

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	11/12 (1888)
Heft:	16
Artikel:	Der elastische Bogen unter dem Einfluss von Kräften beliebiger Richtung
Autor:	Mantel, Gustav
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-15004

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Der elastische Bogen unter dem Einfluss von Kräften beliebiger Richtung. Von Ing. Gustav Mantel. — Wildbach- und Fluss-Verbauung nach den Gesetzen der Natur. — Erfindungsschutz. — Patentliste. — Miscellanea: Eidgenössisches Polytechnikum. Eisenbahnen nach Abt's System in Oesterreich. Die Neuorganisation des eidg. De-

partements des Innern. — Concurrenzen: Kirche in Bern. Katholische Kirche in Wettingen. Domfaçade in Mailand. — Necrologie: † Arnold Bosshard. † Dr. Karl Kappeler. — Vereinsnachrichten. Stellenvermittelung.

Der elastische Bogen unter dem Einfluss von Kräften beliebiger Richtung.

Von Ingenieur Gustav Mantel.

Der Kräfteplan für den elastischen Bogen nach Culmann & Ritter ist nicht an eine bestimmte Richtung der äussern einwirkenden Kräfte gebunden; die Principien, aus denen er hervorgeht, gelten für alle Richtungen derselben. Wohl aber ist vorausgesetzt, dass diese Kräfte alle untereinander parallel wirken (abgesehen von den secundären Kräften, den Kämpferdrücken), denn der Kräfteplan baut sich vorzugsweise auf die Lehren von den höhern Momenten paralleler Kräfte und der diese Momente liefernden Seilpolygone auf. Ausserdem sind diese äussern einwirkenden Kräfte bis dato immer vertical angenommen worden, dem für die Praxis wichtigsten Fall der Inanspruchnahme des Bogens durch auf denselben gebrachte Lasten entsprechend.

Will man die Berechnung des Bogens auch für Kräfte von beliebigen unter sich nicht parallelen Richtungen mittels der graphischen Methode durchführen, so bleibt nichts übrig, als den Kräfteplan für zwei Gruppen jeweils paralleler Kräfte zu construiren, die äussern einwirkenden Kräfte in diese zwei Richtungen zu zerlegen und die diesen Componenten entsprechenden Widerlagerreactionen, gestützt auf die relative Kleinheit der elastischen Formänderungen des Bogens, wieder zu Gesammtreactionen zu vereinigen. Die Richtung des zweiten Kräftesystems wird natürlich am bequemsten horizontal angenommen. Bei der Wichtigkeit der graphischen Methoden gerade in ihrer Anwendung auf den Bogen, für welchen sie wol die elegante und allgemeinsten Berechnung der inneren Kräfte liefern, scheint es am Platze, die angedeutete Verallgemeinerung einmal durchzuführen. Es wäre dieselbe auch practisch nicht ganz unwichtig, denn nicht nur kann man in die Lage kommen, aus ästhetischen Gründen bei einem flachen, unversteiften Bogen die die Fahrbahn tragenden Pfosten radial stellen zu müssen, es kann auch geboten erscheinen, die horizontale Kraftwirkung eines gebremsten Eisenbahnzuges auf einen versteiften oder unversteiften Bogen zu berücksichtigen, was der Kräfteplan für horizontale Kräfte direct ermöglicht^{*)}. Wenn wir also voraussetzen, dass der Kräfteplan für die verticalen Kräfte ausgeführt sei, so bleibt als nächster Schritt die Durchführung desselben für den elastischen Bogen unter dem Einfluss horizontaler Kräfte.

Der elastische Bogen mit festem Auflager unter dem Einfluss horizontal wirkender äusserer Kräfte.

Die Herstellung des Kräfteplans für horizontal wirkende parallele Kräfte bietet nun keine principiellen Schwierigkeiten, indem es sich nur um die Anpassung der als bekannt vorausgesetzten Constructionen Culmann's und Ritter's für verticale Kräfte auf ein horizontales Kräfteam system handelt. Ich halte mich im Folgenden genau an die so lichtvolle Darstellung in dem kleinen Werke Ritter's „Der elastische Bogen berechnet mit Hülfe der graphischen Statik“, in welchem Professor Ritter diesen Theorien und Kräfteplänen die abschliessende Form gegeben hat und wo er auch zum ersten Male lehrt, wie ohne irgend wesent-

