Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 11/12 (1888)
Heft: 18

Artikel: Ueber das räumliche Fachwerk
Autor: Föppl, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14951

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Ueber das räumliche Fachwerk. Von Dr. A. Foeppl. — Erfindungsschutz. — Patentliste. — Concurrenzen: Evangelische Kirche in Erlenbach. Naturhistorisches Museum in Münster (Westfalen). Galizische Sparcasse in Lemberg. Pavillon der Argentinischen Republik an der Pariser Weltausstellung von 1889. — Necrologie: † Jules Marguet. † A. Gähwyler. † Friedrich Oppikofer. — Vereinsnachrichten. Stellenvermittelung.

Ueber das räumliche Fachwerk.

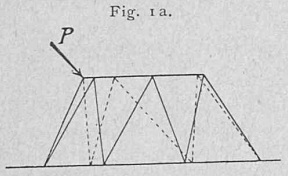
Von Dr. *A. Foeppl.*

I.

Unter dem gleichen Titel habe ich in frühern Jahrgängen dieser Zeitschrift bezw. ihrer Vorgängerin, der „Eisenbahn", eine Reihe von Aufsätzen veröffentlicht, in denen ich eine Theorie des räumlichen Fachwerkes anzubahnen versuchte. In dem letzten jener Artikel („Eisenbahn" Bd. XVII, Nr. 23) schlug ich ein neues Constructions-System für Kuppeldächer vor, dem man passend den Namen einer „Netzwerk-Kuppel" geben kann.

Eine eingehendere Theorie der Netzwerkkuppel habe ich damals nicht gegeben; ich hielt es für besser, damit zu warten, bis sich ein Bedürfniss danach kund geben würde. Das ist jetzt geschehen. Von zwei verschiedenen Seiten ging mir auf privatem Wege die Mittheilung zu, dass die Ausführung grösserer Kuppeln nach dem Netzwerk-Systeme geplant sei. Ausserdem erschien in jüngster Zeit eine sehr fleissig durchgearbeitete Abhandlung des Herrn Baurath Hacker*) über räumliche Fachwerksysteme, welche nicht verfehlen wird, die Aufmerksamkeit der Fachkreise auf jenes bisher ziemlich vernachlässigte Gebiet in erhöhtem Masse hinzulenken. Ich glaube daher hoffen zu dürfen, dass ein weiterer Beitrag zu dieser Frage nicht unwillkommen sein wird.

Fig. 1a.



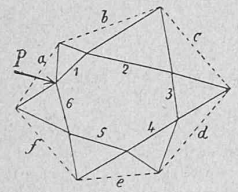


Fig. 1b

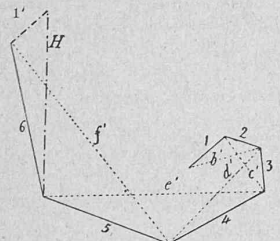


Fig. 1c

Zunächst sei die graphostatische Ermittelung der Stabspannungen in der Netzwerk-Kuppel erläutert. Ich beziehe mich dabei auf die nebenstehenden Abbildungen 1^a bis 1^c, von denen die beiden ersten eine Netzwerk-Kuppelzone von unregelmässig sechsseitigem Grundrisse darstellen, an deren einem Knotenpunkte eine beliebig gerichtete Kraft P angreift. Zur Ermittelung der durch diese hervorgerufenen Stabspannungen fasse ich zuerst den Knotenpunkt des innern Ringes in's Auge, von welchem die Stäbe 1 und 2 ausgehen. An ihm wirken 4 Stabkräfte, von denen vorläufig keine bekannt ist. Man weiss aber, dass die Resultirende der 1 und 2 Gleichgewicht halten muss mit der Resultirenden der beiden andern und daher in die Richtung der Schnittlinie der Ringebene mit der Ebene der Diagonalstäbe fällt. Diese Schnittlinie ist parallel mit b, d. h. mit der Verbindungslinie der beiden Fussenden der Diagonalen, welche zugleich einem Stabe des nächstfolgenden Ringes entspricht.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich, dass 2 eine Druckspannung erfährt wenn 1 gezogen ist (und umgekehrt), sowie dass das Verhältniss der Stabspannungen 1 und 2 durch Verzeichnen eines Dreieckes ermittelt werden kann. Dies ist in Fig. 1^c geschehen. Die Strecke 1 ist von beliebiger Grösse gewählt und parallel zu 1 im Grundrisse gezogen; ebenso gehen 2 und b' parallel zu den bezüglichen Richtungen in Fig. 1^b. Dieselben Schlüsse lassen sich für die weiter folgenden Knotenpunkte des innern Ringes wiederholen. Durch Aneinanderreihen der entstehenden Dreiecke erhält man die hier angegebene Figur und schliesslich die Spannung des Stabes 6 in demselben vorläufig noch unbekannten Massstabe, in welchem ursprünglich 1 gezeichnet war. Hat das Ringpolygon, wie hier angenommen war, eine gerade Seitenzahl so ist die Spannung des Stabes 6 vom entgegengesetzten Vorzeichen wie jene des Stabes 1. Macht man 1' in Fig. 1^c parallel und gleich 1 so gibt H die Resultirende, von 1 und 6 in unbekanntem Massstabe an.

