der Symmetrie-Achse  $OO$  zusammen. Durch zweimalige

kräfte des Niagara. Neues Spital in Locle. Pimarschulhaus in Schaffhausen. Kirche in Enge bei Zürich. Cantonsschulgebäude in Luzern. — Miscellanea: Internationale Kunst-Ausstellung in Berlin. — Berichtigung. — Vereinsnachrichten: Schweiz. Ingenieur- u. Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- u. Architekten-Verein. Stellenvermittlung.

Differentiierung und Benützung der Gleichung  $M = EJ \frac{d^2y}{dx^2}$  erhält man aus (2)

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{K}{EJ} \cdot y \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung vierter Ordnung lässt sich leicht angeben und es lässt sich auch ohne besondere Schwierigkeit den hier vorliegenden Grenzbedingungen anpassen. Um den Leser nicht durch diese etwas verwickelten Rechnungen zu ermüden, unterlasse ich es, den ganzen Rechnungsgang hier anzuschreiben. Ich bemerke nur, dass zur Bestimmung der vier Constanten des allgemeinen Integrals die Bedingungen zu beachten sind

1) für  $x = 0$  ist  $\frac{dy}{dx} = 0$ , 2) für  $-x$  wird  $y$  eben so gross als für  $+x$ , 3) für  $x = l$  wird  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ , 4) muss  $\int_0^l Ky \, dx = \frac{1}{2}P$  sein.

Die fertige Lösung lautet dann

$$y = \frac{P}{K \cdot \ell} \cdot \frac{\lambda}{\ell^2 \lambda - \ell^{-2} \lambda + 2 \sin 2 \lambda} \left[ \left( \ell^{\lambda \frac{l+x}{\ell}} + \ell^{-\lambda \frac{l+x}{\ell}} \right) \cos \lambda \frac{l-x}{\ell} + \right. \\ \left. + \left( \ell^{\lambda \frac{l-x}{\ell}} + \ell^{-\lambda \frac{l-x}{\ell}} \right) \cos \lambda \frac{l+x}{\ell} \right] \quad (4)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4} \cdot \frac{l^4}{EJ}} \quad . . . . . \quad (5)$$

Man kann sich nachträglich leicht davon überzeugen, dass die gegebene Lösung richtig ist, d. h. sowohl der Gl. (3) als den erwähnten Grenzbedingungen genügt.

Von besonderem Interesse sind die Werthe  $y_o$  und  $y_i$ , welche  $y$  für  $x = 0$  bzw. für  $x = l$  annimmt und der Durchschnittswerth  $y_m$  von  $y$ , d. h. jener Werth, um den sich der Bolzen in das Holz elastisch eindrücken würde, wenn er ein so grosses Trägheitsmoment hätte, dass er gar nicht (oder wenigstens nicht merklich) gebogen würde. Man erhält aus Gl. (4)

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{P}{K\ell} \cdot \frac{2\lambda(\ell^\lambda + \ell^{-\lambda}) \cos \lambda}{\ell^{2\lambda} - \ell^{-2\lambda} + 2 \sin 2\lambda} \\ y_1 &= \frac{P}{K\ell} \cdot \lambda \frac{\ell^{2\lambda} + \ell^{-2\lambda} + 2 \cos 2\lambda}{\ell^{2\lambda} - \ell^{-2\lambda} + 2 \sin 2\lambda} \\ y_m &= \frac{P}{2K\ell} \end{aligned} \right\} \quad . . . \quad (6)$$

Die Aufgabe wäre jetzt als vollständig gelöst zu betrachten, wenn der Coefficient  $K$  bekannt wäre. Ungefähr lässt sich die Grösse desselben aus der letzten der Gleichungen (6) bestimmen. Die genaue Berechnung von  $K$  aus dieser Gleichung ist freilich selbst eine sehr verwickelte Aufgabe. Da in dem Ausdrucke für  $\lambda$  der Coefficient  $K$  indessen nur unter dem vierten Wurzelzeichen vorkommt, lässt sich  $\lambda$  mit ziemlicher Annäherung berechnen, wenn auch  $K$  nur in sehr grober Annäherung bekannt ist. Selbst wenn z. B.  $K$  in Wirklichkeit vier Mal so gross wäre, als wir es zunächst schätzten, würde dadurch  $\lambda$  nur 1.41 Mal so gross werden, d. h. der Fehler würde immerhin nicht mehr als 41% betragen.

