Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 13/14 (1889)
Heft: 8

Artikel: Einige Aufgaben aus dem Gebiete der Trägheitsellipse
Autor: Ritter, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15658

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Einige Aufgaben aus dem Gebiete der Trägheitsellipse.

Von Professor *W. Ritter.*

Der Zweck nachfolgender Zeilen besteht darin, graphische Lösungen für einige specielle Aufgaben aus dem Gebiete der Trägheitsellipse anzugeben, die zur Zeit noch wenig oder gar nicht bekannt sind.

Wir stützen uns in unsern Entwickelungen auf folgenden Fundamentalsatz aus der Lehre von der Centralellipse:

Das Centrifugalmoment eines Systems von belasteten Punkten (bezw. einer geschlossenen Figur) in Bezug auf zwei beliebige Axen ist gleich der Summe sämmtlicher Gewichte (bezw. gleich dem Flächeninhalte der Figur), multiplicirt mit dem Abstande des Schwerpunktes von der einen Axe und mit dem Abstande des Antipoles dieser Axe von der zweiten)*

Aus diesem Hauptsatze ergiebt sich unmittelbar folgender Nebensatz:

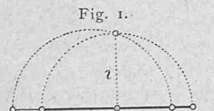
Ist das Centrifugalmoment eines Punktsystems (einer geschlossenen Figur) in Bezug auf zwei Axen gleich Null, so enthält jede dieser Axen den Antipol der andern.

Dieser ebenso einfache als fruchtbare Satz liegt allen nachfolgend beschriebenen Constructionsverfahren zu Grunde. Indessen lassen sich diese Verfahren auch rechnerisch ableiten, und wer nicht gewohnt ist, mit Antipolen und Antipolaren umzugehen, dem wird es nicht schwer fallen, die Richtigkeit der angegebenen Lösungen mit Hülfe algebraischer Rechnungen nachzuweisen.

1. Es sei die Centralellipse für zwei belastete Punkte zu zeichnen.

Die Ellipse für zwei belastete Punkte kann nur in der Richtung der Verbindungslinie eine von Null verschiedene Ausdehnung haben; sie schrumpft also zu einer einfachen *Linie* von bestimmter Länge zusammen.

Fig. 1.



Es seien D_1 und D_2 die gegebenen Punkte und M deren Schwerpunkt. Zeichnet man über $D_1\,D_2$ einen Halbkreis und errichtet man in M ein Loth, so wird auf diesem der Halbmesser i der Ellipse abgeschnitten; klappt man diese Strecke nach links und rechts herunter, so bekommt man die Endpunkte $E\,E$ der gesuchten Centralellipse.

Legt man nämlich durch D_1 uud D_2 zwei beliebige Geraden, so wird das auf diese bezogene Centrifugalmoment offenbar gleich Null; jede der beiden Geraden enthält demnach den Antipol der andern, das heisst, die Punkte D_1 und D_2 liegen in Bezug auf die Ellipse antipolar; sie bilden ein Paar der involutorischen Reihe, in welcher die Punkte $E\,E$ das symmetrische Paar sind.

Rechnerisch lässt sich der Beweis wie folgt leisten: Bedeuten G_1 und G_2 die beiden Gewichte, so ist nach einfachen Regeln

$$M\,D_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\,.\,D_1\,D_2 \quad \text{und}$$

$$M\,D_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\,.\,D_1\,D_2.$$

Auf M bezogen ist aber das Trägheitsmoment des Ganzen

$$(G_1 + G_2)\;i^2 = G_1\,.\,\overline{M\,D_1}^2 + G_2\,.\,\overline{M\,D_2}^2.$$

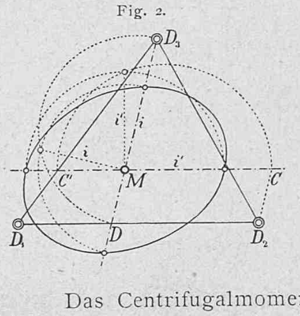
Setzt man obige Werthe von G_1 und G_2 ein, so ergibt sich

$$i^2 = M\,D_1\,.\,M\,D_2.$$

2. Es soll die Centralellipse für drei belastete Punkte gezeichnet werden.

D_1, D_2 und D_3 (Fig. 2) seien die gegebenen Punkte und M ihr Schwerpunkt.

