Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 9/10 (1887)

Heft: 22

Artikel: Beitrag zur Theorie der ebenen Träger

Autor: Müller-Breslau, Heinr.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14429

Beitrag zur Theorie der ebenen Träger.

Von *Heinr. Müller-Breslau*, Prof. an der Technischen Hochschule in Hannover.

In Nr. 20, Seite 121 des vorliegenden Jahrganges dieser Zeitschrift. theilte ich ein neues Verfahren zur Berechnung statisch bestimmter Fachwerke mit, welches darin besteht, den Träger durch Beseitigung des Stabes s_{kr}, dessen Spannkraft S_{kr} gesucht wird, in eine zwangläufige kinematische Kette zu verwandeln, den Gliedern dieser Kette verschwindend kleine Verrückungen zu ertheilen und nach Ermittelung der senkrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma P_m c_m = o$ aufzustellen, in welcher c_m den Abstand der Kraft P_m vom Endpunkte m' der senkrechten Geschwindigkeit mm' ihres Angriffspunktes m bedeutet. Die in k und r angreifenden Spannkräfte S_{kr} werden hierbei zu den äusseren Kräften gerechnet, und es enthält dann, wenn bei der angenommenen Bewegung der Kette die Auflagerbedingungen erfüllt werden, jene Gleichung nur die *eine* Unbekannte S_{kr}. Um die nach einer bestimmten Richtung wirkende Seitenkraft eines Stützenwiderstandes zu finden, wird die Umwandlung des starren Fachwerks in eine zwangläufige Kette durch Beseitigung einer Auflagerbedingung bewirkt, und ebenso leuchtet ein, dass man auch Biegungsmomente, Querkräfte u. s. w. auf kinematischem Wege herzuleiten vermag. Beispielsweise wird behufs Berechnung eines Momentes die Umwandlung des Trägers in eine Kette durch Anbringung eines Gelenkes erreicht.

Zu den Vorzügen dieses Verfahrens gehört, dass man auf dem angegebenen Wege nicht nur zu den unbekannten inneren und äusseren Kräften gelangt, sondern auch zu einer übersichtlichen Darstellung des gegenseitigen Einflusses der Verrückungen, und es ist nun der Zweck der folgenden Zeilen, die Aufmerksamkeit auf eine für die Werthschätzung neuer Arten statisch bestimmter Träger wichtige Aufgabe zu lenken, nämlich:

> Zu untersuchen, ob die durch Nachgeben der Widerlager hervorgerufenen Verrückungen der Stützpunkte etwa unzulässige Formänderungen des Trägers verursachen,

eine Aufgabe, welche sich stets in Verbindung mit derjenigen lösen lässt:

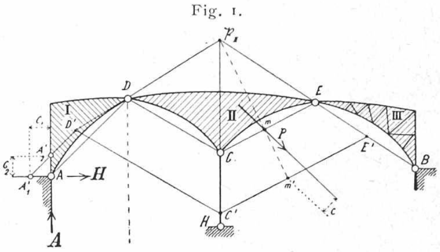
> Die Grösse der Stützenwiderstände zu bestimmen.

Die folgenden Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

1. Aufgabe. Der in Fig. 1 dargestellte, im allgemeinen starre und statisch bestimmte Bogenträger besteht aus drei starren, durch Gelenke mit einander verbundenen Scheiben I, II, III, welche vollwandig oder gegliedert (wie z. B. III) sein können. Bei A und B sind feste Auflagergelenke angeordnet. Bei C erfolgt die Stützung mittels einer Pendelsäule. Gesucht seien diejenigen Verrückungen, welche die Punkte des Trägers erfahren, wenn das Widerlager bei A nachgiebt, während die Stützpunkte B und H ruhen. Gleichzeitig sollen die durch irgend eine beliebig gerichtete, gegebene Last P bei A erzeugten Stützenwiderstände A (senkrecht) und H (wagerecht) bestimmt werden.

