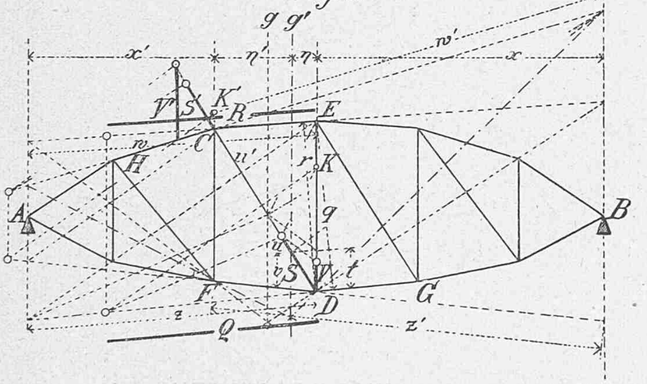
Beitrag zur Theorie des Fachwerkes.

Von Dr. *A. Herzog*,
Prof. am eidgen. Polytechnikum zu Zürich.

II.

In dem Aufsatze, welchen ich in No. 8 Bd. XV dieser Zeitschrift veröffentlichte, wurde ein Verfahren zur Bestimmung der Maximalspannungen in den Füllungsgliedern eines Fachwerkträgers mitgetheilt. Ich habe nachträglich bemerkt, dass die dort angegebenen Constructionen einer Verallgemeinerung fähig sind, indem sie sich mit Leichtigkeit auch auf die Gurtungsstäbe anwenden lassen, obschon die ungünstigste Belastung für diese letzteren eine ganz andere ist als für die Diagonalen und Pfosten. Durch Zeichnung eines einzigen Kräfteplanes ergeben sich die von der zufälligen Belastung herrührenden grössten Spannungen in sämmtlichen Stäben des Fachwerkes und zwar ohne Benützung der Momentenfläche und der Curve der maximalen Scheerkräfte. In den nachfolgenden Zeilen wird das verallgemeinerte Verfahren kurz begründet und nachher an einem speciellen Beispiele erläutert.

Fig. 1.



Es sei DG ein Stab, der zum Zugbaum des in Fig. 1 gezeichneten Fachwerkes gehört. Die Spannung Q dieses Stabes wird am grössten, wenn die Fahrbahn total belastet ist. Bekanntlich ist das Moment von Q in Bezug auf den „Drehpunkt" E von DG gleich dem Momente der äusseren Kräfte für diesen Punkt, d. h. gleich der Summe der Momente aller Kräfte, welche auf der gleichen Seite von DE angreifen. Bezeichnet man also mit p die gleichmässig vertheilte Belastung pro Längeneinheit, mit l die Spannweite und mit x die Entfernung des Pfostens ED vom Widerlager B, so ist das Moment der äusseren Kräfte gleich $\frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2}$. Das Moment der Spannung Q für den Punkt E ist Qq, wo q die Länge des Perpendikels von E auf DG bedeutet. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke bekommt man

$$Qq = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{px}{2}(l-x) \text{ und } Q = \frac{px}{2} \cdot \frac{l-x}{q}.$$

Verlängert man DG bis zu der Verticalen durch A, so ist, wenn mit z die Entfernung des Schnittpunktes von D und mit y die Höhe des Pfostens ED bezeichnet wird,

$$\frac{l-x}{q} = \frac{z}{y}.$$

Zur Bestimmung von Q kann man also auch die Gleichung benützen

$$Q = \frac{px}{2} \cdot \frac{z}{y}.$$

In analoger Weise lässt sich die Maximalspannung R im Stabe CE des Druckbaumes berechnen. Das Moment der äusseren Kräfte für den Drehpunkt D dieses Stabes hat den nämlichen Werth wie für den Punkt E. Es ist folglich

$$Rr = \frac{px}{2}(l-x) \text{ oder } R = \frac{px}{2} \cdot \frac{l-x}{r} = \frac{px}{2} \cdot \frac{w}{y}.$$

In dieser Gleichung bedeuten r den Hebelarm der Kraft R für den Punkt D und w den in der Richtung von CE gemessenen Abstand des Pfostens ED von A.