^{*)} Dient ferner eine Reihe nebeneinander gestellter Bogen als Dachträger, so führt die Untersuchung über den Einfluss des Winddrucks auf das nämliche Problem und für diesen speciellen Zweck hat Herr Prof. Guidi in Turin die Lösung nach der Methode Eddy im Jahre 1884 veröffentlicht und auch Herr Prof. Tetmajer gibt in einem nun vergriffenen autographirten Heft über Dachconstructionen den Weg nach Culmann's Methode für Dachträger mit Punktauflager, was ich beides erst nachträglich in Erfahrung gebracht habe.

lichen Complicirung gleichzeitig, nicht erst nachträglich, die scheerenden und pressenden Kräfte mitberücksichtigt werden können und zwar mit Hülfe des überaus wichtigen Satzes von Culmann über die Centrifugalmomente, welcher lautet: „Das Centrifugalmoment eines Systems von parallelen Kräften in Bezug auf zwei beliebige Axen ist gleich der Resultanten der Kräfte mal dem Abstand des Schwerpunktes des Systems von der einen der beiden Axen, mal dem Abstand des Antipols dieser Axe bezüglich der Centralellipse des Systems von der zweiten“ oder wie ihn Prof. Ritter für seinen speciellen Zweck umformt: Das Centrifugalmoment einer ebenen Figur bezüglich zweier beliebigen Axen ist gleich dem Flächeninhalt der Figur mal der Entfernung des Schwerpunktes von der einen Axe mal der Entfernung des Antipols dieser Axe von der zweiten.

Mit Hülfe dieses Satzes wird es möglich, die Formänderungen einer Reihe von Balkenelementen zusammen zu setzen. Es kann nämlich die Gesamtbewegung, die das eine Ende eines Balkenelementes unter dem Einfluss einer beliebig wirkenden äussern Kraft erleidet (die sich in Moment scheerende und pressende Kraft zerlegen lässt) und dessen zweite Begrenzungsfäche fest gehalten ist, angesehen werden als eine Drehung um den Antipol der Kraft in Bezug auf eine Ellipse, deren kleine Halbaxe gleich dem Trägheitsradius i des Querschnittes und dessen grosse Halbaxe gleich $i \cdot \sqrt{\frac{E}{E'}}$ ist, wo E den Elasticitätsmodul für Zug und Druck, E' denjenigen für Scheeren bedeutet.“ (Seite 4: „Der elastische Bogen“).

Die Summationen dieser Formänderungen müssen bekanntlich für den ganzen Bogen und einzelne Abschnitte desselben ausgeführt werden können, um die Bewegungen eines Punktes des Bogens (oder auch eines mit demselben starr verbundenen Punktes) unter dem Einfluss von äussern, den Bogen deformirenden Kräften ausdrücken zu können, welche Bewegungen dann ihrerseits auf die gesuchten, aus den blossen statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht bestimmbaren Kämpferdrücke führen. Man denkt sich dabei das eine Ende des Bogens festgehalten, das andere frei schwebend, und auf denselben eine Kraft beliebiger Richtung wirkend. Die Bewegung irgend eines Punktes in Folge der elastischen Formänderung des Bogens, zusammengesetzt gedacht aus einer Drehung, einer horizontalen und einer verticalen Verschiebung des Punktes, bestimmt sich dann, wenn man sich die einzelnen Bogenelemente belastet denkt mit den hypothetischen Gewichten

$$\frac{ds}{EJ} = \frac{\text{Bogenelement}}{\text{Elasticitätsmodul} \times \text{veränderliches Trägheitsmoment}}.$$

aus folgenden fundamentalen Sätzen:

- 1) die Drehung ist gleich der einwirkenden Kraft multipliziert mit dem statischen Moment des von der Kraft beeinflussten Bogenteiles in Bezug auf die Kraftrichtung;
- 2) die verticale Bewegung (Einsenkung) ist gleich der einwirkenden Kraft multipliziert mit dem Centrifugalmoment des beeinflussten Bogenteiles, genommen in Bezug auf eine verticale Axe durch den untersuchten Punkt und in Bezug auf die Kraftrichtung;
- 3) die horizontale Verschiebung des Punktes ist gleich der einwirkenden Kraft multipliziert mit dem Centrifugalmoment des beeinflussten Bogenteils genommen in Bezug auf eine horizontale Axe durch den untersuchten Punkt und auf die Kraftrichtung.