Um zu einer blossen Schätzung des Werthes von  $K$  zu gelangen, vergleiche man den vorliegenden Fall mit einem andern. Es sei nämlich derselbe Druck  $P$  auf einen

Holzstab von der Länge  $L$  und den Querschnittsdimensionen  $z l$  und  $d$  übertragen. Die elastische Verkürzung desselben ist gleich

$$L \cdot \frac{P}{z l d \cdot E'}$$

wenn mit  $E'$  der Elastizitätsmodul des Holzes bezeichnet wird. Setzt man diesen Werth gleich  $y_m$ , so erhält man

$$K = E' \frac{d}{L} = \alpha E' \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

Es fragt sich jetzt nur noch, wie gross wir die Länge  $L$  des Vergleichsstabes, bezw. das Verhältniss  $\frac{d}{L}$  wählen müssen, um in beiden Fällen zu der gleichen elastischen Zusammendrückung zu gelangen. Offenbar ist  $L$  ein Vielfaches von  $d$ , ohne indessen sehr erheblich grösser als dasselbe werden zu können. Wenn wir schätzungsweise  $L = 6d$  setzen, dürfen wir überzeugt sein, dass wir bei der Berechnung von  $\lambda$  keinen sehr grossen Fehler begehen. Setzt man ferner  $E = 2\,000\,000$  und  $E' = 120\,000$ , so erhält man aus Gl. (5)

$$\lambda = \sqrt{\frac{\alpha E'}{4E} \cdot \frac{l^4}{J}} = 0,22 \sqrt{\frac{l^4}{J}} = 0,48 \frac{l}{d} \quad \dots \dots \quad (8)$$

Der grösste Druck  $p_l$  wird von dem gebogenen Bolzen auf das Holz am Ende des Bohrloches ausgeübt. Derselbe verhält sich zu dem mittleren Drucke  $p_m$ , welcher für  $J = \infty$  überall auftreten würde, wie  $y_l$  zu  $y_m$ . Verwendet man zur Berechnung des letztern noch das durch Gl. (1) ausgesprochene Gesetz, so erhält man

$$\begin{aligned} p_l &= p_m \cdot 2\lambda \frac{l^{2\lambda} + l^{-2\lambda} + 2 \cos 2\lambda}{l^{2\lambda} - l^{-2\lambda} + 2 \sin 2\lambda} = \\ &= \frac{4P}{ld\pi} \cdot \lambda \cdot \frac{l^{2\lambda} + l^{-2\lambda} + 2 \cos 2\lambda}{l^{2\lambda} - l^{-2\lambda} + 2 \sin 2\lambda} \quad (9) \end{aligned}$$

Setzt man z. B.  $z l = 23\text{ cm}$ ,  $d = 2,5\text{ cm}$ ,  $P = 3600\text{ kg}$ , so wird  $\lambda = 2,2$  und  $p_l = 4,4 p_m = 350\text{ kg pro cm}^2$ .

Falls wie im vorliegenden Falle  $z l$  mehrmals grösser ist als 1, lässt sich für Gl. (9) bei Vernachlässigung kleiner Grössen näherungsweise setzen

$$p_l = p_m \cdot 2\lambda = \frac{4P}{ld\pi} \cdot \lambda$$

Man erkennt daraus, dass bei Verwendung verhältnismässig schwacher Bolzen der an den Enden des Bohrloches ausgeübte Druck sehr beträchtliche Werthe annehmen kann. Die alte Constructionsregel, dass man die Beanspruchung von Schraubenbolzen in den Verbindungen durch scherende Kräfte nach Möglichkeit vermeiden soll, findet damit in dem vorliegenden Falle volle Bestätigung.

Wählt man den Bolzen so, dass  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  ist, also  $z l = 6,6 d$ , so wird  $y_0$  nach der ersten der Gl. (6) gleich Null. In der Mitte überträgt der Bolzen dann gar keinen

Druck mehr auf den Balken. Wählt man die Bolzenlänge grösser als  $6,6 d$ , so wird  $y_0$  negativ, d. h. in der Mitte drückt der Bolzen auf das Holz in entgegengesetzter Richtung als an den Enden.

Für das oben gewählte Beispiel gibt Fig. 3 die Druckvertheilung an; wenn

$$x = 0, \quad \frac{l}{4}, \quad \frac{l}{2}, \quad l$$

wird  $\frac{p}{p_m} = -0,57, -0,34, +0,49, +4,4$ .

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass die ganze Rechnung selbstverständlich nur als eine Näherungsrechnung angesehen werden kann. Abgesehen von der Unsicherheit in

der Bestimmung des Coefficienten  $K$ , beruht sie auf den keineswegs in aller Strenge zutreffenden üblichen Voraussetzungen der Festigkeitslehre bei der Behandlung solcher complicirter Aufgaben. Immerhin darf man annehmen, dass sich die gefundenen Resultate nicht allzuweit von der Wirklichkeit entfernen werden.