Die Ausdrücke für die Kräfte Q und R sind von derselben Form wie diejenigen, welche für die Maximalspannungen in den Füllungsgliedern abgeleitet wurden. In Fig. 1 sind die Belastungsscheiden g und g' für die Diagonale CD und den Pfosten CF angegeben. Bei der Construction derselben ist die Voraussetzung gemacht, dass die Fahrbahn unterhalb des Trägers liege. Wenn man also den Stab CE des Obergurtes bis zu den Auflager-Verticalen verlängert und die Schnittpunkte mit F und D verbindet, so erhält man in bekannter Weise einen Punkt der Geraden g. Bei der Bestimmung von g' muss, wie aus der Figur ersichtlich ist, der Stab CH des Druckbaumes benützt werden. Die Maximalspannung S, welche in der Diagonale CD bei totaler Belastung rechts von g entsteht, ergibt sich dann, wie früher bewiesen wurde, aus der Gleichung

$$S = \frac{px}{2} \cdot \frac{u}{y}.$$

Für die Spannung V, welche im Pfosten CF bei totaler Belastung zwischen g' und B hervorgebracht wird, findet man durch eine einfache Ueberlegung den Werth

$$V = \frac{px}{2} \cdot \frac{\eta}{d}.$$

Zieht man schliesslich durch den Punkt, in welchem g' die Diagonale CD trifft, eine Parallele zu CE, so wird der Pfosten ED in zwei Abschnitte zerlegt, deren unterer mit t bezeichnet werden möge. Es ist alsdann

$$\frac{\eta}{d} = \frac{t}{y} \text{ und somit } V = \frac{px}{2} \cdot \frac{t}{y}.$$

Zwischen den vier Maximalspannungen V, S, R und Q besteht also die einfache Relation

$$V : S : R : Q = t : u : w : z$$

$$\text{oder } \frac{V}{t} = \frac{S}{u} = \frac{R}{w} = \frac{Q}{z} = \frac{\frac{px}{2}}{y}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lassen sich die vier Kräfte sehr leicht construiren. Verbindet man z. B. den Punkt E mit dem oberen Endpunkte von u, sowie mit dem auf der Verticalen durch A liegenden Endpunkte von z und zieht durch den Endpunkt K der Strecke $DK = \frac{px}{2}$ zu diesen Verbindungslinien Parallele, so schneiden diese auf DC und DG die Kräfte S und Q ab. Kennt man eine einzige von den vier Kräften, so ergeben sich daraus die drei anderen. In der Zeichnung ist angedeutet, wie die Kräfte R und S aus der Kraft Q abgeleitet werden können. Die Verticale durch den linken Endpunkt von Q schneidet auf CE die von E aus gemessene Kraft R ab. Zur Bestimmung von V ist in Fig. 1 die Kraft S benutzt worden. Die Parallele durch den oberen Endpunkt von S zur Verbindungslinie der Endpunkte von u und t trifft DE in einem Punkte, dessen Entfernung von D gleich der Kraft V ist. Es ist also nicht nothwendig, für die Gurtungen und für die Füllungsglieder zwei getrennte Kräftepläne zu zeichnen, wie es bisher üblich war; man kann die Spannungen in den Diagonalen und Pfosten sehr leicht aus den Gurtspannungen ableiten und umgekehrt oder auch die sämmtlichen Kräfte ganz unabhängig von einander construiren.

Was schliesslich die Bestimmung der Spannungen S' und V' anbetrifft, welche bei linksseitiger Belastung in CD und CF entstehen, so ist nach dem Vorhergehenden leicht einzusehen, dass sie aus den Spannungen Q' und R' der Gurtungsstäbe DF und CH ebenso gefunden werden können, wie die Kräfte S und V aus Q und R. Wenn man bei der Berechnung von Q' und R' die links vom Pfosten CF