Zunächst handle es sich um den Einfluss einer wagerechten Verrückung des Stützpunktes A. Das feste Auflagergelenk A wird ersetzt durch ein auf wagerechter Bahn geführtes, und in Folge dessen geht der starre Träger in eine zwangläufige Kette über, deren Scheiben III und II sich beziehungsweise um die Pole B und $\mathfrak{P}_{II}$ drehen, wobei $\mathfrak{P}_{II}$ den Schnittpunkt der Geraden BE mit der Pendelsäule bedeutet. Der Pol von I liegt auf der Senkrechten durch A, weil sich Punkt A in einer Wagerechten bewegt. Von den sog. senkrechten Geschwindigkeiten EE', CC', DD', AA'_2 der Punkte E, C, D, A nehme man die eine, beispielsweise $AA'_2 = c_2$, beliebig an; die übrigen sind dann bestimmt; denn

Fig. 1.



es muss sein: $A'_2 D' \parallel A D$; $D' C' \parallel D C$; $C' E' \parallel C E$; auch müssen die Punkte D', C', E' auf den durch die Punkte D, C, E gehenden Polstrahlen liegen.

Bedeuten nun δ_D δ_C δ_E die Verrückungen, welche die Punkte D, C, E erfahren, sobald sich A in wagerechter Richtung um ζ_A verschiebt, so verhalten sich:

$$\text{(I)} \qquad \delta_D : \delta_C : \delta_E : \zeta_A = \overline{DD'} : \overline{CC'} : \overline{EE'} : \overline{AA'_2},$$

und in gleicher Weise findet man, für die Verrückungen δ_D, δ_C, δ_E, welche entstehen, sobald A in senkrechter Richtung um η_A verschoben wird, die Beziehung:

$$\text{(II)} \qquad \delta_D : \delta_C : \delta_E : \eta_A = \overline{DD'} : \overline{CC'} : \overline{EE'} : \overline{AA'_1}.$$

Dabei ist A'_1 der Schnittpunkt der Geraden $D' A'_2$ mit der Wagerechten durch A. Die wirklichen Richtungen dieser Verschiebungen erhält man, wenn man die Richtungen AA'_1, AA'_2, DD' u. s. w. im gleichen Sinne um 90^0 dreht.

Um die durch irgend eine Last P hervorgerufenen Widerstände H und A zu finden, nehme man irgend einen Punkt m in der Richtung von P an, beispielsweise in Fig. 1 den Schnittpunkt der dort zwischen C und E liegenden Last P mit der Geraden CE, bestimme den zugehörigen Punkt m' und fälle von m' auf P das Loth c. Nun setze man zuerst voraus, es bewege sich A auf der Wagerechten, sodann, es werde A auf der Senkrechten verschoben. Im ersten Falle liefert die Bedingung $\Sigma P c = o$ die Gleichung:

$$+ P c - H c_2 = o \qquad \text{voraus } H = \frac{P c}{c_2},$$

und im zweiten Falle erhält man:

$$+ P c - A c_1 = o \qquad \text{also } A = \frac{P c}{c_1}.$$

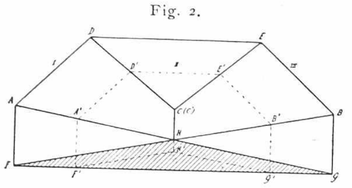
Für irgend einen Belastungszustand ergiebt sich:

$$\text{(III)} \qquad H = \frac{\Sigma P c}{c_2} \quad ; \quad A = \frac{\Sigma P c}{c_1}.$$

Decken sich die Geraden $\mathfrak{P}_{II} D$ und $D A$, so folgt $c_1 = o$ und $c_2 = o$, und, im Allgemeinen: $H = \infty$, $A = \infty$. Gleichgewicht ist in diesem Falle (der z. B. vorliegt, wenn $C H$ eine Symmetrieachse ist) nur möglich, sobald $\Sigma P c = o$ ist. Dann aber befriedigt jeder Werth von H oder A die Gleichungen III, und der Träger ist statisch unbestimmt und von unendlich kleiner Beweglichkeit. Weichen die Richtungen der Geraden $\mathfrak{P}_{II} D$ und $D A$ nur wenig von einander ab, so ist der Träger ebenfalls unbrauchbar, weil in Wirklichkeit, wie aus den Gleichungen I und II hervorgeht, bereits sehr kleine Verrückungen von A gegen C und B (in Folge der unvermeidlichen Bewegungen der Widerlager) zu schädlichen Formänderungen des Trägers Veranlassung geben können.

