Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 9/10 (1887)
Heft: 7

Artikel: Zur Fachwerkstheorie
Autor: Foeppl, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14349

bau, mech. Ausstattung und Betriebsmittel, belaufen sich auf rund 160 000 Fr.

Die Arbeiten an Ort und Stelle, sowie in den Werkstätten begannen mit dem Monat Mai. Ende September konnten die ersten Fahrten gemacht und Anfangs November die fertige Bahn übergeben werden. Die Herren *Bucher* & *Durrer* in Kägiswyl hatten den ganzen Bau in Generalaccord übernommen und alle Unterbau-Arbeiten unter ihrer persönlichen Leitung ausgeführt.

Die mechanische Ausrüstung der Bahn (Oberbau und Betriebsmaterial) übertrugen sie der Firma *Rinecker, Abt & Co.* in Würzburg, welche nach ihren Constructionen die *Union* in Dortmund, die *Schweizerische Locomotivfabrik* in Winterthur und die *Industriegesellschaft* in Neuhausen mit der Lieferung und Ausführung der verschiedenen Theile betraute.

Fahrtaxen. Die Einnahmen aus dem Personen- und Waarentransporte bemessen sich nach folgenden Einheitstaxen:

Personenverkehr.	I. Classe	II. Classe
Einfache Bergfahrt	0,40 Fr.	0,20 Fr.
Einfache Thalfahrt	0,20 „	0,10 „
Serienpreis für 10 Fahrten	3,00 „	1,50 „
Persönliche Abonnements		
für 1 Monat gültig	18.00 Fr.	9,00 Fr.
„ 3 Monate „	51,30 „	25,65 „
„ 6 „ „	97,20 „	48,60 „
„ 12 „ „	183,60 „	91,80 „

Waarenverkehr.

Gepäck unter 40 *kg* pro Stück	25 Cts.
„ über 40 *kg* „	50 „

Dabei ist inbegriffen der Transport bis und vom Gepäcklokal der Gotthardbahn.

Gewöhnliche Waaren, unter 40 *kg*	20 Cts.
für je weitere 10 *kg*	5 „

Stücke von über 100 *kg* können zurückgewiesen werden.

* * *

Die bisherigen Betriebserfahrungen, die sich auch über Tage mit 50 *cm* hohem Schnee und 17^0 Kälte erstrecken, stellen der ganzen Construction wie der Ausführung ein sehr günstiges Zeugniss aus; gleichzeitig ist das financielle Ergebniss auch ein recht befriedigendes, sodass das ganze Unternehmen als ein wohlgelungenes bezeichnet werden darf.

Luzern, Februar 1887. *R. Abt.*

Zur Fachwerkstheorie.

Von *Dr. A. Foeppl.*

In einem vor sieben Jahren erschienenen Buche*) habe ich eine ziemlich lückenlose Darstellung der allgemeinen Theorie des ebenen statisch bestimmten Fachwerks gegeben. Insbesondere ist dort die Frage nach den Kennzeichen solcher Fachwerke in strenger Weise behandelt. Zwar lässt sich das von mir angegebene Kriterium zur Entscheidung in einem practisch vorliegenden Falle wegen der Umständlichkeit der Rechnung nur schwer verwenden; es scheint mir dies aber nur ein geringer Mangel zu sein, weil diesen Untersuchungen an sich nur ein wesentlich theoretisches Interesse zukommt.

Später wurde, insbesondere in dieser Zeitschrift von den Herren Weyrauch und Müller-Breslau die Frage weiter behandelt ohne Bezugnahme auf meine Arbeit. Ich hatte daher keine Veranlassung, mich in diese Debatte zu mengen, um so mehr, als sich mein Interesse inzwischen einem andern Wissensgebiete zugewendet hatte. Durch eine Abhandlung von Prof. Lang**), worin dieser eine Uebersicht über die Entwickelung der Fachwerkstheorie gibt, werde ich aber doch veranlasst, noch einmal auf dieses Thema zurückzukommen und die ziemlich kurz gefassten Ausführungen in meinem Buche gegen jedes Missverständniss sicher zu stellen.

*) Föppl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880.