angreifenden Kräfte als die äusseren betrachtet, so bekommt man

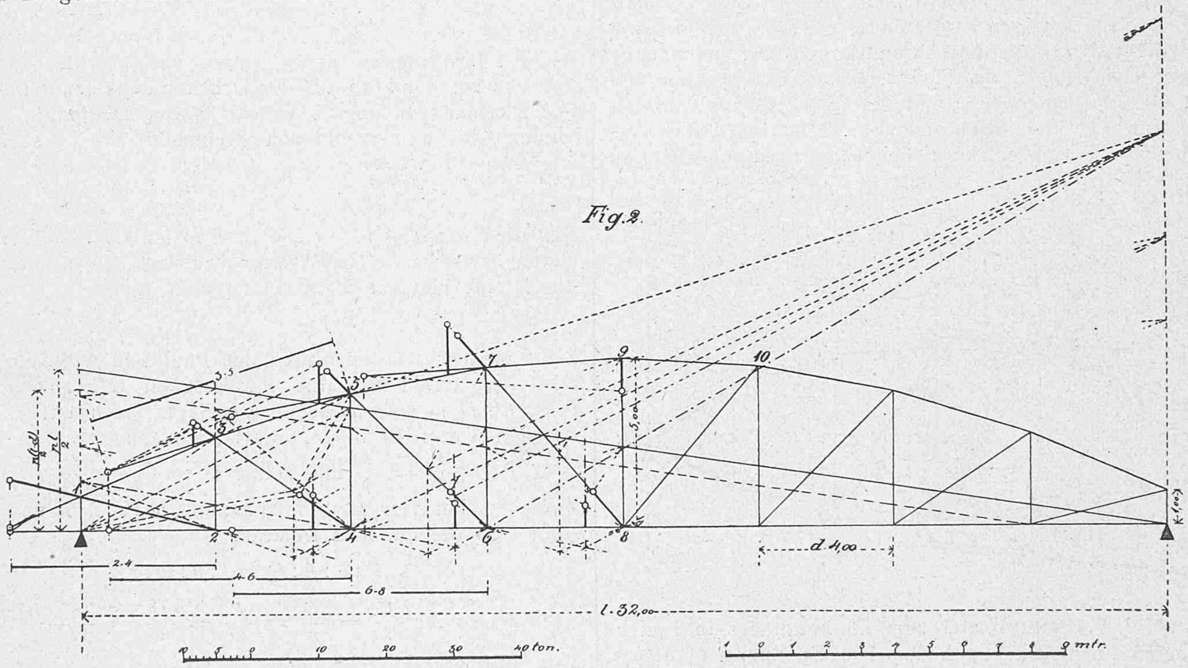
$$\frac{V'}{t'} = \frac{S'}{u'} = \frac{R'}{w'} = \frac{Q'}{z'} = \frac{\frac{p\,x'}{2}}{y'}.$$

In dieser Gleichung bedeutet y' die Länge CF; u' ist der obere Abschnitt von CD; t' ist die Strecke, welche von CD und CH auf g' begrenzt wird; w' und z' sind die zwischen den Verticalen durch C und B liegenden Abschnitte von CH und DF. (S. Fig. 1.) In der Zeichnung ist die Kraft Q' direct bestimmt worden. Von F aus wurde vertical nach aufwärts die Kraft $\frac{p\,(x+d)}{2} = FK'$ abgetragen, wo d die Fachdistanz bedeutet. Hieraus ergeben sich Q' und R' in derselben Weise wie Q und R. Bei der Construction von S' und V' wurde die Kraft R' benützt. Da nämlich

$$\frac{S'}{R'} = \frac{u'}{w'} \text{ und } \frac{V'}{R'} = \frac{t'}{w'} \text{ ist,}$$