Die Gewichte $\frac{ds}{EJ}$ sind also in erster Linie zu multiplizieren mit dem Schwerpunktabstand der Elemente von der verticalen und horizontalen Axe durch den angenommenen Punkt und dann ferner mit dem Abstand der Antipole dieser

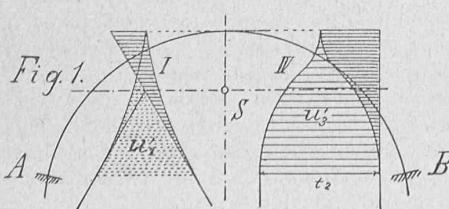
Axen bezüglich der Elasticitäts-Ellipsen der einzelnen Elemente (mit den Halbachsen i und $i \cdot \sqrt{\frac{E}{E'}}$) von der Kraftrichtung.

Wenn es sich um eine aufgelegte Last handelt, so beeinflusst diese nur das Bogenstück zwischen ihrem Angriffspunkt und dem festen Auflager; die Wirkung der Widerlagerreaction dagegen, welche die Aufgabe hat, das frei schwebende Ende wieder in die ursprüngliche Lage zurückzuführen, die es vor Aufbringung der Last einnahm, erstreckt sich über den ganzen Bogen. Fasst man die Gesamtbewegung des Bogenendes (oder des damit fest verbundenen Punktes) als eine Drehung um einen bestimmten Punkt auf, so liegt jede den ganzen Bogen beeinflussende Kraft zu Folge eines weitern wichtigen Satzes in der Antipolaren dieses Drehpunktes bezüglich der Centralellipse, die man für den mit den $\frac{As}{EJ}$ belasteten Bogen construiren kann und umgekehrt deformiert jede solche Kraft den Bogen in der Weise, dass die Bewegung des frei schwebenden Endpunktes einer Drehung um den Antipol der Kraft in Bezug auf die erwähnte Ellipse gleichkommt. Indem man nun für jede einen beliebigen Theil des Bogens deformirende Kraft aus dem statischen und den Centrifugalmomenten die Bewegungen des freien Endes und den Drehpunkt für diese Bewegung finden kann, ist auch die Lage des Kämpferdruckes gegeben in der Antipolaren des Drehpunktes. — Hält man das bis jetzt frei gedachte Ende fest und lässt das andere Ende frei schweben, so ergiebt die Wiederholung der nämlichen Operation auch die Reaction des andern Auflagers. Beide Reactionen müssen sich auf der Kraftrichtung in einem Punkt schneiden, da Gleichgewicht zwischen diesen drei Kräften herrschen muss und in diesem Punkt lässt sich die einwirkende Kraft nach den Richtungen der Kämpferdrücke zerlegen, wodurch diese also auch nach ihrer Grösse bekannt sind.

Nach dieser kurzen Wiederholung der Principien, die zur Auffindung der Kämpferdrücke führen, falls der Bogen durch eine Kraft beliebiger Richtung beansprucht ist, soll diese Richtung nun horizontal angenommen werden und die Lagen des Kämpferdruckes bestimmt werden für jede Lage der Kraft.

Es müssen vier Seilpolygone gezeichnet werden, von denen drei schon vorhanden sind, falls der Kräfteplan, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, zuerst für vertical wirkende Kräfte durchgeführt wurde. Entsprechend der von Prof. Ritter eingeführten Annahme sei der mit dem freischwebenden Bogenende fest verbundene Punkt, dessen Bewegung untersucht und rückgängig gemacht werden soll, der Schwerpunkt S des mit $\frac{As}{EJ}$ belasteten Bogens; das festgehaltene Bogenende sei das rechts liegende B , das freie das linksliegende A .

Im ersten Seilpolygon (I der Fig. 1) wirken die $\frac{As}{J}$ (E fällt nachträglich überall heraus, kann daher weg gelassen werden) horizontal in den Lamellenschwerpunkten, falls der Bogen vollständig ist (oder die $\frac{S}{Fa^2}$ in den ihnen entsprechenden Drehpunkten, falls dieselbe als