Ausser der gegebenen äusseren Kraft P wirken aber jetzt nur noch 3 der Grösse nach unbekannte Kräfte mit ihr an demselben Knotenpunkte, nämlich die Spannungen der beiden Diagonalstäbe und die soeben der Richtung nach bestimmte Resultirende H der Stabkräfte 1 und 6. Es steht also gar nichts mehr im Wege, diese 3 Kräfte zu ermitteln. Man kann sich dazu des von mir früher angegebenen Verfahrens („Eisenbahn" Bd. XVI, pag. 7) bedienen. Sobald dies geschehen und damit H bekannt ist, kennt man auch den Massstab, in welchem in Fig. 1^c die Ringspannungen dargestellt sind. Letztere lassen sich aus der Figur einfach abgreifen und ebenso können die Spannungen aller Diagonalstäbe in einfachster Weise durch Zeichnen von Kräftedreiecken bestimmt werden.

Ist die Seitenzahl des Ringpolygons eine ungerade, so ändert sich nur die Richtung, in welcher 1' an 6 in Fig. 1^c anzutragen ist, denn in diesem Falle haben die beiden Stabspannungen gleiches Vorzeichen.

Nachdem so alle Spannungen der betrachteten Ringzone ermittelt sind geht man zu der folgenden über. Die Spannungen der Diagonalstäbe, welche zu der jetzt behandelten Zone gehören wirken an den Knotenpunkten der untern Zone als bekannte äussere Kräfte. Die weitere Behandlung der Aufgabe unterscheidet sich also von der soeben durchgeführten nur dadurch, dass an allen Knotenpunkten (und nicht blos wie hier an einem einzigen) gegebene äussere Kräfte wirken. Es bleibt dann nichts übrig, als die von jeder einzelnen dieser Knotenpunktslasten hervorgerufenen Spannungen in der besprochenen Weise aufzusuchen und alle Wirkungen zu summiren. Unter Umständen kann dies ein ziemlich weitläufiges Verfahren verursachen; gewöhnlich, d. h. bei symmetrischen Grundrissen wird es sich aber aus leicht ersichtlichen Gründen sehr einfach gestalten.

II.

Schon in meinem ersten Aufsatze wies ich darauf hin, dass man bei der Aufstellung räumlicher Fachwerkträger sehr leicht auf Systeme stösst, welche labil sind, trotzdem sie die erforderliche Zahl von Stäben besitzen. Entweder liegt dies daran, dass die Stäbe zwischen den Knotenpunkten in ungeeigneter Weise vertheilt sind, oder es liegt an den gewählten Massen, so dass bei einer Abänderung eines oder einiger dieser Masse ohne Aenderung der Reihenfolge der Verbindungen die Stabilität wieder hergestellt werden kann. Im ersten Fall ist eine gewisse Determinante (vergl. Bd. 9, pag. 42 dieser Zeitschrift; die dort gegebenen Ausführungen sind ohne wesentliche Aenderung auch auf räumliche Systeme anwendbar) identisch gleich Null, im letztern Falle nur in Folge der gewählten Masse gleich Null. In beiden Fällen lassen sich die Stabspannungen nicht auf statischem Wege finden, während dies sonst stets möglich ist.

Auch die in Fig. 1 dargestellte Netzwerkkuppel kann unter Umständen labil sein und zwar trifft dies immer dann zu, wenn die Linie H in Fig. 1^c parallel zu a in Fig. 1^b wird, d. h. wenn die Resultirende der Stabspannungen 1 und 6 in die Ebene der von demselben Knotenpunkte ausgehenden Diagonalstäbe fällt. Der Fall ist wichtiger als es auf den ersten Blick scheinen könnte, weil hiernach alle symmetrisch über regelmässige Grundrisse von gerader Seitenzahl aufgebauten Netzwerkkuppeln labil sind.