Leipzig, December 1890.

### Die Nutzbarmachung eines Theiles der Wasserkräfte des Niagara.

Der in unseren beiden letzten Nummern mitgetheilte Entschied im Wettbewerb der Niagara-Commission, bei welchem drei schweizerische Firmen mit hohen Auszeichnungen bedacht worden sind, wird voraussichtlich bei einer Anzahl unserer Leser den Wunsch hervorgerufen haben, Näheres über diesen Wettbewerb und die dabei gestellten Aufgaben zu erfahren. Wir glauben daher solchen durchaus berechtigten Wünschen zuvorkommen, wenn wir an Hand der uns zur Verfügung gestellten Actenstücke eine gedrängte Beschreibung sowol der Vorgeschichte als auch des Inhaltes dieser in der Grossartigkeit der geforderten Hülfsmittel einzig dastehenden Preisbewerbung geben.

Wenn man den rastlos vorwärts strebenden, keine Hindernisse kennenden Unternehmungsgeist der Amerikaner in Betracht zieht, so mag es auffallen, dass dieselben nicht früher an die Nutzbarmachung der ungeheuren Kräfte gegangen sind, welche die Natur ihrem in allen Beziehungen so reich gesegneten Lande in den Wasserfällen des Niagara zur Verfügung gestellt hat. Vielleicht war es gerade die überwältigende Grossartigkeit dieses Naturschauspiels, welches den Gedanken an die praktische Verwerthung desselben nicht so leicht aufkommen liess. Ueberdies gestaltet sich auch offenbar die Aufgabe der Einspannung eines kleinen Wasserlaufes in das Arbeitsjoch leichter und einfacher als diejenige der Ableitung auch nur eines verschwindenden Theils der Energie einer so ungeheuren Kraftentwickelung. Anfänglich waren es daher nur wenige Mühlen, namentlich Sägemühlen, welche an den Stromschnellen, also oberhalb der Fälle selbst erbaut wurden und erst in den siebziger Jahren wurde mit der Benutzung der Wasserkräfte in grösserem Massstab begonnen, nachdem ein Wasserwerkskanal ausgeführt worden, welcher das Wasser dem Fluss oberhalb der Fälle entnimmt. Dasselbe wird an die verschiedenen längs desselben entstandenen Fabrikanlagen vertheilt, welche es zum Betrieb ihrer Turbinen benutzen und es nachher unterhalb der Fälle wieder dem Fluss zuströmen lassen. Die günstigen Erfolge, welche dieser erste Versuch auf die Entwicklung der Industrie in der am Falle sich immer mehr ausdehnenden Stadt ausübte, waren zunächst die Veranlassung, dass weitere Projecte auftauchten und dass man sich vielfach mit Schätzungen und Berechnungen über die im Fall überhaupt enthaltene Kraft beschäftigte. Diese wird ziemlich verschieden angegeben; den besten Massstab erhält man wol durch die vom verstorbenen William Siemens angestellte Berechnung, nach welcher die tägliche Förderung an Kohlen in der ganzen Welt unter Dampfkesseln verbrannt behufs Erzeugung von Dampf und diesen zum Antrieb vom Dampfpumpen benutzt, kaum genügen würde, das Wasser des Niagarafalls wieder zurück zu pumpen. An diesem Fall allein besitzen die Amerikaner also eine Kraftquelle, welche alle ihre Kohlenlager zu ersetzen im Stande wäre und dabei noch den Vortheil besitzt, in absehbarer Zeit nicht ein Ende zu nehmen wie letztere. Auf alle Fälle ist die disponibile Kraft eine ungeheure und mag, in Zahlen ausgedrückt, etwa drei Millionen Pferdestärken erreichen.

Das gegenwärtig im Vordergrund stehende Project einer Kraftentnahme in grösserem Massstab ist dasjenige der „Cataract Construction Company“, welche dem Fall die nötige Wassermenge zur Entwicklung von etwa 120000 HP. entziehen will. Obgleich schon seit mehreren Jahren bestehend, hat die Gesellschaft erst in neuester Zeit das nötige Capital

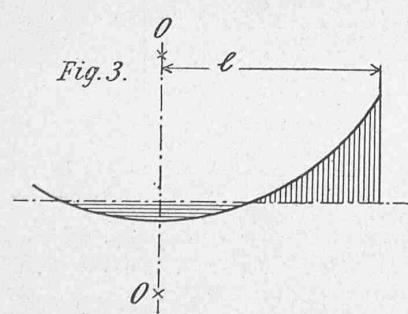


Fig. 3. Druckvertheilung an der Stelle des Bolzens.