Fig. 2.



Zunächst erhält man leicht zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse, wenn man M mit D_3 verbindet und durch M eine Parallele $C\,C'$ zu $D_1\,D_2$ zieht; denn das Centrifugalmoment wird für diese zwei Durchmesser gleich Null. Da nämlich die Punkte D_1 und D_2 von $C\,C'$ gleich weit abstehen, ihre Abstände von $M D_3$ aber sich umgekehrt verhalten wie ihre Gewichte, so heben sich ihre Centrifugalmomente auf; dasjenige von D_3 ist ohnedies gleich Null.

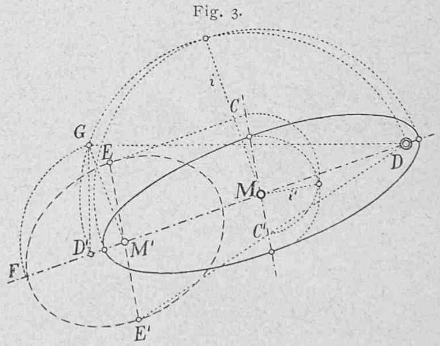
Das Centrifugalmoment verschwindet aber auch für die Linie $D_1\,D_2$ und eine beliebige durch D_3 gelegte Gerade; D_3 ist demzufolge der Antipol von $D_1\,D_2$. Auf dem Durchmesser $M\,D_3$ bilden somit die Punkte D und D_3 wiederum ein Paar der durch die Ellipse bestimmten involutorischen Reihe; ein Halbkreis über $D\,D_3$ schneidet demnach auf dem in M errichteten Lothe den Halbmesser i ab.

Um den andern Halbmesser i' zu finden, verbinde man D_1 mit D_3 und ziehe $D_2\,C$ parallel zu $M\,D_3$; dann verschwindet für diese beiden Geraden wieder das Centrifugalmoment des Ganzen; C' ist somit der Antipol von $D_2\,C$; folglich schneidet der Halbkreis mit dem Durchmesser $C\,C'$ über M die Strecke i' ab.

Hierdurch ist die Ellipse vollständig bestimmt. Leicht kann man aber dreimal so viele Elemente finden, indem man die Construction für die Durchmesser $M\,D_1$ und $M\,D_2$ und deren conjugirte wiederholt.

3. Es sei die Centralellipse für eine beliebige Anzahl belasteter Punkte bekannt und es soll ein neuer Punkt angeschlossen werden.

Fig. 3.



Die gestricht gezeichnete Ellipse M' sei gegeben und es soll der Punkt D damit verbunden werden; der gemeinschaftliche Schwerpunkt sei M.

Zunächst suche man in der gegebenen Ellipse den zu $M'\,D$ conjugirten Durchmesser $E\,E'$ und ziehe dazu eine Parallele $C\,C'$ durch M; dann bilden $C\,C'$ und $M\,D$ ein Paar conjugirter Durchmesser der neuen Ellipse; denn für die gestrichte Ellipse liegt der Antipol von $C\,C'$ auf $M\,M'$; das Centrifugalmoment des Ganzen wird daher für die beiden Durchmesser gleich Null.

Die Halbmesser i und i' der neuen Ellipse findet man hierauf folgendermassen:

Man dreht zuerst den Halbmesser $M'\,F$ der alten Ellipse um 90° nach $M'\,G$ und zeichnet den rechten Winkel $D\,G\,D'$; dann liegen D und D' in Bezug auf die alte Ellipse antipolar. Legt man durch diese Punkte Axen parallel zu $E\,E'$, so verschwindet daher für diese Axen das Centrifugalmoment des alten Systems und — da der neue Punkt D auf einer der Axen liegt — auch das gesammte Centrifugalmoment. D und D' liegen somit auch in Bezug auf die neue Ellipse antipolar und die Strecke i wird demgemäss durch einen Halbkreis über $D\,D'$ abgeschnitten.

Man kann hierbei die Bestimmung von D' umgehen;

*) Vergl. Schweiz. Bauzeitung, Bd. XI, S. 122.

denn man findet den Mittelpunkt des Halbkreises $D D'$ auch dadurch, dass man $D G$ halbirt und im Halbirungspunkte ein Loth errichtet.