*) Zeitschrift für Bauwesen. 1888. Heft 1, pag. 43.

Um dies noch näher darzuthun, habe ich in den Fig. 2^a und 2^b eine Netzwerkkuppel über quadratischem Grundrisse verzeichnet und durch punktirte Linien angegeben, in welcher Weise sich das System ohne Aenderung des Zusammenhangs zu verschieben vermag. Um sich ein Urtheil hierüber zu bilden, geht man am bestem von den in der Figur schraffirten Dreiecken *A* und *B* aus, welche man als Grunddreiecke bezeichnen kann, während das zwischen diesen liegende weiss gebliebene Dreieck kurzweg ein Zwischendreieck genannt werden soll. Senkt sich die Spitze des Grunddreiecks *A*, so muss sich jene von *B* um so viel heben, dass der zwischen beiden Spitzen liegende Ringstab seine Länge nicht ändert. Die Grunddreiecke rotiren um ihre Grundlinien, das Zwischendreieck dreht sich um die Schnittlinie der Ebenen *A* und *B*.

Fig. 2a.

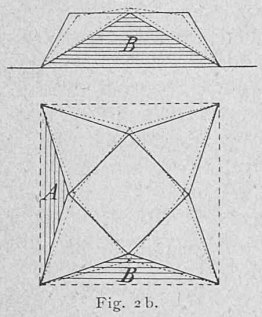


Fig. 2b.

Das gleiche gilt für jeden regelmässigen Grundriss von gerader Seitenzahl. Dagegen ist eine Kuppel von ungerader Seitenzahl durchaus stabil.

Hieraus ergibt sich zunächst die Regel, dass Netzkuppeln stets nur über regelmässigen Grundrissen von ungerader Seitenzahl ausgeführt werden sollten.

III.

Man wird es auf den ersten Blick vielleicht auffällig finden, dass die Stabilität der Construction von der Seitenzahl des Grundrisses abhängen soll. Abgesehen von einem ähnlichen Resultate des Herrn Hacker, das mit dem hier gefundenen, wie sich zeigen wird, eng verwandt ist, vermag man jenem Schlusse kaum ein Analogon zur Seite zu stellen.

Besonders bei sehr grosser Seitenzahl des Grundrisspolygons ist man zu dem Zweifel berechtigt, ob das thatsächliche Verhalten der ausgeführten Kuppel in so hervorstehendem Masse davon abhängig sein wird, dass das Grundpolygon eine gerade oder ungerade Seitenzahl besitzt.

In der That wird sich z. B. eine 24seitige Netzkuppel, welche in der gewöhnlichen Weise construirt ist, kaum anders verhalten als eine 25seitige. Bei reibungsfreien gelenkförmigen Knotenverbindungen müsste zwar jene einstürzen, während diese stabil wäre. In Wirklichkeit sieht es aber ganz anders aus.

Betrachtet man den in Fig. 1^c dargestellten Kräfteplan, so wird man leicht bemerken, dass derselbe bei einigermassen grosser Seitenzahl durchaus nicht mehr genau gezeichnet werden kann. Die hinzukommenden Punkte findet man als Schnitte von Linien, die sich alsdann unter sehr spitzen Winkeln schneiden, und zudem pflanzen sich alle Fehler bis zum Schlusse fort. Das ist keineswegs ein Mangel des graphischen Verfahrens; es zeigt uns vielmehr, dass die ganze Berechnung auf unzuverlässiger Grundlage beruht. Schon ganz geringe Abweichungen in den Richtungslinien der Stabkräfte, die in Folge der Steifigkeit der Knotenpunkte ganz unausbleiblich sind, vermögen ganz erhebliche Aenderungen in der Spannungsvertheilung zu verursachen.

Bei regelmässigem Grundrisse müssten alle Spannungen 1 bis 6 in Fig. 1^c einander gleich und abwechselnd Zug- und Druckkräfte sein. Bei geringer Seitenzahl des Grundrisses wird dies auch mit ziemlicher Genauigkeit erfüllt sein; bei einem etwa 24seitigen Grundrisse wird es nur für die in nächster Nähe des belasteten Knotenpunktes gelegenen Ringstäbe annähernd zutreffen, so dass jeder weiter folgende Stab eine dem Absolutwerthe nach geringere Spannung besitzt als sein Vorgänger. Dem belasteten Knotenpunkt diametral gegenüber wird bei einigermassen steifen Stabquerschnitten eine grössere Zahl von Stäben thatsächlich gar nicht mehr merklich gespannt sein.