so findet man die genannten Kräfte folgendermassen: Man sucht die Schnittpunkte der Belastungsscheiden g und g' mit der Diagonale CD und verbindet dieselben mit dem fallen g und g' mit den Auflager-Verticalen zusammen. Die Spannungen 2—4, 4—6, 6—8 im Untergurt sind direct bestimmt, ebenso die Kräfte S, welche in den Diagonalen wirken. Die Spannung im äussersten Stabe des Zuggurtes ist Null, weil die ganze Kraft $\frac{p\,l}{2}$ von dem Endpfosten aufgenommen wird. Legt man ferner durch das erste Feld einen verticalen und einen schiefen Schnitt, welch letzterer den Pfosten 23 schneidet, so erkennt man, dass die Horizontalcomponenten der Kräfte 1—2 und 1—3 einander gleich sind und zwar gleich der Kraft 2—4. Die Spannungen 1—2, 3—5, 5—7, 7—9 im Obergurt sind aus denjenigen des Untergurtes abgeleitet; die Kräfte S' und V' sind nach der oben genannten Regel construirt. Dagegen sind die Kräfte V in etwas anderer Weise bestimmt worden als in Fig. 1. Für den Pfosten CF ergibt sich die Spannung V aus der Gleichung

$$V = \frac{p\,x}{2} \cdot \frac{\eta}{d}.$$



rechten Endpunkte von w'; dann zieht man durch den linken Endpunkt von R' Parallele zu diesen Linien und verlängert sie bis zum Schnitte mit CD. Die eine dieser beiden Parallelen schneidet auf der Diagonale die Kraft S' ab. Zieht man ferner durch den Schnittpunkt der zweiten Parallelen und von CD die Verticale, so ist das Stück derselben, welches zwischen dem Schnittpunkt und CH liegt, gleich der Kraft V'.

Fig. 2 enthält den nach den entwickelten Methoden construirten Kräfteplan eines Halbparabel-Trägers. Derselbe ist in acht gleiche Felder von je vier m Länge eingetheilt. Die zufällige Last beträgt 1.5 t pro laufenden m; die Fahrbahn liegt am geradlinigen Untergurt. Die Masstäbe für die Längen und für die Kräfte sind in der Figur angegeben. Da der Träger als symmetrisch vorausgesetzt wurde, konnte die Zeichnung des Kräfteplanes auf eine Hälfte desselben beschränkt werden. Zur Erläuterung der Construction mögen folgende Bemerkungen dienen:

Auf der Verticalen durch A ist die Reaction $\frac{p\,l}{2}$ für Totalbelastung aufgetragen; die Verbindungslinie des oberen Endpunktes dieser Strecke mit dem Stützpunkte B schneidet auf jedem Pfosten die zu ihm gehörende Kraft $\frac{p\,x}{2}$ ab. Ferner sind die Belastungsscheiden g und g' gezeichnet; die Geraden g sind punktirt, die Geraden g' sind durch strichpunktirte Linien angedeutet. In den äussersten Feldern

Trägt man also die Länge $DK = \frac{p\,x}{2}$, die auf dem nächsten Pfosten DE aufgetragen wurde, auf CF selbst ab und verbindet den oberen Endpunkt mit D, so schneidet diese Verbindungslinie auf der Belastungsscheide g' die vom Untergurt aus gemessene Kraft V ab. Anstatt die Kräfte $\frac{p\,x}{2}$ nach links zu transportiren, kann man auch die Gerade, welche den Stützpunkt B mit dem Endpunkte von $\frac{p\,l}{2}$ verbindet, um die Fachdistanz nach links verschieben und auf diese Weise die verschobenen Kräfte direct construiren, wie es in Fig. 2 geschehen ist.

Die Spannung im Pfosten 8—9 muss nach einer anderen Methode ermittelt werden. Wenn die Fahrbahn unten liegt, so gehört der Knotenpunkt 9 zu den unbelasteten und daraus folgt, dass die drei Spannungen 7—9, 9—10 und 8—9 unter sich im Gleichgewicht sind. Es sind demnach die Kräfte 7—9 und 9—10 bei jeder Belastung einander gleich und ihre Resultirende ist die Kraft 8—9. Die letztere wird ein Maximum, wenn die beiden ersteren ihren grössten Werth annehmen. Zieht man also durch den linken Endpunkt der Spannung 7—9 zum Stab 9—10 die Parallele, so schneidet diese den Pfosten in einem Punkt, dessen Entfernung vom Knotenpunkte 9 gleich der Kraft 8—9 ist.