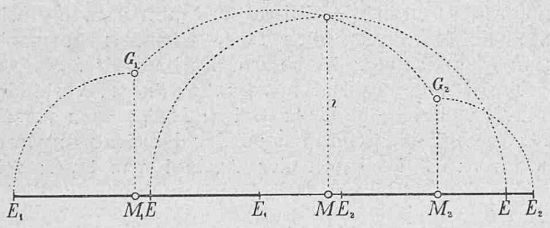
Die Grösse von i' sodann wird wie früher erhalten, wenn man $E C$ parallel zu $M D$ zieht, E' mit D verbindet und über $C C'$ einen Halbkreis zeichnet, denn für die Axen $E C$ und $E' C'$ wird das gesammte Centrifugalmoment wieder gleich Null, weil $E' C'$ sowohl den Punkt D als auch den Antipol von $E C$ hinsichtlich der gestrichten Ellipse enthält.

Auf den unter 2 und 3 beschriebenen Wegen lässt sich offenbar die Centralellipse für eine beliebige Anzahl von Punkten zeichnen; man zeichnet sie zuerst für drei Punkte und schliesst dann einen Punkt nach dem andern an. Allein schon für 4 bis 5 Punkte wird das Verfahren umständlich. Bei einer grösseren Zahl von Punkten wendet man daher besser das allgemein gültige Verfahren an, das heisst man bestimmt durch fünf Seilpolygone die Trägheits- und Centrifugalmomente für zwei aufeinander senkrechte Schwerpunktsaxen. (Vergl. Culmanns Graph. Statik, 2. Aufl. S. 475 u. ff.)

4. Es sollen zwei in einer und derselben Geraden liegende (zusammengeklappte) Ellipsen zu einer einzigen vereinigt werden.

Die gegebenen Ellipsen seien $E_1 E_1$ und $E_2 E_2$, ihre Mittelpunkte M_1 und M_2. Der Mittelpunkt der neuen Ellipse

Fig. 4.

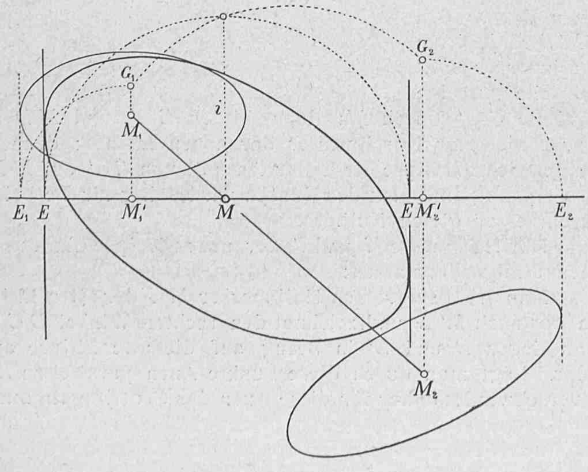


sei M. Nun drehe man die Halbmesser $M_1 E_1$ und $M_2 E_2$ um 90^0 nach $M_1 G_1$ und $M_2 G_2$ und zeichne einen Kreisbogen $G_1 G_2$, dessen Mittelpunkt auf der gemeinschaftlichen Geraden liegt; dann schneidet dieser Kreis über M die Strecke i ab, und durch Herunterklappen dieser Strecke findet man die Endpunkte $E E$ der neuen Ellipse.

Ergänzt man nämlich den Bogen $G_1 G_2$ zum Halbkreis, so liegen dessen Endpunkte antipolar in Bezug auf jede der beiden gegebenen Ellipsen, folglich auch hinsichtlich der gesuchten Ellipse, so dass dieser Kreis in der That den Halbmesser i der neuen Ellipse bestimmt.

5. Durch dreimalige Anwendung des soeben beschriebenen Verfahrens lassen sich schliesslich auch zwei beliebige Ellipsen in eine einzige vereinigen.

Fig. 5.