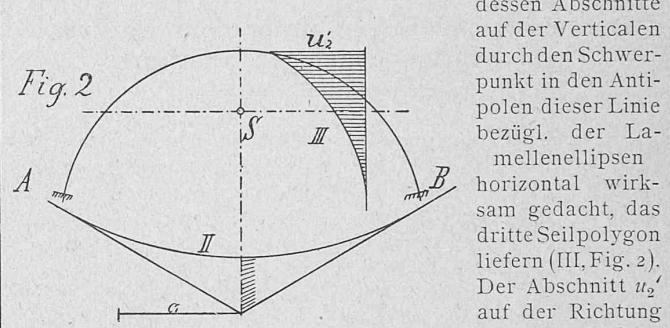


Fachwerk gebildet). Die Abschnitte u_1' auf den horizontalen Kraftrichtungen zwischen der verlängerten letzten Seilpolygonseite und

derjenigen nach der Kraft, multiplicirt mit der benutzten Poldistanz H_1 geben die statischen Momente des beeinflussten Bogentheils und sind nach dem früher Gesagten der Drehung des Punktes S proportional. Ihre Werthe wachsen

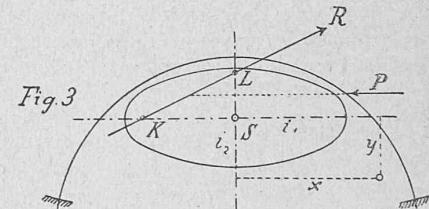
bis zum Scheitel, nehmen dann ab, werden negativ und erreichen ein negatives Maximum, wenn P (siehe Flg. 3) bei A angelangt ist.

Lässt man die $\frac{As}{J}$ in den Schwerpunkten vertical wirken, so erhält man ein zweites Seilpolygon (II. Fig. 2), dessen Abschnitte auf der Verticalen durch den Schwerpunkt in den Antipolen dieser Linie bezügl. der Lamellenellipsen horizontal wirksam gedacht, das dritte Seilpolygon liefern (III, Fig. 2).



Der Abschnitt u_2' auf der Richtung einer Kraft P ist der verticalen Verschiebung des Schwerpunktes S proportional, denn diese u_2' multiplicirt mit H_2 und C_1 , den benutzten Poldistanzen, sind den Centrifugalmomenten des beeinflussten und mit $\frac{As}{J}$ belasteten Bogenstückes bezüglich der verticalen Schwerpunktsaxe und der horizontalen Kraftrichtung proportional. Diese Momente wachsen bis zum Scheitel und nehmen im nämlichen Masse wieder bis 0 ab (da das Seilpolygon in sich selbst zurückkehrt), wenn die Kraft P vom Auflager B zum Auflager A sich bewegt.

Lässt man endlich die Abschnitte des ersten Seilpolygons auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt in den Antipolen dieser Linie bezügl. der Lamellenellipsen horizontal wirken, so erhält man ein viertes Seilpolygon (IV in Fig. 1), dessen auf den horizontalen Kraftrichtungen gemessene Abschnitte u_3' den Centrifugalmomenten ($H_1 C_1 u_3'$) bezügl. der horizontalen Schwerpunktsaxe und den entsprechenden Kraftrichtungen, daher auch den horizontalen Verschiebungen des Punktes S proportional sind. Diese Werthe wachsen continuirlich, während sich die Kraft von B nach A bewegt.



Wie nun aus den Grössen u_1' u_2' u_3' auf die Lage der den Punkt S und damit das Bogenende A zurückführenden Kraft d. h. des Kämpferdruckes bei A geschlossen werden kann, soll nur durch eine kurze Wiederholung des von Prof. Ritter eingeschlagenen Weges ange deutet werden.

Nennen wir die Drehung des Punktes $S = \delta$, die verticale resp. horizontale Bewegung desselben k und b , so kann (abgesehen von einer Constanten) gesetzt werden

$$\delta = P \cdot H_1 u_1'; \quad k = P \cdot H_2 \cdot C_3 u_2'$$

$$b = P H_1 C_2 u_3'.$$

Diese Bewegungen können als Drehung um einen Punkt (x, y) aufgefasst werden, und zwar ist $k = x \cdot \delta$ und $b = y \cdot \delta$, woraus

$$x = \frac{C_3 u_2'}{u_1'}, \quad y = \frac{C_2 u_3'}{u_1'}.$$

Der Kämpferdruck R wirkt, weil den ganzen Bogen beeinflussend, in der Antipolaren des Punktes (x, y) bezügl. der Centralellipse des Bogens, deren Halbachsen $i_1 = \sqrt{C_1 h}$ und $i_2 = \sqrt{C_2 t_2}$ sind, wo t_2 aus dem von uns als vierter bezeichneten Polygon und t_1 aus einem weiteren entsteht, wie das vierte aus dem ersten und welches, weil für den Kräfteplan für verticale Kräfte nothwendig, als schon vorhanden