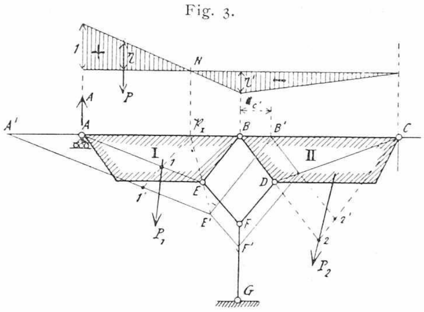
In der Fig. 2 ist die Frage nach der Starrheit eines symmetrischen Trägers der eben untersuchten Art mit Hülfe der vom Verfasser auf Seite 121 d. J. eingeführten Figur F' entschieden worden. Die Gestalt der starren Scheiben I, II, III ist gleichgiltig. I und II sind durch je einen Stab ersetzt worden, III durch ein Stabdreieck. Das schraffirte Dreieck stellt das Widerlager vor; mit diesem ist C durch einen Stab verbunden worden, A und B durch je zwei Stäbe. Da es möglich ist, zu dem Fachwerke F eine Figur F^1 zu zeichnen, welche der Figur F nicht ähnlich ist, so ist das Fachwerk kein starres, trotzdem es, bei $n = 8$ Knoten, $2\,n - 3 = 13$ Stäbe besitzt.

Fig. 2.



Aufgabe 2. In Figur 3 ist ein aus zwei starren Scheiben und zwei Stäben (EF, FD) bestehender Träger dargestellt worden, welche bei C ein festes, bei A ein bewegliches Auflagergelenk besitzt und bei F durch eine Pendelsäule gestützt wird. Gesucht ist der in A wirksame Stützenwiderstand und der Einfluss eines Ausweichens des Widerlagers A auf die Verrückungen der Punkte B, D, E, F.

Fig. 3.



Beseitigt man die Führung des Punktes A, so entsteht eine zwangläufige Kette. Punkt C ist der Pol der Scheibe II und Punkt G der Pol der Pendelsäule. Nach Wahl eines beliebigen Punktes B' zieht man $B'\,D' \parallel B\,D$*) und $D'\,F' \parallel D\,F$, hierauf $B'\,E' \parallel B\,E$ und $F'\,E' \parallel F\,E$, schliesslich $E'\,A' \parallel E\,A$.

Zwischen den Verrückungen der Punkte B, D, E, F und der (in senkrechter Richtung erfolgenden) Verrückung δ_A von A besteht die Gleichung:

$$\delta_B : \delta_D : \delta_E : \delta_F : \delta_A = \overline{BB'} : \overline{DD'} : \overline{EE'} : \overline{FF'} : \overline{AA'},$$

und es leuchtet ein, dass kleine Verrückungen von A auch nur kleine Verrückungen der übrigen Punkte des Trägers zur Folge haben werden, und zu demselben Ergebnisse gelangt man bezüglich des Einflusses der Verschiebungen der Widerlager C und G**).

Um den Stützenwiderstand A in Folge der in Fig. 3 angenommenen Lasten P_1 und P_2 zu bestimmen, werden die Punkte 1 und 2 zu Angriffspunkten gewählt, die zugehörigen Punkte 1′ und 2′ ermittelt und die Abstände c_1 und c_2 der Kräfte P_1, P_2 von den Punkten 1′, 2′ gemessen. Wird $\overline{AA'} = c$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$-\,A\,c + P_1\,c_1 - P_2\,c_2 = 0 \text{ also } A = \frac{P_1\,c_1}{c} - \frac{P_2\,c_2}{c}.$$

Die Einflusslinie für A (entsprechend einer über den Träger wandernden senkrechten Last $P = 1$) besteht aus den zwei Geraden deren Nullpunkte senkrecht über den Polen C und $\mathfrak{P}_I$ (Schnittpunkt von $B\,B'$ und $E\,E'$) der Scheiben II und I liegen, und welche sich in der Senkrechten durch B schneiden; sie besitzt bei A die Ordinate 1 und liefert für irgend eine senkrechte Last P den Werth $A = P\eta$. Will man, um die Zeichnung zu prüfen, die dem Gelenke B entsprechende Ordinate η' auf anderem Wege finden, so nimmt man P in B an, misst $\overline{BB'} = c'$ und erhält:

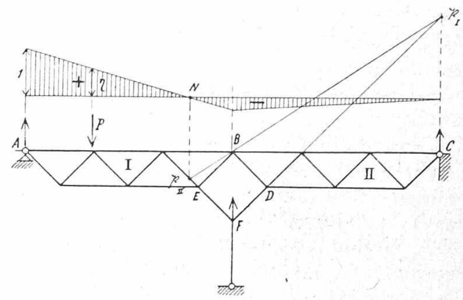
$$-\,A\,c - P'\,c' = 0 \text{ also } A' = -\,P\frac{c'}{c} \text{ und } \eta' = -\,1\frac{c'}{c}.$$

*) D' liegt auf der Geraden $D\,C$ und ist auf der Zeichnung aus Versehen weggelassen worden. *Die Red.*

**) Bedingung ist, dass der Punkt F nicht zu nahe der Geraden $E\,D$ liegt. Man muss derartige Untersuchungen natürlich von Fall zu Fall durchführen.