Eine Netzkuppel von grosser Seitenzahl wird also ebenso unbedenklich über dem regelmässigen $2n$-Eck als über dem $(2n+1)$-Eck ausgeführt werden können; man muss in beiden Fällen auf eine zuverlässige Berechnung mehr oder weniger verzichten. Legt man auf letztere Werth, so sollte man mit der Seitenzahl nicht leicht über 9 hinausgehen. Für ein regelmässiges 9-Eck lässt sich Fig. 1^c noch mit leidlicher Sicherheit construiren; dem entsprechend darf auch noch eine annehmbare Uebereinstimmung der theoretischen Resultate mit den wirklichen Verhältnissen erwartet werden. Besser wäre es noch, ein 5-Eck oder 7-Eck für den Grundriss zu wählen.

Es fragt sich nun freilich, ob sich nicht Rücksichten anderer Art der sich durch die eben angeführten Gründe empfehlenden Wahl eines Grundrisses von kleiner Seitenzahl entgegenstellen. Ich glaube nicht, dass dies unter gewöhnlichen Umständen der Fall ist.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass das Verhältniss zwischen den Stabspannungen und der sie hervorbringenden Last um so grösser wird, je mehr die Seitenzahl des Grundrisses wächst. Darauf ist es z. B. zurückzuführen, dass Hr. Hacker für eine den gewöhnlichen Ausführungen entsprechende Schwedler'sche Kuppel Spannungen findet, die nach seiner Angabe das 600fache der nach Schwedler berechneten Spannung betragen. In diesem Falle ist es ebenso wie bei den Netzwerkkuppeln über Grundrissen von gerader Seitenzahl nur der Steifigkeit der Knotenpunkte zu danken, dass kein Einsturz erfolgt.

Vielleicht wird man aus praktischen Gründen der engmaschigen Kuppel vor der weitmaschigen den Vorzug zu geben geneigt sein. Wenn ich indessen bedenke, dass bei allen andern eisernen Trag-Constructionen sich eine strenge Gliederung des Ganzen in Hauptträger, die sich in relativ grossen Abständen befinden und dazwischen geschaltete Träger zweiter, dritter und selbst noch höherer Ordnung als das zweifellos beste Constructions-Princip bewährt hat, so scheint es mir der Ueberlegung wohl werth, ob nicht auch bei den Kuppeln mehr als bisher nach den gleichen Grundsätzen construirt werden sollte.

In Bezug auf die Einfachheit der Construction, die Leichtigkeit der Aufstellung und Instandhaltung würde meines Erachtens die Anordnung eines grossmaschigen Haupttragnetzes manche Vorzüge darbieten. Die einzelnen Stäbe dieses Netzes wären natürlich als gegliederte Träger auszuführen und könnten ohne Bedenken auch auf Biegung durch die zwischengeschaltete Secundärconstruction belastet werden; in der Rechnung würde dieser Umstand leicht zu berücksichtigen sein.

Die eine Masche überdeckende Secundär-Construction könnte nach Montirung des Hauptnetzes im Ganzen aufgezogen und versetzt werden. Bei grossen Dimensionen würde es sich empfehlen, das Gerüst der Secundär-Construction selbst wieder als räumliches Fachwerk auszubilden.

In den Figuren 3 bis 5 habe ich zu besserer Erläuterung des Vorausgegangenen die zur Berechnung einer Netzwerkkuppel über 7seitigem Grundrisse auszuführenden Constructionen dargestellt. Am Knotenpunkte I^a des innersten Ringes soll die Einzellast *P* angreifen; es handelt sich um die Ermittelung der durch diese in sämmtlichen Stäben hervorgerufenen Spannungen. Zunächst ergibt sich aus dem früher Bewiesenen, dass die Ringstäbe 1^a, 3^a, 5^a, 7^a Druck-, die 2^a, 4^a, 6^a Zug-Spannungen erleiden, welche dem Absolutwerthe nach untereinander gleich sind. Die Resultirenden von 1^a und 7^a wie von 8^a und 21^a am Knotenpunkte I^a müssen demnach im Meridianschnitte liegen und mit *P* im Gleichgewichte stehen. Man kann also in Fig. 4^a ein Kräftedreieck zeichnen, das sich sofort mit Zuhülfenahme des Grundrisses Fig. 4^b zu einem räumlichen Kräftefünfeck erweitern lässt.