zu betrachten ist. Da nun $x \cdot KS = i_1^2$ und $y \cdot LS = i_2^2$, so folgt

$$KS = \frac{C_1 t_1 u_1'}{C_3 u_2'} \text{ und } LS = \frac{t_2 u_1'}{u_3'},$$

womit die Lage von R gegeben. Bestimmt man diese Werthe für alle zusammengehörenden, je einer Lage der Kraft P entsprechenden u_1' , u_2' , u_3' , so erhält man alle Lagen, welche R einnehmen kann. Verlängert man die Kraft P bis zum Schnitt mit R , so erhält man einen Punkt der Kämpferschnittlinie d , während durch Umhüllung durch das Büschel der R die Kämpferdrucklinie d entsteht.

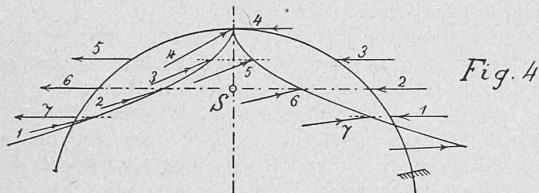


Fig. 4

Die Reactionen liegen nahe bei einander, so lange die Kraft zwischen dem festen Bogenende und dem Scheitel angreift und bilden in den Schnittpunkten mit der Kraftrichtung den linken Ast der Kämpferschnittlinie. Tritt die Kraft in die linke Bogenhälfte hinüber, so rücken die Kämpferdrücke immer weiter auseinander und nach unten, in den Schnitten mit der Kraftrichtung den zweiten, symmetrischen Ast der Kräfteschnittlinie bildend. In der nebenstehenden Figur 4 ist das rechte Ende festgehalten gedacht und je zwei entsprechende Lagen der Kraft und ihrer Reaction sind mit der nämlichen Zahl bezeichnet.

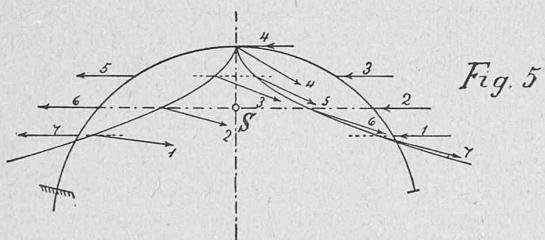


Fig. 5

Hält man das andere Ende des Bogens fest (Fig. 5), so entsprechen in Fig. 4 und 5 den nämlichen Werthen von u_1' , u_2' und u_3' symmetrisch zur verticalen Schwerpunktsaxe gelegene Kräfte P , also z. B. 2 und 6. Dabei ändern die u_1' und u_3' die Vorzeichen nicht, nur die u_2' thun dies, woraus folgt, dass die Abschnitte der Kämpferdrücke auf der y Axe auch dem Sinn nach die nämlichen bleiben, während diejenigen auf der Abscissenaxe das Zeichen wechseln. Hierin liegt das aus Fig. 5 ersichtliche Entsprechen von Kräftelelage und Kämpferdruck begründet. In Fig. 6 endlich sind die einwirkenden Kräfte nun nach

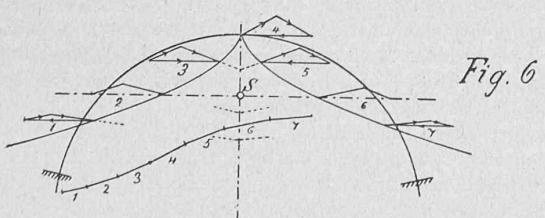


Fig. 6

beiden ihnen zugehörigen Reactionen zerlegt, wodurch auch die Grösse dieser letztern bestimmt ist. Reihet man die Kämpferdrücke ihrer Grösse und Richtung nach aneinander, so erhält man ein Kräfteleolygon von nebenstehender Form, aus welchem man Grösse und Richtung des einer beliebigen Anzahl von Einzelkräften zukommenden Kämpferdruckes entnehmen kann, z. B. den dem Winddruck entsprechenden, welcher nur eine Hälfte des Dachträgers belastet. Die Lage des resultirenden Kämpferdruckes wird bekanntlich aus dem

Seilpolygon gefunden, durch welches man alle einzelnen Kämpferdrücke zu verbinden hat.