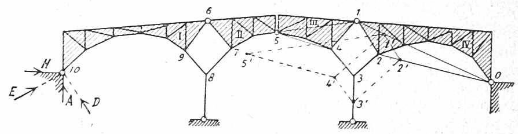
Greifen nur senkrechte Lasten am Träger an, so werden bei A, F, C senkrechte Widerstände hervorgerufen. Man darf desshalb, um die Einflusslinie für A zu erhalten, das feste Auflager in einem beliebigen der drei Punkte A, F, C

Fig. 4.



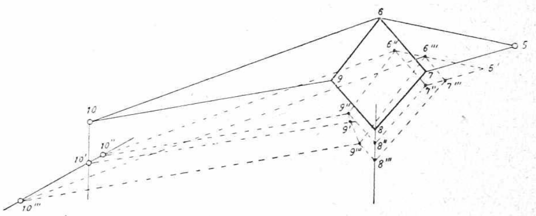
annehmen. Betrachtet man z. B. F als festes und A und C als die beweglichen Lager, so ist der Schnittpunkt der Stabachse $F\,D$ und der Senkrechten durch C der Pol $\mathfrak{P}_I$ der Scheibe I (Fig. 4), und man findet $\mathfrak{P}_{II}$ als Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}_I\,B$ und $F\,E$. Damit ist der Nullpunkt N der Einflusslinie für A bestimmt*).

Fig. 5.



3. Aufgabe. Ein Bogenträger mit 3 Oeffnungen besitze an den Enden feste Auflagergelenke und sei ausserdem durch zwei Pendelsäulen gestützt. Ueber letzteren sind Gelenkvierecke angeordnet; die Mittelöffnung ist mit einem Gelenke (5) versehen. Es handle sich um den Einfluss der Verrückungen des linken Widerlagers.

Fig. 6.



Wird das feste Gelenk 10 durch ein bewegliches ersetzt, so entsteht eine kinematische Kette. Die den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 entsprechenden Punkte 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ werden wie in Aufgabe 2 bestimmt; der eine derselben darf beliebig angenommen werden. Zur Ermittelung von 6′, 7′, 8′ u. s. w. diene die in grösserem Massstabe gezeichnete Figur 6. Punkt 6′ muss in einer durch 5′ ∥ zu 5 6 gezogenen Geraden liegen. Nimmt man zunächst die beiden beliebigen Lagen 6″ und 6‴ an, so kann man, da 8″ und 8‴ in der Senkrechten durch 8 liegen müssen, die zugehörigen Lagen von 7″, 7‴, 8″, 8‴ u. s. w. finden, indem man zieht: 6″ 7″ ∥ 6 5 und 5′ 7″ ∥ 5 7, sodann 7″ 8″ ∥ 7 8, hierauf 6″ 9″ ∥ 6 9 und 8″ 9″ ∥ 8 9, schliesslich 6″ 10″ ∥ 6 10 und 9″ 10″ ∥ 9 10. Ebenso bestimmt man 10‴. Nach einem bekannten Satze der Geometrie ist nun die Gerade 9″ 9‴ der Ort des Punktes 9′, ferner die Gerade 10″ 10‴ der Ort von 10′. Hat man also das feste Auflagegelenk 10 in ein auf einer Wagerechten geführtes verwandelt, so ist 10′ bestimmt als Schnittpunkt von 10″ 10‴ und der Senkrechten durch 10, und man ist jetzt im Stande auf den Geraden 9″ 9‴, 8″ 8‴,

*) Aufgaben, betreffend die Ermittelung von Einflusslinien auf dem hier eingeschlagenen Wege finden sich im ersten Bande meiner Graphischen Statik, Seite 219—228 und Seite 233.

7'' 7''. 6'' 6''' die Lage der Punkte 9', 8', 7', 6' und die Pole der einzelnen Glieder der Kette anzugeben*). Wird Punkt 10 auf einer Senkrechten geführt, so liegt 10' auf der Wagerechten durch 10.