Dann gehe man zum Knotenpunkte II^a über und setze 1^a und 2^a zu einer Resultirenden zusammen, die in Fig. 4^b durch eine gestrichelte Linie angegeben ist. Durch Ziehen von Parallelen erhält man die Projectionen der Stabspannungen 9^a und 10^a. Alle Diagonalstäbe der ersten Ringzone mit Ausnahme von 8^a und 21^a erfahren Spannungen von gleichem Absolutwerthe und zwar sind 9^a, 12^a, 13^a, 16^a, 17^a, 20^a gezogen, alle übrigen gedrückt.

Die Spannungen in der ersten Ringzone sind nun sämmtlich bekannt; zur Ermittelung der in der zweiten Zone auftretenden Kräfte setze man 10^a und 11^a zu einer in den Fig. 4 mit Q bezeichneten Resultirenden zusammen und nehme vorläufig an, dass die innere Zone ganz entfernt sei und an der äussern ausschliesslich am Knotenpunkte III^b die äussere Kraft Q angreife. Man erhält dann in derselben Weise wie es oben für P beschrieben wurde zuerst ein

Fig. 3a.

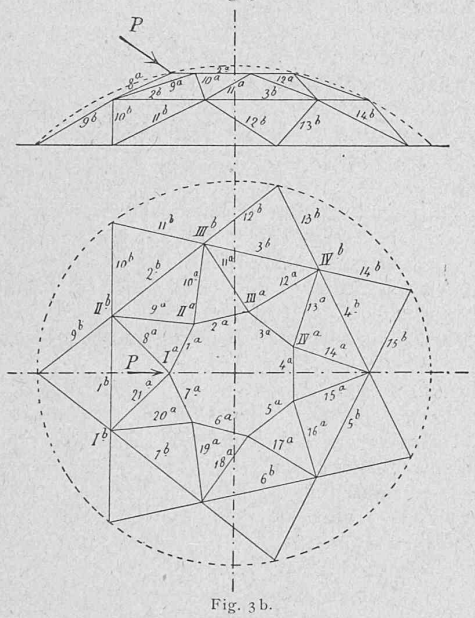


Fig. 3b.

Kräftedreieck und dann ein Kräftefünfeck, an das dann noch ein Kräftevieneck für den Kotenpunkt IV^b angeschlossen ist.

Es bleibt dann nur noch übrig, dieselbe Construction für die am Kotenpunkt II^b angreifende Kraft Q', welche die Resultirende der Stabspannungen 8^a und 9^a ist, zu wiederholen, wie es in den Fig. 5 geschehen ist. Bei Ausführung der Zeichnung ergab sich, dass die durch Q' und die Mittellinie von 1^b und 2^b gelegte Ebene die durch 9^b und 10^b

Fig. 4a.

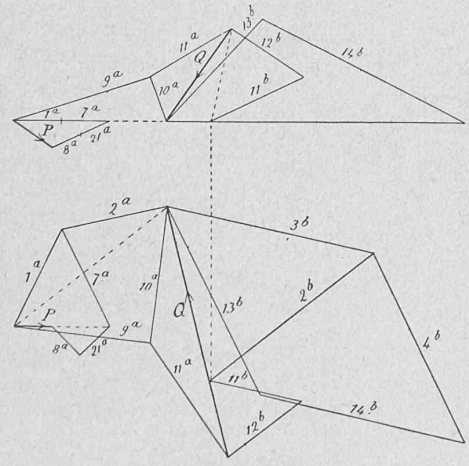


Fig. 4b.

gelegte in 9^b schneidet. Es wurde daher (zufälliger Weise) die Spannung von 10^b zu Null. Ausserdem enthält Fig. 5 noch ein Kräftevieneck für den Knotenpunkt III^b.

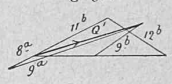
Nach Ausführung dieser Constructionen ergeben sich alle Spannungen der Stäbe in der untern Ringzone in leicht ersichtlicher Weise durch blosse Additionen und Subtractionen. Dabei ist nur zu beachten, dass die an den Knotenpunkten IV^b und VI^b angreifenden Kräfte Q einen nach innen zugekehrten Pfeil besitzen, worauf bei Feststellung der Vorzeichen zu achten ist.