Die Kämpferumhüllungskurve ist hier von geringerer Bedeutung, da man kaum in die Lage kommen wird, den Bogen durch willkürliche Combinationen horizontaler Kräfte zu beladen, von welchen Combinationen jeweils die für einen Constructionsteil ungünstigste aufzusuchen wäre. Da zudem deren Form eine ziemlich complicirte ist, so wollen wir erst bei Besprechung des im folgenden Abschnitt gegebenen Kräfteplans etwas näher auf dieselbe eintreten. (Schluss folgt.)

Wildbach- und Fluss-Verbauung nach den Gesetzen der Natur.

Unter diesem Titel hat Herr A. Schindler-Rochat bei den Herren Hofer & Burger in Zürich eine Schrift erscheinen lassen, um ein von ihm vorgeschlagenes Bausystem zu empfehlen. Der Verfasser hat schon im Jahre 1878 denselben Gegenstand in einer Broschüre „Die Ursachen der Hochwasser und die Mittel ihrer Bekämpfung“ behandelt und auch damals in der Wiener Allgemeinen Bauzeitung seine Ansichten veröffentlicht.

Herr Schindler*) verwirft die bisher für Verbesserung des Zustandes der Wildbäche in Anwendung gebrachten Hülfsmittel. Thalsperren will er ausnahmsweise zulassen, wenn dieselben in einer engen Schlucht auf Felsen fundirt, ebenso fest seitwärts angelehnt und gegen Unter- und Umspülung gesichert werden können. Auch Schalen will er unter Umständen gestatten; aber selbst da, wo er die Zweckmässigkeit ihrer Anwendung zugibt, betrachtet er die Wirksamkeit dieser Bauten als vorübergehend. Bei dieser Anschauungsweise versteht es sich von selbst, dass von einer Versicherung des Fusses der Seitenabhänge durch Parallelwerke, von Steintraversen und ähnlichen Bauten keine Rede sein kann. Diesen Correctionsmitteln stellt Herr Schindler die Schuttkegelbildung entgegen, deren Zustandekommen er auch im Abschwemmungsgebiete für möglich hält.

Man sieht, dass wir hier keinen neuen Grundsätzen begegnen, denn man hat von jeher als Hauptzweck der Wildbachverbauung das Zurückhalten des Materials im Abschwemmungsgebiete betrachtet und würde dieser Zweck ganz erreicht, so wäre auch der Erfolg ein vollkommener. Leider gelingt das nur selten. Gewöhnlich ist man in der Lage, einen Theil des Materials, welches sich nicht in der Schlucht zurückhalten lässt, im Ablagerungsgebiete zu versorgen. Herr Schindler rechnet auch auf diese Unvollkommenheit und zwar noch mehr als die Techniker, welche von den Thalsperren in ausgedehntem Masse Gebrauch machen. Die Kegelform, welche in den meisten Fällen das Ablagerungsgebiet der Wildbäche besitzt, nimmt er sich zum Muster und seine Baumethode besteht in der Förderung dieser naturgemässen Ablagerung. Als Mittel hierzu empfiehlt er die offenen Pfahlreihen, welche er so anordnet, dass auch da, wo in enger Schlucht Ablagerungen entstehen müssen, die Gruppen der Pfahlköpfe convexe Kegelflächen bilden. Es versteht sich von selbst, dass für Bildung dieser Reihenfolge von Schuttkegeln vorzugsweise die erweiterten Stellen der Schlucht gewählt werden.

Bekanntlich entstehen im Abschwemmungsgebiete der Wildbäche die gefährlichsten Schuttwalzen in Folge von Unterspülungen der Seitenabhänge und daraus entstehenden Abrutschungen. Das von oben herab kommende Wasser wird im Bachbett durch das abgerutschte Material aufgestaut. Ein Theil desselben durchdringt den Schutt und was nicht eindringt übt einen Druck aus, so dass die ohnehin leichter beweglich gewordene Masse bachab geht. Bei dieser Bewegung wird die Mischung vervollkommen, die Beweglichkeit nimmt zu und die so entstandene Schuttwalze tritt hinaus in das Ablagerungsgebiet. Die Gesamtheit

*) Vergl. Bd. XI S. 137 d. Z.