Der hier angewandte geometrische Satz lautet:

Aendert ein n = Eck in der Weise seine Form, dass sämmtliche Seiten desselben durch feste Punkte ein und derselben Geraden gehen (die in der oben gemachten Anwendung die unendlich ferne Gerade ist), während n — 1 Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Eckpunkt in einer Geraden.

Anstatt diesen Satz zu benutzen, könnte man auch mit Hilfe des (in meiner ersten Arbeit auf Seite 122 angeführten) *Burmester*'schen Verfahrens zuerst die Pole sämmtlicher Glieder der Kette und hierauf die senkrechten Geschwindigkeiten bestimmen, doch ist dieser Weg im vorliegenden (und auch in sehr vielen anderen Fällen) weniger zweckmässig. Um die Pole $\mathfrak{P}_I$ und $\mathfrak{P}_{II}$ der Scheiben I und II zu bestimmen, ist ein Dreieck $\mathfrak{P}_I$ R $\mathfrak{P}_{II}$ zu zeichnen, dessen Eckpunkte $\mathfrak{P}_I$, R, $\mathfrak{P}_{II}$ beziehungsweise

auf der Senkrechten zur Bahn des Punktes 10,
„ „ Mittellinie der Pendelsäule,
„ „ Geraden 55'

liegen, und dessen Seiten $\mathfrak{P}_I$ R, R $\mathfrak{P}_{II}$, $\mathfrak{P}_{II}$ $\mathfrak{P}_I$ beziehungsweise gehen: durch den Schnittpunkt von 98 und 57, durch den Punkt 7, durch den Punkt 6.

Die Ermittelung der Verrückungen der verschiedenen Punkte des Trägers und die Berechnung der Seitenkräfte H (wagerecht) und A (senkrecht) erfolgt jetzt wie in Aufgabe 1.

Es sei noch verlangt, den im Punkte 10 angreifenden Stützenwiderstand durch Angabe zweier Seitenkräfte E und D zu bestimmen, welche untereinander wieder einen rechten Winkel einschliessen, und von denen der erstere parallel zur Geraden 10'' 10''' ist. Wird D gesucht, so muss das feste Gelenk 10 durch ein in der Richtung von D geführtes ersetzt werden. Punkt 10' liegt in der Richtung von E und zwar im Unendlichen, weil $E \parallel$ 10'' 10''', und in Folge dessen rücken auch 9', 8', 7', 6' ins Unendliche. In der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma P c = o$ tritt D mit dem Factor $c = \infty$ auf, und hieraus folgt, dass alle Lasten, denen ein endliches c entspricht, also beispielsweise die auf die Scheibe IV wirkenden, $D = o$ erzeugen; sie rufen also bei 10 nur einen zur Geraden 10'' 10''' parallelen Stützenwiderstand E hervor.

• • •

Die gelösten Aufgaben dürften genügen, um von der Fruchtbarkeit des neuen Verfahrens zu überzeugen, und ich schliesse diese kurzen Mittheilungen mit der Bemerkung, dass man, falls die Verwandlung eines Fachwerks in eine zwangläufige Kette durch Beseitigung eines Stabes erfolgt, nicht nur im Stande ist, die Spannkraft S dieses Stabes für jeden Belastungszustand sofort mittels einer einzigen Gleichung zu bestimmen und die Einflusslinie für S schnell anzugeben, sondern auch festzustellen, wie gross die Verrückungen beliebiger Punkte des Trägers in Folge einer Längenänderung des fraglichen Stabes sind. Die Möglichkeit, die letztere Frage schnell zu entscheiden, ist wieder wichtig für die Werthschätzung neuer Trägerarten; denn es kann vorkommen, dass geringe Aenderungen der Längen einzelner Stäbe (die ja in Wirklichkeit stets elastisch sind) unzulässige Verrückungen anderer Theile des Trägers nach sich ziehen. Dass sich das mitgetheilte Verfahren auch als Grundlage einer allgemeinen geometrischen Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks verwerthen lässt, möge ebenfalls betont werden; denn die Hauptaufgabe dieser Theorie besteht ja darin, die durch die Längenänderungen der elastischen Stäbe verursachten Verrückungen einzelner Punkte des Trägers zu ermitteln, gewissen Bedingungen zu unterwerfen und auf diesem Wege die fehlenden Gleichungen zur Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Spannkräfte und Stützenwiderstände zu gewinnen**).

Hannover, im Oktober 1887.