**) Lang, Berechnung und Construction der Bauten in Eisen. Riga'sche Industrie-Zeitung XII. 1886. Nr. 23.

Herr Lang sagt in seiner Abhandlung: „Bis heute ist meines Wissens zwar der Satz bewiesen, dass ein stabiles System mit $2k-3$ Stäben nothwendig auch statisch bestimmt ist, aber dieser Satz ist nicht ohne besondern Beweis umkehrbar und die kurzen Andeutungen in Föppl's Theorie des Fachwerks S. 26 sind hierfür mindestens ungenügend". — Im Nachfolgenden möchte ich nun den Nachweis führen, dass die erwähnten allerdings ziemlich summarischen Bemerkungen in meinem Buche den von Herrn Lang vermissten Beweis enthalten.

Bezeichnet man die Coordinaten des *i ten* Knotenpunktes mit $x_i\ y_i$, die Stablänge zwischen i und k mit l_{ik}, so besteht nach dem Pythagoräischen Lehrsatze die Gleichung

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 - l^2_{ik} = 0 \qquad (1)$$

welche kürzer $\qquad f_{ik} = 0$

geschrieben werden soll. Solche Gleichungen bestehen so viele, als Stäbe vorhanden sind, also $2k-3$. Von den Knotenpunkst-Coordinaten sind drei (durch die Wahl des Coordinatensystems oder durch die Auflagerbedingungen) gegeben; es kommen daher auch $2k-3$ Unbekannte in den Gleichungen vor. Das Fachwerk ist stabil, wenn sich die Gleichungen nach den Unbekannten auflösen lassen, d. h. wenn diese von einander unabhängig sind.

Ein Kriterium für die Unabhängigkeit mehrerer Gleichungen von einander hat zuerst Jacobi gegeben und ich bin in meinem Buche im Wesentlichen dessen Darstellung gefolgt. Hier werde ich denselben Gedankengang mit einer geringen Modification innehalten, welche zur leichtern Uebersicht beiträgt.

Man habe p Gleichungen zwischen den Unbekannten $\nu_1\ \nu_2 \ldots \nu_p$

$$\begin{aligned} f_1(\nu_1\ \nu_2 \ldots\ldots \nu_p) &= 0 \\ f_2(\nu_1\ \nu_2 \ldots\ldots \nu_p) &= 0 \\ &\vdots \\ f_p(\nu_1\ \nu_2 \ldots\ldots \nu_p) &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Sind dieselben erfüllt durch die Lösungen $\nu_1'\ \nu_2' \ldots \nu'_p$, so dürfen sie nicht mehr erfüllt werden durch die Werthe $\nu_1' + \delta\nu_1\ j\ \nu_2' + \delta\nu_2 \ldots\ldots$ worin die $\delta\nu$ unendlich kleine Aenderungen sind. In dem besonderen Falle des Fachwerks würden die $\delta\nu$ relativen Verschiebungen entsprechen, die ohne Längenänderung der Stäbe möglich wären. Durch Differentiation erhält man aber aus den Gl. (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \nu_1}.\delta\nu_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \nu_2}.\delta\nu_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \nu_p}.\delta\nu_p &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \nu_1}.\delta\nu_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \nu_2}.\delta\nu_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_2}{\partial \nu_p}.\delta\nu_p &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad & \\ \frac{\partial f_p}{\partial \nu}.\delta\nu_1 + \frac{\partial f_p}{\partial \nu_2}.\delta\nu_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_p}{\partial \nu_p}.\delta\nu_p &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Damit die Variationen $\delta\,\nu$ in der That $= 0$ seien, muss die Determinante der Coefficienten von Null verschieden sein. Diese Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \nu_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \nu_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial \nu_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \nu_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \nu_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{d \nu_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial \nu_1} & \frac{\partial f_p}{\partial \nu_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_p}{\partial \nu_p} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

kann nur entweder identisch zu Null werden ohne Rücksicht auf die Werthe, welche man den Constanten (den drei gegebenen Coordinaten und den Stablängen) beilegt oder sie kann durch besondere Werthe dieser zum Verschwinden gebracht werden. Trifft letzteres zu, so hat man es, nach der Bezeichnungsweise des Hrn. Lang mit einem „Ausnahmefall" zu thun.

