Inhaltsverzeichnis

Die Tragfähigkeit strebenloser Fachwerkpfeiler.

Von Prof. W. Ritter.

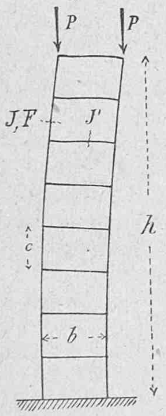
Von Seiten eines im Brückenbau viel beschäftigten Ingenieurs wurde mir vor einiger Zeit die Frage vorgelegt, wie die Tragfähigkeit eines eisernen Pfeilers bestimmt werden könne, bei welchem die schiefen Streben fehlen. Da die Frage allgemeineres Interesse bietet, möge deren Beantwortung hier veröffentlicht werden.

Meistens setzt man eiserne Fachwerkpfeiler aus vier Pfosten, Querstäben und Diagonalen zusammen. Die Tragfähigkeit für lothrechte Belastungen bestimmt man dann nach der Querschnittsfläche der Pfosten, wobei, wenn die Querstäbe weit von einander abstehen, auch die Knickgefahr der Pfosten zu berücksichtigen ist.

Lässt man jedoch die Diagonalen weg, so ist diese Berechnungsart nicht mehr zulässig, weil sich der Pfeiler jetzt wegen mangelnder Steifigkeit leichter seitlich ausbiegt. Die vier Pfosten könnten sogar zusammen nicht mehr als vier einzelne Pfosten tragen, wenn nicht durch die starre Vernietung der Querstäbe die Gefahr einer Ausbiegung vermindert würde.

Die Lösung der Aufgabe muss auf demselben Wege gesucht werden, auf dem man die Knickfestigkeit langer Druckstäbe berechnet: Man nimmt an, es sei eine kleine seitliche Ausbiegung eingetreten und stellt für diesen Fall unter Berücksichtigung der elastischen Formänderungen die Gleichgewichtsbedingungen der auftretenden Kräfte auf.

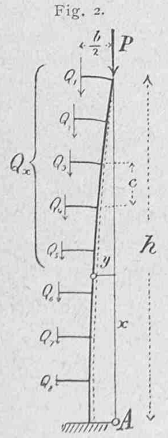
Fig. 1.



Nebenstehende Figur 1 zeigt, in welcher Weise sich bei dieser seitlichen Ausbiegung die einzelnen Stäbe krümmen. Die Querstäbe verbiegen sich sämmtlich S-förmig; es geht daraus hervor, dass sie unter dem Einflusse von Kräften stehen, die je in der Mitte des Stabes angreifen; und zwar müssen diese Kräfte lothrecht laufen, weil wagrechte Kräfte (symmetrische Construction vorausgesetzt) nicht vorkommen können.

Betrachten wir nun einen einzelnen Pfosten, zum Beispiel den rechtsseitigen, so ergeben sich als angreifende Kräfte die gegebene Last P und die noch unbekannten Kräfte Q_1, Q_2.... Setzt man P der Reihe nach mit den Kräften Q zusammen, so bekommt man die angreifenden Kräfte für die einzelnen Glieder des Pfostens; diese Kräfte nehmen nach unten langsam zu und verschieben sich etwas nach links. In der Folge dürfen wir uns die Annahme gestatten, dass die Querstäbe in unendlich kleinen Abständen auf einander folgen; dann liegen diese Kräfte auf einer stetigen (in der Figur 2 punktirten) Curve.

Fig. 2.



Wir wählen jetzt A als Anfangspunkt eines Coordinatensystems und nennen die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Pfostens x und y. Ferner denken wir uns die Kräfte Q je über die anstossende Strecke des Pfostens vertheilt und nennen die auf die Längeneinheit treffende Kraft q. (Im Allgemeinen ist hiebei q von oben nach unten veränderlich.)

Für den Punkt x, y ergibt sich dann die Grösse der angreifenden Kraft

$$P_x = P + \int_x^h q \,.\, dx,$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\int_x^h q \,.\, dx = Q_x \tag{1}$$

setzt, $\quad P_x = P + Q_x$.

Nennt man die Querschnittsfläche des Pfostens F und den Elasticitätsmodul des Materials E, so verkürzt sich ein Element des Pfostens von der Länge dx um die Strecke

$$de = \frac{P_x \,.\, dx}{F \,.\, E}.$$

Daraus ergibt sich die *Senkung*, welche der Punkt $x\,y$ erfährt,

$$e = \int_0^x \frac{P_x \,.\, dx}{F \,.\, E} = \int_0^x \frac{(P + Q_x)\, dx}{F \,.\, E}.$$

Für den linksseitigen Pfosten erhält man auf gleiche Weise $P_x = P - Q_x$, weil für diesen die Kräfte q in entgegengesetzter Richtung wirken. Der entsprechende Punkt des linken Pfostens senkt sich also etwas weniger als derjenige des rechten. Berechnet man nun e für den linken Pfosten und zieht die beiden Senkungen von einander ab, so bekommt man *den Höhenunterschied zweier entsprechender Punkte*

$$\varDelta e = 2 \int_0^x \frac{Q_x \, dx}{FE}. \tag{2}$$

Berechnet man zweitens das Biegungsmoment der angreifenden Kräfte für den Punkt $x\,y$, so bekommt man

$$M = P \,.\, y - Q_x \,.\, {}^1/_2 b. \tag{3}$$

Der Hebelarm der Kräfte Q darf hierbei constant gleich ${}^1/_2 b$ gesetzt werden, da die Ausbiegung des Pfostens gegenüber der Breite b verschwindend klein angesehen wird.

Nennt man das Trägheitsmoment des Pfostenquerschnittes I, so lautet die Gleichung der elastischen Linie des Pfostens

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = - M. \tag{4}$$

Ferner ergibt sich *die Richtungsänderung des Pfostens* im Punkte $x\,y$

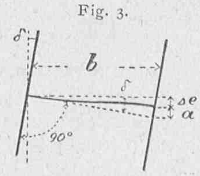
$$\delta = - \frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

Betrachten wir jetzt drittens noch einen Querstab und suchen wir die Strecke a, um welche die Tangenten in den beiden Endpunkten verschoben werden, wenn in der Mitte die Querkraft qc wirkt.

Im Abstande z vom linken Endpunkte hat der Stab das Moment $M = qc\,({}^1/_2 b - z)$ auszuhalten. Ein Element des Stabes von der Länge dz verdreht sich somit, wenn I' das Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet, um den Winkel $d\delta = \frac{M \,.\, dz}{E \,.\, I'}$. Multiplicirt man diesen Werth mit $b - z$, so erhält man die Strecke, um welche sich der rechte Endpunkt infolge dessen hebt. Durch Summirung dieser Strecken findet man a. *Die Verschiebung der beiden Endtangenten* beträgt also

$$a = \int_0^b (b - z)\, d\delta = \frac{q\, b^3 c}{12\, EI'}. \tag{6}$$

Fig. 3.



Der Höhenunterschied $\varDelta e$ zweier entsprechender Pfostenpunkte, die Richtungsänderung δ des Pfostens und die Verschiebung a der Endtangenten eines Querstabes müssen nun miteinander übereinstimmen; und zwar ergibt sich an der Hand nebenstehender Figur 3 für jeden Querstab die Beziehung

$$\varDelta e + a = b\,\delta. \tag{7}$$