Sind die Ellipsen M_1 und M_2 gegeben und ist M der gemeinschaftliche Schwerpunkt, so lege man durch M eine beliebig gerichtete Axe $E E$, projieire auf sie die Mittelpunkte der gegebenen Ellipsen und lege zugleich an jede derselben eine auf der Axe senkrechtstehende Tangente. Dann drehe man die Strecken $M_1' E_1$ und $M_2' E_2$ um einen rechten Winkel und lege durch G_1 und G_2 einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt sich auf der Axe befindet. Hierdurch wird über M die Strecke i abgeschnitten, welche heruntergedreht die Punkte $E E$ und damit zwei Tangenten an die neue Ellipse liefert.

Führt man diese Construction noch für zwei weitere Axen durch M aus, so erhält man zwei neue Tangentenpaare und damit ist die ganze Ellipse bestimmt.

Dieses Verfahren zur Vereinigung zweier Centralellipsen ist kaum umständlicher, jedenfalls aber übersichtlicher und leichter zu behalten als dasjenige, welches Ingenieur E. Hilgard in der „Schweiz. Bauztg.“ Bd. I, S. 143 beschrieben hat.

Das beschriebene Verfahren zur Vereinigung zweier Ellipsen kann in der Baustatik zuweilen da mit Vortheil angewendet werden, wo man nach Culmanns Vorgang die elastischen Formänderungen mit Hülfe von Elasticitätsellipsen bestimmt. Seine nächstliegende Verwendung findet das Verfahren jedoch, wie auch in dem soeben genannten Artikel betont ist, bei der Bestimmung der Centralellipse ebener Figuren, die sich zwanglos in zwei einfache Figuren zerlegen lassen, das sind Profile von gleich- und ungleichschenkligen Winkeleisen, T-Eisen und dgl. Häufig wird hierbei nur nach dem Trägheitsmoment in Bezug auf *eine* bestimmte Axe gefragt; in diesem Falle braucht obige Construction nur *ein*mal durchgeführt zu werden; man wählt dabei als Ausgangsrichtung die auf der gegebenen Trägheitsaxe senkrecht stehende Linie.

Das Krematorium auf dem Centralfriedhof in Zürich.

(Mit einer Lichtdruck-Tafel.)

II. (Schluss.)

Es ist hier noch der Ort darauf hinzuweisen, dass an Lage und Gestalt des Ofens die Anforderung gestellt wurde, denselben als ganz freistehend von allen Seiten sichtbar anzulegen, eine Lösung, die keinerlei Zweifel über die Durchführung des Verbrennungsactes aufkommen lässt.

Der Ofen, in Chamotte-Steinen erbaut, ist mit einem eisernen Mantel umgeben, der um allfällige Reparaturen am Mauerwerk vornehmen zu können, zum Demontiren construirt ist. Vor der Ofenöffnung auf der sog. Banquette ruht ein schlauchartiger beweglicher Behälter, der lediglich dazu dient, etwas empfindlichen Naturen beim Einschieben des Sarges den Anblick des glühenden Innenraumes zu verunmöglichen. In den meisten Fällen wird aber von der Vorrichtung kein Gebrauch gemacht.

Die zwei an der Rückseite der Halle sich befindenden Thüren führen in zwei getrennte Räume, wovon der eine das Warte- und Archivzimmer ist, der andere die Gasgeneratoren und eine Treppe, die zum Kellerraum führt, enthält In letzterem ist die eigentliche Feuerung, ferner befinden sich direct unter dem Ofen die Kurbelvorrichtungen zum Oeffnen der Schieberthüre des Ofens und diejenige zum Einschieben des Sarges.

Mit dem Baue selbst wurde im Herbste 1887 begonnen und im selben Jahre noch das Fundament bis zur Sockelhöhe erstellt; die übrigen Arbeiten kamen im Laufe des Jahres 1888 zur Ausführung. Für die Façaden wurde Ostermundinger Sandstein und Cementsteine verwendet, Sockel und Treppen bestehen aus Granit.

Die einzelnen Arbeitsgattungen haben in runden Summen folgende Beträge beansprucht:

1) Erd- und Maurerarbeiten	Fr.	17 200
2) Steinhauerarbeiten	„	11 800
3) Zimmerarbeiten	„	2 500
4) Schmied- und Schlosserarbeiten	„	2 150
5) Spenglerarbeiten	„	900
6) Glaserarbeiten	„	620
Uebertrag .	Fr.	35 170