Bei der Anwendung des soeben Besprochenen auf die Fachwerkstheorie sind natürlich die Gleichungen (2) als Repräsentanten der Gleichung (1) und die Unbekannten ν als Repräsentanten der unbekannten Knotenpunkts-Coordinaten zu betrachten. Da die Gl. (1) immer nur höchstens je vier Unbekannte enthalten, verschwinden die meisten partiellen Diff.-Quotienten, welche in die Determinante Δ als Elemente eintreten. Für die wirkliche Ausrechnung der Determinante ist dies eine erhebliche Erleichterung; in einer allgemeinen Betrachtung würde es aber nur die Uebersichtlichkeit stören, wenn man an Stelle der allgemeinen Symbole die ihnen zukommenden speciellen Werthe setzen wollte.

Ich wende mich nun zur Berechnung der Stabspannungen und nehme, um unnöthige Complicationen zu vermeiden, an, dass die Lasten nur an den Knotenpunkten angreifen und dass die Auflagerkräfte bereits vorher berechnet sind. Für jeden freien Knotenpunkt schreibe ich zwei, für den festen keine und für den verschieblich gelagerten eine Componenten-Gleichung an. Die Stäbe mögen der Uebersichtlichkeit wegen neu numerirt sein und zwar mit römischen Ziffern; die Stabspannungen S_I S_{II} u. s. w. sollen positiv gerechnet werden, wenn sie Zugspannungen bedeuten. Verbindet ein Stab S_g zwei Knotenpunkte i und k mit einander, so ist die X Componente der an i angreifenden Spannung S_g, welche X_g^i geschrieben werden soll.

$$X_g^i = S_g \cdot \frac{x_k - x_i}{l_g} \qquad (5)$$

Nun entspricht aber dem Stabe ik oder, wie er in der neuen Nummerirung heisst, dem Stabe g eine der Gleichungen (1), welche jetzt kurz mit $f_g = 0$ bezeichnet werden kann. Man sieht leicht, dass

$$\frac{\partial f_g}{\partial x_i} = 2\,(x_i - x_k)$$

und dass daher Gleichung (5) geschrieben werden kann

$$X_g^i = -\frac{S_g}{2\,l_g} \cdot \frac{\partial f_g}{\partial x_i} \qquad (5\,a)$$

Ebenso wird

$$X_g^k = -\frac{S_g}{2\,l_g} \cdot \frac{\partial f_g}{\partial x_k} \qquad (5\,b)$$

Nun ist von vornherein nicht zu sagen, welche Stäbe gerade von dem Knotenpunkte i ausgehen und es würde nur die Allgemeinheit der Betrachtung stören, wenn darüber Näheres festgesetzt würde. Man kann über diese Schwierigkeit aber sehr leicht hinwegkommen, wenn man so rechnet, als wenn sämmtliche Stäbe mit i in Verbindung wären und die bezüglichen Componenten X^i nach Gleichung (5^a) in die Componenten-Gleichung einführt. Sollte dann der Stab S_g, in Wirklichkeit nicht von i ausgehen, so würde sich in der That der Ausdruck (5^a) auf 0 reduziren, da dann fg von x_i unabhängig ist. Die Componenten-Gleichung für den Knotenpunkt i in Richtung der X Achse lässt sich daher schreiben

$$-\frac{S_I}{2\,l_I} \cdot \frac{\partial f_I}{\partial x_i} - \frac{S_{II}}{2\,l_{II}}\,\frac{\partial f_{II}}{\partial x_i} - \ldots\ldots - \frac{S_p}{2\,l_p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_i} + X_0^i = 0 \qquad (6)$$

worin X_0^i die Componente der an i wirkenden äusseren Kraft (Belastung resp. Auflagerdruck) bedeutet und die Zahl der Stäbe mit p bezeichnet ist.

Solcher Gleichungen haben wir nach Obigem $2\,k - 3$ oder p. Dieselben sind linear in Bezug auf die Unbekannten $\frac{S}{2\,l}$ und ergeben eindeutige und endliche Lösungen für dieselben, wenn die Determinante der Coefficienten

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_I}{\partial \nu_1} & \frac{\partial f_{II}}{\partial \nu_1} & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial \nu_1} \\ \frac{\partial f_I}{\partial \nu_2} & \frac{\partial f_{II}}{\partial \nu_2} & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial \nu_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial f_I}{\partial \nu_p} & \frac{\partial f_{II}}{\partial \nu_p} & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial \nu_p} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

von Null verschieden ist, worin wieder, der bequemeren Schreibweise halber, die unbekannten Knotenpunkts-Coordinaten in derselben Art durch die Buchstaben ν ersetzt wurden, wie dies bereits in den vorausgehenden Betrachtungen geschehen ist.

Nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie ist aber Δ' identisch mit Δ (Gleichung 4). Die Bedingung, dass ein Fachwerk statisch bestimmt sei, fällt also in der That mit derjenigen zusammen, dass es stabil sei und die bezüglichen Andeutungen in meinem Buche, denen ich hier nichts Wesentliches zugefügt habe, enthalten den strengen Beweis hiefür. Hätte ich damals hoffen dürfen, Leser zu finden, die sich für diese rein theoretische Auseinandersetzung näher interessirten, so würde ich schon bei jener Gelegenheit ausführlicher gewesen sein.

Leipzig, im Januar 1887.

Ueber den Bau grosser Tunnels vermittelst Verwendung comprimirter Luft.

Unter diesem Titel hat Professor Dr. Colladon in Genf kürzlich eine Schrift herausgegeben, in welcher die Entwickelung des Baues grosser Tunnels historisch beleuchtet und der Vortheile gedacht wird, die dem Tunnelbau durch die Anwendung der Lufttransmissionen erwachsen sind. Bekanntlich war Professor Colladon der erste, der vorgeschlagen hatte, beim Tunnelbau die Seiltransmission durch die pneumatische Kraftübertragung zu ersetzen. Es geschah dies schon im Jahre 1852. Nach seinen Ideen wurden später, beim Bau des Mont-Cenis-Tunnels, die Compressoren bei Modane und Bardonnèche ausgeführt, die in wesentlich verbesserter Construction auch am Gotthard verwendet wurden.

Am Schlusse seiner Arbeit liess Professor Colladon eine Vergleichung des Arbeitsfortschrittes und der Kosten des Gotthard- und Arlberg-Tunnels folgen, bei welcher er zu nachstehenden Conclusionen gelangt, die wir in deutscher Uebersetzung wiedergeben wollen:

„Die einzigen *grossen* zweigeleisigen Tunnels, die in Europa zur Ausführung gelangten, sind diejenigen des Mont-Cenis (Fréjus), Gotthard und Arlberg.

„Obschon der grosse Gotthardtunnel um 2690 *m* länger und viel schwieriger auszuführen war, als derjenige am Fréjus, so wurde der erstere doch doppelt so rasch und mit weniger als einem Drittheil der kilometrischen Kosten des letzteren vollendet.

„Kürzlich wurde versucht, die Bauzeit und kilometrischen Kosten des Gotthard- mit denjenigen des Arlberg-Tunnels in Vergleich zu ziehen. In Nachfolgendem soll nun gezeigt werden, wie sehr dieser Vergleich der hauptsächlichsten Grundlagen entbehrt:

„Beim Bau grosser Tunnels sind die Schwierigkeiten und Kosten der Ausführung nicht der Länge direct proportional, sondern sie wachsen in viel stärkerem Verhältnisse mit der Länge. Im Fernern verursachen die grosse Höhe des Gebirges über dem Tunnelscheitel d. h. die dadurch bedingten ausserordentlich hohen Temperaturen die bedeutendsten Schwierigkeiten und Kosten.

„**A. Gotthard-Tunnel.** 1. Ueber dem 14920 *m* langen Gotthard-Tunnel befinden sich zwei Erhebungen von mehr als 1600 *m*, welche im Innern des Tunnels Temperaturen zur Folge hatten, die den Fortschritt der Arbeiten um nahezu ein Jahr verzögerten und die Kosten wesentlich vermehrten.

„2. Die verfügbaren Wasserkräfte am Ausgang des Tunnels, von welchen Leistung und Arbeitsfortschritt abhängen, waren beim Gotthard im Mittel viel geringer, als dies dem Unternehmer von Seite der Gesellschaft versprochen worden war. Sie betrugen im Allgemeinen während des Winters nicht einmal 50 % des Versprochenen.

„3. Die Zuleitung des Wassers musste an beiden Ausgängen des Tunnels durch den Unternehmer studirt und ausgeführt werden.