*) Fällt die Gerade 10'' 10''' mit der Senkrechten durch 10 zusammen, so wird die Lage von 10' unbestimmt. Die senkrechte Geschwindigkeit von 10 darf dann beliebig gross angenommen werden, und die Kette ist in dem hier betrachteten Augenblicke keine zwangläufige.

**) Für das einfache Dreiecksystem hat bereits *Fränkel* diese Aufgabe auf kinematischem Wege gelöst. Civil-Ing. 1876. Auch sei hier an das bekannte geometrische Verfahren von *Williot* erinnert, dessen Anwendung auf die Untersuchung kinematischer Ketten in dem (voraussichtlich im Sommer erscheinenden) zweiten Bande meiner Graphischen Statik (im Abschnitte über die Formänderung des Fachwerks) behandelt wird.

Die Wettbewerbung um den Entwurf einer festen Strassenbrücke über den Neckar bei Mannheim.

Für die von der Grossherzoglich Badischen Oberdirection des Wasser- und Strassenbaues unter dem 16. Mai d. J. ausgeschriebene Wettbewerbung um den Entwurf einer neuen festen Neckarbrücke bei Mannheim waren an dem auf den 15. October gestellten Termine elf Entwürfe eingelaufen, eine verhältnissmässig geringe Anzahl im Vergleich zu den einundvierzig Projecten, welche sich vor wenigen Jahren gelegentlich der Concurrenz für den Entwurf einer festen Strassenbrücke über den Rhein bei Mainz um den Preis bewarben.

Ausser den besonderen Schwierigkeiten der Aufgabe trugen an dieser schwachen Betheiligung wohl in erster Linie die äusserst niedrig angesetzten Preise die Hauptschuld, von welchen schon der zweite kaum noch die Kosten der Monate beanspruchenden Arbeit gedeckt haben dürfte.

Unter den eingelaufenen Entwürfen sprach das Preisgericht dem Projecte der HH. *Gebr. Benckiser in Pforzheim, Bernatz u. Grün* und Architect *W. Manchot* in Mannheim den *ersten Preis (4000 Mk.)*, dem Entwurfe der Herren *H. Gerber, Fr. Thiersch, F. Beutel in München* und *A. Rieppel in Nürnberg* den *zweiten Preis (2000 Mk.)*, und demjenigen der Herren *W. Lauter in Frankfurt a/M.* und Dr. *J. Durm in Karlsruhe* den dritten Preis (1500 Mk.) zu; doch findet dieser Ausspruch im Publicum und in deutschen Fachblättern insoweit es die Werthschätzung des mit dem ersten Preise bedachten Entwurfes anbetrifft, verschiedentlich eine abfällige Beurtheilung und zum Theil entschiedenen Widerspruch.

Unter den Bestimmungen des der Wettbewerbung zu Grund gelegten Programmes, sind die wesentlichsten wohl folgende:

Die neue Brücke soll an derselben Stelle erbaut werden, an welcher jetzt die alte Kettenbrücke steht und es ist ihre Länge durch die bestehenden Landfesten bestimmt, deren lichte Entfernung 185,6 *m* beträgt.

Die jetzige Eintheilung der Brückenöffnungen, von welchen die mittlere doppelt so gross ist, als die beiden Seitenöffnungen ist im Programm als zweckmässig und deren Beibehaltung als wünschenswerth erklärt. Die Wahl einer anderen Eintheilung ist durch besondere, in den eigenthümlichen Stromverhältnissen des Neckars begründete Bestimmungen so beschränkt, dass in allen Fällen eine die beiden Seitenöffnungen bedeutend übertreffende Mittelspannung auch für die neue Brücke nicht zu umgehen ist.

Die Unterkante der Eisenconstruction darf nicht unter die Cote + 11,80 des neuen Neckarpegels heruntergehen; da ferner die beiderseitigen Rampen nicht mehr als 1,5 % Steigung erhalten durften, so war die Annahme von unter der Fahrbahn liegenden Hauptträgern durch die äusserst geringe verbleibende Constructionshöhe von vorneherein ausgeschlossen. Da überdies in Folge der verlangten beträchtlichen Breite der Brücke eine Anordnung der oben liegenden Hauptträger zwischen Fahrbahn und Fusswegen erforderlich machte, so wurde in Rücksicht auf die Ermöglichung eines freien Verkehrs quer über die Brücke die Wahl des Trägersystems eine um so schwierigere, als bei möglichst zweckmässiger Gestaltung der Träger der Totaleindruck der Brücke, wie auch das Programm ausdrücklich