Da es sich hier nur darum handelt, eine Anleitung zur Ausführung der Berechnung einer Netzwerkkuppel zu geben, darf ich mich wohl mit diesen Andeutungen begnügen.

IV.

Die Behandlung, welche Hr. Hacker in der oben citirten Abhandlung dem räumlichen Fachwerke zu Theil werden liess, unterscheidet sich von der in diesen Aufsätzen gegebenen namentlich durch eine abweichende Annahme über das Verhalten der Auflagerknotenpunkte. An die Spitze meiner Betrachtungen setzte ich in meinem ersten Aufsatze die Forderung, dass zur Vermeidung von Schwierigkeiten in der practischen Ausführung nur vollständig festgehaltene Auflagerknotenpunkte angewendet werden sollten.

Fig. 5a.



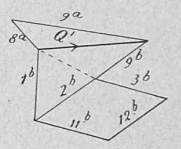


Fig. 5b.

Hr. Hacker nimmt dagegen an, dass die Auflagerknotenpunkte in einer Ebene verschieblich seien, und glaubt, dass auch bei den ausgeführten Schwedler'schen Kuppel-Constructionen radiale Bewegungen dieser Knoten thatsächlich vorkämen. Es fehlt mir die auf practische Erfahrung gestützte Kenntniss von dem wirklichen Verhalten der Auflagerknoten ausgeführter Kuppeln, um über die Zulässigkeit dieser Anschauung ein Urtheil fällen zu können; nur beiläufig möchte ich einem Zweifel in dieser Richtung Ausdruck geben. Vielleicht wird bald aus Kreisen der Praxis Näheres über diesen Punkt bekannt.

Es kommt mir hier nur darauf an, die innere Verwandtschaft des Hacker'schen Fachwerks mit verschieblichen Knoten mit den von mir behandelten Systemen darzuthun.

Man betrachte das durch Fig. 1 dargestellte Stabgebilde. Hebt man dasselbe von der Unterlage ab, so bleibt es nicht starr. Soll die Starrheit in der früheren Weise wieder hergestellt werden, so muss man die Knotenpunkte, welche vorher Auflagerpunkte waren, durch ein Stabsechseck a, b—f verbinden, das durch geeignet geführte Diagonalstäbe unverschieblich gemacht ist. An Stelle einiger dieser Diagonalstäbe kann man auch einen neuen Knotenpunkt hinzutreten lassen, von dem nach jeder Ecke des Sechseckes ein Stab geführt ist.

Das so erhaltene in sich starre System kann man nun dadurch wieder zu einem statisch bestimmten Träger machen, dass man es auf eine starre Auflager-Ebene setzt und drei Eckknotenpunkten je eine Auflagerbedingung in dieser Ebene vorschreibt. Das Gleiche trifft aber auch zu, wenn man das ganze Gebilde umstülpt und das vorher oben liegende (offene) Sechseck in der beschriebenen Weise auf die Grundebene aufsetzt.

Im letzteren Falle erhält man das von Hrn. Hacker behandelte, oben (durch eine Spitze oder einen versteiften Ring) geschlossene, unten in der Ebene (vorbehaltlich dreier Auflagerbedingungen) frei verschiebliche Fachwerk. Man kann also sagen, dass bei den Hacker'schen Systemen gegenüber den von mir behandelten nur der Grundring und der Nabelring ihre Rollen gewechselt haben. Hr. Hacker versteift den letzteren und lässt jenen offen, während es bei den von mir behandelten Systemen umgekehrt war.

Aus den Rechnungen des Hrn. Hacker scheint hervorzugehen, dass die von ihm betrachteten Systeme geringere Spannungen erfahren als jene. Es war mir bisher nicht möglich *), mir von der Richtigkeit dieser Behauptung ein eigenes Urtheil zu bilden; ich habe aber keine Veranlassung, an derselben zu zweifeln. Dagegen glaube ich, dass man den Hacker'schen Resultaten erst dann einen practischen Werth beilegen darf, wenn es bewiesen ist, dass die Voraussetzung, auf der sie beruhen (Verschieblichkeit der Auflagerpunkte) genügend erfüllt ist oder erfüllt werden kann.

Leipzig im Februar 1888.

*) Die Zeitschr. für Bauwesen ist mir nur schwer zugänglich.